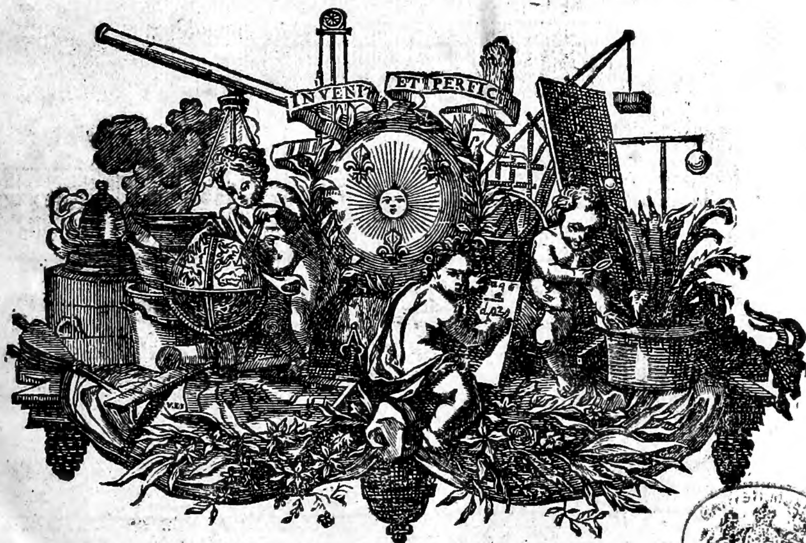
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année MDCCIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.





A PARIS,
Chez GABRIEL MARTIN, JEAN-BAPT. COIGNARD, & HIPPOLYTE-LOUIS GUERIN, ruë S. Jacques.

MDCCXLV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

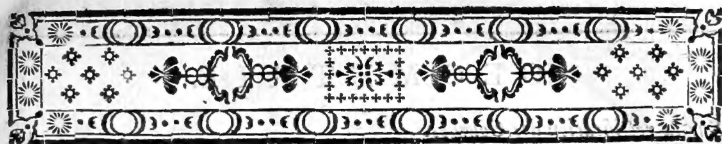


TABLE POUR L'HISTOIRE

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHYMIE.

BOTANIQUE.

ARITHMETIQUE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

HYDROGRAPHIE. 76

DIOPTRIQUE.

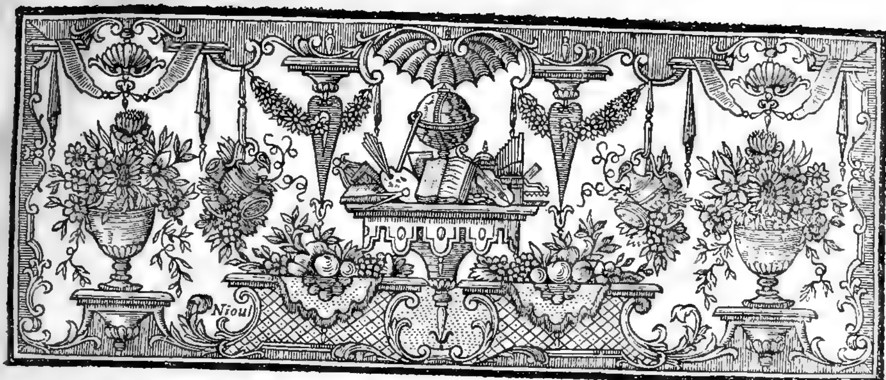
ACOUSTIQUE. 88

MECHANIQUE.

TABLE
POUR
LES MEMOIRES.

AVERTISSEMENT.

ON a imprimé dans les Mémoires de 1703. *page* 312. *un Ecrit de M. Rolle, intitulé,* Du nouveau Syſteme de l'Infini. *Les Réflexions que diverſes perſonnes ont faites ſur cet Ecrit, ſur les principes qui y ſont avancés, & ſur les conſéquences qu'on en pourroit tirer, obligent à déclarer que quoiqu'il ſe trouve parmi les autres Ouvrages deſtinés à l'impreſſion par l'Académie, ſon intention n'a jamais été d'adopter rien de ce qui s'y peut trouver.*



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCIV.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR LE BAROMETRE RECTIFIE'.



NOus mesurons aujourd'hui ce qui n'avoit jamais été mesuré, le chaud, le froid, la pesanteur de l'air. Mais cet avantage de notre siecle sur tous ceux qui l'ont précédé seroit imparfait, si les Mesures nouvelles n'étoient portées à toute la justesse & à toute la précision que demande le caractere général de Mesure.

V. les M. p. 164. & 271.

M. Amontons, après avoir rectifié le Thermometre, ainsi qu'on a vû dans l'Histoire de 1702. * a passé au

* page 1. & suiv.

Barometre. Le Barometre, uniquement destiné à mesurer la pesanteur de l'air, se ressent des différens degrés de froid ou de chaud, & devenant Thermometre en partie, devient défectueux & équivoque. S'il est simple, ou à une seule branche, le Mercure, tout pesant qu'il est, n'est pas exempt de raréfaction dans le chaud, ainsi que M. Homberg l'a remarqué le premier par l'usage de son Aréometre; il s'éleve donc par la chaleur seule, & trompe l'Observateur, parce que l'on compte qu'il ne s'éleve que par l'augmentation de la pesanteur de l'air. Si le Barometre est double ou à deux branches, la même source d'erreur s'y trouve, mais d'une maniere d'autant plus dangereuse que le Barometre double donne les mêmes degrés plus grands que le simple, ce qui fait tout son avantage. De plus les degrés y sont marqués par une liqueur que l'on met dans la boîte inférieure, & dans la seconde branche; & quoique cette liqueur, qui est ordinairement ou de l'Eau seconde, ou de l'Huile de Tartre teinte, ait été choisie exprès, parce qu'elle se raréfie peu, elle se raréfie pourtant, & met une nouvelle confusion dans le Barometre.

M. Amontons a trouvé par expérience que du plus grand froid au plus grand chaud de notre Climat, le Mercure augmente son volume, ou, ce qui est la même chose, diminue sa pesanteur spécifique de $\frac{1}{115}$. On a expérimenté d'ailleurs que les deux termes entre lesquels est renfermée la variation de hauteur du Mercure dans le Barometre simple, sont 26. pouces 4. lignes, & 28. pouces 4. lignes. En prenant donc ces 28. pouces 4. lignes pour la plus grande hauteur du Mercure, & supposant que la pesanteur de l'Atmosphere le tienne suspendu à cette hauteur pendant le plus grand froid de notre Climat, & que cette pesanteur ne varie point jusqu'au plus grand chaud, le Mercure haussera nécessairement de la 115me partie de 28. pouces 4. lignes, c'est-à-dire, de 3. lignes environ, sans que la pesanteur de l'Atmosphere soit devenue plus grande.

Cestrois lignes sont très-considérables, puisqu'elles sont la 8me partie des 2. pouces que peut parcourir toute la variation du Mercure : mais elles deviennent encore plus considérables dans certaines opérations, par exemple, lorsqu'on mesure la hauteur des Montagnes par le Barometre *, car une ligne de Mercure répond alors à plusieurs Toises de la hauteur de la Montagne, & l'air peut être en même temps beaucoup plus chaud au pied qu'au sommet, différence qui sera d'autant plus grande que la Montagne sera plus élevée.

* V. l'Hist. de 1703. p. 11.

Voici maintenant d'où viendra l'erreur du Barometre double. On sait que la colomne de Mercure qui y fait équilibre, tant avec le poids de l'Atmosphere, qu'avec le poids de la liqueur contenue dans une partie de la boîte inférieure & dans la seconde branche, n'a pour sa longueur ou hauteur que la distance des deux surfaces du Mercure renfermé dans les deux boîtes. Quand la surface du Mercure de la boîte inférieure baisse, & que celle du Mercure de la boîte supérieure hausse, la colomne de Mercure, qui fait tout l'équilibre, s'allonge, & cela arrive quand le poids de l'Atmosphere augmente. Alors la liqueur baisse dans son tuyau. C'est tout le contraire, quand la surface du Mercure de la boîte supérieure baisse, & que celle du Mercure de la boîte inférieure hausse ; la colomne qui fait l'équilibre, s'accourcit, & la liqueur monte dans son tuyau. Si la surface du Mercure de la boîte supérieure hausse, & qu'il soit possible que celle du Mercure de la boîte inférieure hausse aussi, & également, la colomne ne s'allonge ni ne s'accourcit. Or si l'on suppose, comme on a fait pour le Barometre simple, que la colomne de Mercure du Barometre double, c'est-à-dire, la distance des deux surfaces de Mercure, ait de longueur 28. pouces 4. lignes dans le plus grand froid, & qu'ensuite vienne le plus grand chaud de notre climat, sans que la pesanteur de l'Atmosphere change, le Mercure des deux boîtes se raréfiera également, & par conséquent sa

surface s'élevera également dans toutes les deux, & la colomne qui fait l'équilibre demeurera de la même longueur dont elle étoit. Mais cette colomne de Mercure, qui, par la raréfaction a augmenté son volume de $\frac{2}{115}$, a aussi diminué son poids d'autant ; elle ne peut donc plus faire équilibre à la pesanteur de l'Atmosphere qui n'a point changé, & par conséquent l'air qui pese immédiatement sur la liqueur, la fait baisser, & donne au Barometre une fausse apparence d'une augmentation de pesanteur de l'Atmosphere. Si la liqueur est 14. fois plus legere que le Mercure, comme on le suppose ordinairement, l'air qui agit contre une colomne de Mercure affoiblie de la valeur de 3. lignes, ou, ce qui est la même chose, l'air devenu plus fort de cette même valeur, fera baisser la liqueur de 3. fois 14. lignes, ou de 3. pouces $\frac{1}{2}$; ce qui est une très-grande variation, à laquelle cependant le poids de l'Atmosphere n'a aucune part. La liqueur ne peut baisser, que la surface du Mercure de la boîte inférieure ne baisse aussi, & que celle du Mercure de la boîte supérieure ne hausse ; ce qui allonge la colomne de Mercure, & la remet en équilibre avec l'Atmosphere.

Le calcul des 3. pouces $\frac{1}{2}$ dont la liqueur baisse, n'est juste qu'en ne considérant point sa raréfaction. Mais réellement elle se raréfie, & plus considérablement que le Mercure. Comme dans la supposition présente, la pesanteur de l'Atmosphere n'a point changé ; mais seulement celle de la colomne de Mercure, la liqueur qui trouve du côté de l'air plus de résistance à l'extension que demande sa raréfaction, qu'elle n'en trouve du côté du Mercure, ne s'étend que de ce côté plus foible, & par conséquent elle ne prend cette nouvelle extension que dans la boîte inférieure, & non dans son tuyau. Or elle occupe par-là une partie de l'espace qu'abandonne le Mercure qui sort de la boîte inférieure, & par conséquent baisse d'autant moins dans son tuyau ; de sorte que si elle occupoit par sa raréfaction tout l'espace abandonné par le Mercure, elle ne

baisseroit nullement dans le tuyau : mais il est constant qu'elle ne se raréfie pas assez pour cela, & elle baisse dans le tuyau, sans que la pesanteur de l'Atmosphere soit augmentée.

Il est donc sûr que l'un & l'autre Barometre avoient besoin de correction, & comme tout le mal venoit de la variation du chaud & du froid, en vain eût-on travaillé à y chercher un remede, si l'on n'avoit eu un Thermometre exact & fixe, tel que celui de M. Amontons. Ainsi un des premiers fruits de ce Thermometre est la rectification du Barometre.

Le Barometre simple est d'une telle simplicité dans sa construction, qu'il est impossible d'y rien changer, & tout ce qu'a pû faire M. Amontons, a été de dresser une Table qui marquât de combien la colomne de Mercure varioit pour tous les degrés de chaleur indépendamment de la pesanteur de l'Atmosphere.

Il suppose une colomne de Mercure de 28. pouces 9. lignes dans le plus grand froid de notre climat. Il est vrai que réellement cette colomne ne passe point 28. pouces 4. lignes : mais parce que la raréfaction du Mercure dans le plus grand chaud est de $\frac{1}{115}$, & que 3. lignes sont précisément $\frac{1}{115}$ de 28. pouces 9. lignes, cette supposition est plus commode pour le calcul, & elle ne produit nulle erreur sensible. Le Thermometre de M. Amontons est dans le plus grand froid à 50. degres, & dans le plus grand chaud à 58, & ces degrés étant des pouces, ce sont 8. pouces ou 96. lignes que le Thermometre parcourra, tandis que le Barometre simple parcourra 3. lignes par la seule action de la chaleur. 3. étant 32. fois dans 96, le Barometre haussera de $\frac{1}{32}$ de ligne, pour chaque ligne dont haussera le Thermometre ; & par conséquent le Barometre étant supposé construit dans le grand froid, & sa colomne de Mercure, longue alors de 28. pouces 9. lignes, il faut pour chaque ligne, dont le Thermometre s'élévera au-dessus du 5me degré, retrancher de la hauteur du Barometre $\frac{1}{32}$ de ligne,

& l'on aura la véritable hauteur où le tient la pesanteur de l'Atmosphere, indépendamment de la variation du chaud & du froid.

Quant au Barometre double, M. Amontons change sa construction en partie. Nous avons déja suffisamment insinué, que du plus grand froid au plus grand chaud, il ne varieroit point, la pesanteur de l'Atmosphere demeurant la même, si la liqueur se raréfioit assez pour occuper dans la boîte inférieure tout l'espace que le Mercure a quitté. C'est cette réflexion qui a donné à M. Amontons tout le secret de la correction de ce Barometre. Il faut que la colomne de Mercure affoiblie par la chaleur, s'allonge de 3. lignes pour se remettre en équilibre avec l'Atmosphere. Elle ne peut s'allonger de cette quantité, que la surface du Mercure de la boîte inférieure ne baisse d'une ligne $\frac{1}{2}$, ce qui fera hausser d'autant la surface du Mercure de la boîte supérieure, & augmentera de 3. lignes leur distance. Il faut donc qu'il sorte de la boîte inférieure 1. ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, & afin que la liqueur ne baisse point dans son tuyau, il faut qu'elle se raréfie dans la boîte précisément de cette quantité.

Cela ne dépend plus que de la nature de la liqueur, & de la capacité de la boîte. M. Amontons prend de l'Esprit de vin, dont il a trouvé par expérience que la raréfaction du grand froid au grand chaud, étoit de $\frac{1}{27}$. Par conséquent, afin que l'Esprit de vin prenne la place de 1. ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, il faut que la quantité de l'Esprit de vin contienne 27. fois cette ligne & demie, c'est-à-dire, 27. fois un cilindre de 1. ligne $\frac{1}{2}$ de hauteur, qui auroit pour diametre celui de la boîte. Cette quantité d'Esprit de vin étant déterminée, M. Amontons est obligé de changer la figure de la boîte qui contient le Mercure & la liqueur. Il la laisse telle qu'elle étoit dans sa partie qui contient le Mercure; & comme on ne peut pas augmenter la hauteur du tout, il augmente beaucoup la largeur de la partie qui contiendra l'Esprit de vin, afin qu'elle

en contienne toute la quantité néceſſaire. On peut remarquer ici que M. Amontons, pour réparer les déſordres que cauſoit la raréfaction dans le Barometre double, emploie une liqueur qui ſe raréfie beaucoup plus que celle qu'on y employoit auparavant.

Le Barometre ainſi conſtruit, ſi l'on a eu ſoin, en le rempliſſant, de bien purger d'air tout le haut de la boîte ſupérieure au-deſſus du Mercure, il eſt clair que la peſanteur de l'Atmoſphere demeurant la même, il ne variera point, quelque variation qui arrive à la chaleur, & d'ailleurs que le grand froid, pendant lequel on le ſuppoſe conſtruit, demeurant le même, il variera exactement ſelon toutes les variations qui arriveront à la peſanteur de l'Atmoſphere. Juſque-là, il eſt dans toute la perfection poſſible; mais ſi la chaleur & le poids de l'Atmoſphere varient en même temps, ce qui arrive le plus communément, comment ſe reglera-t-on ?

La liqueur du Barometre élevée le plus qu'elle le puiſſe être, & par le peu de peſanteur de l'Atmoſphere, & par l'action de la chaleur, ne peut guère paſſer 28. pouces. Si cette liqueur eſt de l'Eſprit de vin, il y aura, dans la ſuppoſition préſente, un pouce à retrancher de cette hauteur, pour n'avoir que celle où l'Eſprit de vin eſt élevé par le peu de peſanteur de l'Atmoſphere: car ce pouce eſt préciſément la 27me partie que la raréfaction a ajoutée à l'élévation cauſée par l'Atmoſphere. Ce retranchement d'un pouce n'étant que pour le temps de la plus grande chaleur, où le Thermometre de M. Amontons eſt à 58, il ſe fera toujours un retranchement moindre à proportion pour tous les degrés inférieurs juſqu'à 50, où eſt le plus grand froid: ainſi, ſelon le degré où ſera le Thermometre, on retranchera de la hauteur de l'Eſprit de vin dans le Barometre double, ou un pouce, ou une partie d'un pouce, juſqu'à ce que le Thermometre étant à 50, on ne retranche rien. Voilà le principe d'une eſpece de Table que M. Amontons a conſtruite, qui donne tout d'un coup les hauteurs à retrancher.

Il ne faut pas oublier que le Barometre double de M. Amontons a encore un avantage ſur l'ancien. Un Barometre eſt d'autant plus *ſenſible* qu'il marque les mêmes changemens dans une plus grande étendue. Ainſi le Barometre double eſt plus ſenſible que le ſimple, parce que tout le jeu de la variation du ſimple étant renfermé dans l'étendue de deux pouces de Mercure, cette même variation eſt marquée dans le double par une liqueur qui eſt beaucoup plus legere que le Mercure, & dont pluſieurs pouces hauſſent ou baiſſent par l'élévation d'un pouce de Mercure, ſelon la proportion de leurs peſanteurs. L'Eau Seconde que l'on emploie communément dans le Barometre double, eſt 14. fois plus legere que le Mercure, & donne les degrés 14. fois plus grands. Mais l'Eſprit de vin qui, dans une conſtitution moyenne de l'air eſt 16 fois $\frac{1}{4}$ plus leger que le Mercure, produira donc une plus grande ſenſibilité dans le Barometre double de M. Amontons.

DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MONSIEUR Maraldi ayant communiqué à l'Académie, des Relations qu'il avoit reçues des Tremblemens de terre arrivés en Italie, nous en détacherons ici ce qu'elles contenoient de plus phyſique.

Les Tremblemens commencerent en Italie au mois d'Octobre 1702, & continuerent juſqu'au mois de Juillet 1703. Les Pays qui en ont le plus ſouffert, & qui furent auſſi ceux par où ils commencerent, ſont la Ville de Norcia avec ſes dépendances dans l'Etat Eccléſiaſtique, & la Province de l'Abruſſe. Ces pays ſont contigus,

gus, & ſitués au pied de l'Apennin du côté du Midi.

Souvent les Tremblemens ont été accompagnés de bruits épouvantables dans l'air, & ſouvent auſſi on a entendu ces bruits ſans qu'il y ait eu de tremblemens, le ciel étant même fort ſerein. Le tremblement du ſecond Février 1703. qui fut le plus violent de tous, fut accompagné, du moins à Rome, d'une grande ſérénité du ciel, & d'un grand calme dans l'air. Il dura à Rome une demi-minute, & à l'Aquila Capitale de l'Abruſſe, trois heures. Il ruina toute la Ville de l'Aquila, enſevelit 5000 perſonnes ſous les ruines, & fit un grand ravage dans les environs.

Communément les balancemens de la Terre ont été du Nord au Sud, ou à peu près, ce qui a été remarqué par le mouvement des Lampes des Egliſes.

Il s'eſt fait dans un champ deux ouvertures d'où il eſt ſorti avec violence une grande quantité de pierres qui l'ont entierement couvert & rendu ſtérile. Après les pierres, il s'élança de ces ouvertures deux jets d'eau qui ſurpaſſoient beaucoup en hauteur les arbres de cette campagne, qui durerent un quart d'heure, & inonderent juſqu'aux campagnes voiſines. Cette eau eſt blanchâtre, ſemblable à de l'eau de ſavon, & n'a aucun goût.

Une Montagne qui eſt près de Sigillo, Bourg éloigné de l'Aquila de 22. milles, avoit ſur ſon ſommet une plaine aſſez grande, environnée de rochers qui lui ſervoient comme de murailles. Depuis le tremblement du 2. Février, il s'eſt fait à la place de cette plaine un gouffre de largeur inégale, dont le plus grand diametre eſt de 25. toiſes, & le moindre de 20. On n'a pû en trouver le fond, quoiqu'on ait été juſqu'à 300. toiſes. Dans le temps que ſe fit cette ouverture, on en vit ſortir des flammes, & enſuite une très-groſſe fumée qui dura trois jours avec quelques interruptions.

A Genes, le 1. & le 2. Juillet 1703, il y eut deux petits tremblemens. Le dernier ne fut ſenti que par des gens

qui travailloient ſur le Mole. En même temps la mer dans le Port s'abbaiſſa de 6. pieds, en ſorte que les Galeres dans la Darce toucherent le fond, & cette baſſe mer dura près d'un quart d'heure.

L'eau ſoufrée qui eſt dans le chemin de Rome à Tivoli s'eſt diminuée de deux pieds & demi de hauteur, tant dans le baſſin, que dans le foſſé. En pluſieurs endroits de la plaine appellée *le Teſtine*, il y avoit des ſources & des ruiſſeaux d'eau qui formoient des marais impratiquables. Tout s'eſt ſéché. L'eau d'un Lac appellé l'Enfer a diminué auſſi de trois pieds en hauteur. A la place des anciennes ſources qui ont tari, il en eſt ſorti de nouvelles environ à une lieue des premieres, en ſorte qu'il y a apparence que ce ſont les mêmes eaux qui ont changé de route.

II.

V. les M. p. 45.
M. de la Hire avoit publié dans les Mémoires de l'Académie de 1692. ce qu'il avoit découvert ſur des inſectes qui s'attachent aux Orangers, & qu'on appelle communément Punaiſes. Ce qu'ils ont de plus particulier, c'eſt qu'on les voit attachés pendant 8. mois entiers à un même endroit, ſoit d'une feuille d'Oranger, ſoit de la tige de l'arbre, ſans l'abandonner jamais. Pendant ce temps-là ils croiſſent beaucoup, & juſqu'à devenir 20. ou 30. fois plus gros qu'ils n'étoient d'abord, & puis ils pondent leurs œufs. Mais en quel temps ſe ſont-ils accouplés? Cette parfaite immobilité, & ſi rare dans des Animaux, rend la queſtion difficile. M. de la Hire en a enfin trouvé le dénoûment. il a vû ces inſectes nouvellement éclos de leurs œufs, courir ſur les Orangers avec une grande viteſſe, & il faut que leur accouplement ſe faſſe dans le temps qu'ils ont cette legéreté & cette vivacité. Après cela, ils s'attachent pour toujours à quelque endroit de l'Arbre, & leurs œufs ſont 8. mois à acquerir la maturité néceſſaire pour ſortir.

Ce qui fut cauſe que M. de la Hire examina ces inſectes nouvellement éclos, c'eſt qu'il avoit cru qu'ils pouvoient

être les mêmes que ceux qui font la Cochenille. Il a remarqué autrefois que ce qu'on appelle graine de Cochenille, n'eſt que le ventre d'un petit inſecte, dont il ne reſte rien de plus. Ce ventre eſt couvert d'écailles, & s'eſt conſervé par ſa dureté, tandis que les autres parties, inutiles apparemment pour la teinture, ſe ſont deſſéchées, & ont péri. La plante à laquelle cet Inſecte s'attache, eſt l'Opuntia, dont les fruits ſont rouges, & teignent en un rouge de ſang les urines de ceux qui en ont mangé. Le ventre des Inſectes des Orangers eſt aſſez ſemblable à celui de ces Inſectes qui font la Cochenille, les Inſectes des Orangers étant écraſés entre les doigts, leur donnent une couleur rouſſâtre qui tient fort à la peau; ces conformités firent naître à M. de la Hire la penſée que peut-être les Inſectes des Orangers étoient-ils les mêmes que ceux qui font la Cochenille, & que s'ils étoient nourris d'Opuntia, ils donneroient la même teinture. Il mit au-deſſous d'un Oranger quelques plantes d'Opuntia, & répandit de part & d'autre une grande quantité d'œufs des Inſectes des Orangers. Ils vinrent à éclorre ſur l'une & l'autre plante: mais les petits animaux qui étoient ſur l'Opuntia, le quitterent tous ſans exception pour aller ſur l'Oranger, & de-là M. de la Hire conclut qu'aſſurément les Inſectes des Orangers n'étoient pas ceux qui donnent la Cochenille. Mais il les vit dans leur premiere jeuneſſe, & conjectura, comme nous l'avons dit, que c'étoit alors qu'ils s'accouploient.

III.

Il doit paroître aſſez étonnant que quand on enveloppe de ſa main la boule d'un Thermometre pour en échauffer la liqueur, & la faire monter dans le tuyau, cette liqueur commence par baiſſer, & ne monte au-deſſus de ſon premier niveau qu'après ce mouvement ſi irrégulier en apparence, & ſi contraire à ce qu'on auroit prévu. M. Amontons, qui en parla à l'occaſion de ſes nouveaux Thermometres, rapporte ce mouvement par lequel la liqueur

baiſſe d'abord, la raréfaction que la chaleur de la main cauſe dans la ſubſtance même du verre de la boule, avant que d'en cauſer dans la liqueur. La capacité de la boule augmente donc, & par conſéquent la liqueur du tuyau baiſſe, juſqu'à ce qu'elle ait pris aſſez de chaleur pour monter malgré l'augmentation de la capacité de la boule.

M. Amontons a calculé ſur des expériences exactes, de combien s'augmentoit cette capacité, & il n'a trouvé qu'un millieme. Ce millieme, dont la boule s'augmente, & qui eſt la quantité de liqueur qui y entre, ou qui baiſſe, deviendra d'autant plus ſenſible ſur le tuyau, que la capacité du tuyau ſera plus petite par rapport à celle de la boule.

---

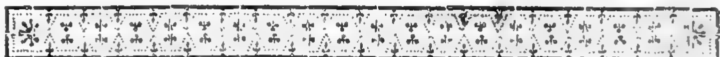
* V. les M. p. 1.

MOnſieur de la Hire a donné à l'ordinaire ſon Journal de l'année précédente.

---

* V. les M. p. 235.

MOnſieur Poupart a donné l'Hiſtoire du Formicaleo.



ANATOMIE.

SUR L'IRIS DE L'OEIL.

* V. les M. p. 261.

L'Anatomie moderne a fait de ſi grands & de ſi utiles progrès, qu'il doit lui être permis de ſe délaſſer quelquefois de ſes importantes recherches, par des

curiosités qui ne seront qu'agréables. Tel est le mouvement de l'Iris, dont la méchanique a été jusqu'à présent inconnue.

L'Iris est cette membrane de l'Oeil, que lui donne les différentes couleurs qu'il a en différens sujets, & de-là vient son nom d'Iris. C'est une espece de Zone ou d'anneau circulaire assez large, dont le milieu qui est vuide est la Prunelle, par où les rayons entrent dans l'œil. Quand l'œil est exposé à une grande lumiere, la prunelle se rétrécit sensiblement; c'est-à-dire, que l'Iris s'élargit & s'étend : au contraire dans l'obscurité la prunelle se dilate, ou, ce qui est la même chose, l'Iris se resserre. A une lumiere moyenne, l'ouverture de la prunelle, ou l'extension de l'Iris est moyenne aussi. Ces mouvemens ne dépendent point de la volonté, ils sont purement naturels, & par-là l'œil s'accommode & se proportionne de lui-même au degré de lumiere qu'il doit recevoir. Il s'ouvre beaucoup, quand elle est foible, pour en recevoir davantage; il s'ouvre peu, quand elle est forte, de peur d'en recevoir trop, & d'en être blessé. Quelle sagesse a dû présider à cette Méchanique !

Mais ce n'est pas assez de connoître la fin qu'elle s'est apparemment proposée, il faut tâcher de découvrir les moyens dont elle s'est servie. La difficulté consiste à trouver, & comment se fait la dilatation ou le resserrement de la membrane Iris, & comment la lumiere plus ou moins forte cause ces deux mouvemens contraires. Si l'Iris avoit des fibres circulaires & concentriques à la prunelle, on concevroit aussi-tôt que ces fibres seroient autant de petits muscles, qui, en se gonflant & en se contractant, accourciroient les cercles qu'ils formeroient, & en diminueroient l'espace, & par conséquent l'ouverture de la prunelle. Il ne resteroit plus qu'à imaginer comment une grande lumiere causeroit le gonflement de ces petits muscles. Mais l'Iris n'a point de fibres circulaires, elles sont toutes tirées de la circonférence vers

le centre, & si l'on prétendoit que des muscles ainsi posés se gonflassent par une grande lumiere, il paroît qu'ils s'accourciroient nécessairement, & augmenteroient l'ouverture de la prunelle, ce qui est précisément contraire au fait qu'il faut expliquer. Je laisse à part la difficulté de concevoir comment les rayons de la lumiere gonfleroient les petites fibres de l'Iris, il seroit inutile de s'en mettre en peine, puisque ce gonflement n'a pas lieu.

Voilà où l'on en étoit sur ce Phenomene, lorsqu'une expérience que fit M. Mery, lui donna une idée qu'il a cru qui le conduisoit au dénoûment. Il est certain qu'une infinité de choses ne demeurent obscures, que faute d'un assez grand nombre de faits, qui les présentent à nos yeux de plusieurs manieres différentes, ou qui nous en apprennent toutes les circonstances essentielles. M. Mery plongea dans l'eau un Chat vivant, & exposa en même temps sa tête & ses yeux au Soleil. Il vit que malgré la grande lumiere, la prunelle de l'animal ne se rétrécissoit point, qu'au contraire elle se dilatoit; dès qu'il l'eut retiré de l'eau encore vivant, elle se resserra.

Quoiqu'il passe moins de rayons dans l'eau que dans l'air, & qu'il semble par conséquent, que les yeux du Chat plongé dans l'eau, en recevoient moins que s'ils eussent été à l'air, cependant comme ils étoient directement exposés au Soleil, leur prunelle auroit toujours dû se resserrer, quoiqu'un peu moins; & de ce qu'elle se dilata, loin de se resserrer, M. Mery en conclut que la lumiere seule ne pouvoit causer le resserrement. Et comme l'animal étoit plongé dans l'eau, quel changement cet état apportoit-il par rapport au Phénomene? Le Chat ne respiroit point, la circulation de son sang étoit presque entierement arrêtée, par conséquent aussi le mouvement des Esprits animaux, & par conséquent ces Esprits sont nécessaires afin que la prunelle puisse se resserrer, ou plutôt afin que l'Iris puisse s'élargir.

Cette conséquence est appuyée par l'exemple de tous

ceux en qui la vûe eſt éteinte par une ſimple obſtruction du nerf optique. Leur prunelle ne ſe reſſerre point à la plus grande lumiere, ſelon la remarque de M. Mery ; & il eſt certain que les Eſprits animaux ne coulent plus dans le nerf qui fait la viſion, ou n'y coulent pas en aſſez grande abondance.

Puiſque ces Eſprits concourent avec la lumiere à cauſer l'extenſion & l'élargiſſement de l'Iris, il faut abſolument & que la lumiere détermine les Eſprits à couler en plus grande quantité dans les fibres, & que ces fibres en ſoient allongées. Pour le premier point, on peut le concevoir par ce principe général d'expérience, que les Eſprits coulent plus abondamment dans une partie nerveuſe, quand elle eſt chatouillée ou irritée par quelque cauſe que ce ſoit, & il faudra ſuppoſer que la lumiere cauſe une eſpece d'irritation aux fibres de l'Iris. Mais ſur le ſecond point, il ſemble que l'on retombe dans la difficulté que nous avons marquée. Tous les muſcles ou toutes les fibres s'accourciſſent par une plus grande quantité d'Eſprits, comment celles de l'Iris s'allongent-elles par cette même cauſe ? Cette difficulté ſeroit inſurmontable ſans un exemple unique, mais très-ſenſible, d'une partie qui ſe gonfle & s'allonge en même temps. Ni l'accourciſſement ni l'allongement d'une partie gonflée ne ſont des ſuites néceſſaires du gonflement, mais ſeulement de ſa ſtructure intérieure.

Les fibres de l'Iris doivent, comme toutes les autres fibres, avoir un reſſort. Il les retire, les raccourcit, & réſiſte à leur allongement. Ainſi dès que la grande lumiere ceſſe de les tenir dans cet allongement violent, elles ſe reſſerrent d'elles-mêmes, & agrandiſſent la prunelle. Ce reſſort & la lumiere ſont deux puiſſances oppoſées, dont les différens degrés de force combinés enſemble, tiennent la prunelle plus ou moins ouverte.

Cela ſuffiroit pour l'explication du Phénomene que M. Mery s'étoit propoſée : mais afin de la rendre encore

plus vraiſemblable, & d'établir mieux, que la lumiere ſans le concours des Eſprits animaux, ne fait rien ſur l'Iris, il prétend que les yeux du Chat plongé dans l'eau, recevoient plus de lumiere, que s'il eût été à l'air. Ce n'eſt pas qu'il ne paſſe plus de rayons dans l'air que dans l'eau; mais c'eſt que les yeux d'un animal en reçoivent d'avantage dans l'eau.

Il eſt conſtant par l'expérience qu'un Plongeur apperçoit au fond de l'eau, à une aſſez grande diſtance, des objets qu'il n'appercevra plus dès qu'il ſera hors de l'eau, quand ils ſe ſeroient aſſez rapprochés pour être toujours à la même diſtance de ſes yeux. M. Mery imagine une raiſon de ce fait qui peut paroître embarraſſant. Il croit que la Cornée, cette Membrane dure & tranſparente qui enveloppe extérieurement le globe de l'œil, n'eſt pas auſſi liſſe ni auſſi unie qu'elle le paroît, quand les yeux ſont à l'air. Il s'y fait alors des plis & des rides, qui augmentant ſon épaiſſeur dans les endroits où ils ſe forment, la rendent plus difficile à pénétrer aux rayons, & par conſéquent en font réfléchir un grand nombre, qui ſont perdus pour l'œil. Mais dans l'eau, ces rides & ces plis s'applaniſſent, parce que la membrane eſt humectée, elle eſt égalemént pénétrable à la lumiere en toutes ſes parties, & il ne s'y réfléchit plus de rayons, qu'autant qu'il eſt indiſpenſable qu'il s'en réfléchiſſe ſur une ſurface parfaitement tranſparente. L'œil qui reçoit plus de rayons, voit mieux.

A cette quantité de rayons plus grande que reçoit un œil plongé dans l'eau, parce que ſa Cornée eſt applanie, ſi l'on joint l'ouverture de la prunelle qui eſt plus grande, parce que, ſelon le Siſteme de M. Mery, les fibres de l'Iris ſont moins remplies d'Eſprits, on aura deux cauſes qui conſpirent enſemble pour rendre la viſion plus forte dans l'eau. Une plus grande ouverture de la prunelle doit auſſi faire paroître les objets plus grands.

Il eſt ſi vrai, ſelon M. Mery, qu'un œil qui eſt dans

l'eau en eſt plus éclairé, que c'eſt par cette raiſon, qu'il eſt mieux vû, & que ſes parties ſont mieux diſtinguées. On y voit la Choroïde qui eſt une membrane placée derriere la Rétine, les vaiſſeaux de la Choroïde, & l'extrémité du Nerf Optique. Rien de tout cela ne ſe verroit dans un œil expoſé à l'air: & quant aux parties qui ne s'y voient pas dans l'eau, telles que ſont les humeurs & la Rétine, c'eſt qu'elles ſont tranſparentes, & de la couleur de l'eau.

On pourroit croire que la ſeule dilatation de la prunelle dans l'eau, y rendroit les parties de l'œil plus viſibles, & que l'applaniſſement de la Cornée n'entreroit pour rien dans cet effet, & ne feroit qu'une fiction. Mais M. Méry prévient cette penſée par l'exemple qu'il rapporte de ceux qui ont la Goute ſereine, c'eſt-à-dire une obſtruction dans le nerf Optique. Ils ont la prunelle extremement dilatée, & cependant on ne diſtingue aucune des parties du fond de leur œil. D'où cela vient-il, ſinon de ce qu'il n'eſt pas aſſez éclairé; & qui empêche qu'il ne le ſoit aſſez, ſi ce ne ſont les plis de la Cornée?

De ce que les Humeurs & la Rétine de l'œil d'un Chat plongé dans l'eau diſparoiſſent également, & ſont par conſéquent également tranſparentes, M. Méry en tire cette conſéquence, que la Rétine n'eſt pas plus que les Humeurs, l'organe immédiat de la viſion, ou, pour ainſi dire, la toile qui reçoit la peinture des objets. Il donne cet uſage à la Choroïde, qui eſt derriere la Retine, & beaucoup plus opaque, puiſqu'elle arrête les rayons, & ſe fait voir. Cette queſtion a été autrefois agitée dans l'Académie & fort au long, & fort ingénieuſement, par deux habiles Adverſaires, dont l'un ſoutenoit la Rétine ſelon l'opinion commune, & l'autre prétendoit mettre la Choroïde en ſa place. Le Public fut inſtruit du procès en ce temps-là, & il n'eſt pas beſoin de rappeller ici une conteſtation fort délicate & fort ſubtile, ſur laquelle M. Méry ne prend parti que par occaſion.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

MOnſieur Littre ouvrant le cadavre d'une Femme âgée de 80. ans, qui avoit été tuée d'un coup de timon de Caroſſe, la trouva d'une ſi prodigieuſe maigreur, que ſes Muſcles les plus gros n'étoient pas plus épais que des Membranes, & qu'à peine avoient-ils conſervé quelque teinture de rouge. Cependant elle avoit à la partie moyenne intérieure de la Cuiſſe gauche une tumeur groſſe comme le poing, ronde, de la même couleur que le reſte de la peau, toute formée de la plus belle graiſſe qu'on puiſſe voir dans le corps le plus ſain.

Cette tumeur toute formée de graiſſe eût été extraordinaire, même dans un corps qui n'en eût pas été d'ailleurs ſi parfaitement dénué. Elle étoit contenue dans ſon lieu naturel, c'eſt-à-dire, dans les cellules de la membrane Adipeuſe.

La graiſſe eſt un ſuc huileux, qui eſt ſéparé du ſang par les glandes des cellules de cette membrane, & qui ſe fige & ſe congele dans ces cellules. On eſt maigre, ſoit quand on a peu de ſuc huileux dans le ſang, ſoit quand ce ſuc eſt trop diſſous ou par la grande chaleur, ou par les autres principes du ſang, ou par un grand & long exercice, ſoit quand les glandes deſtinées à le filtrer ſont mal leur fonction. Dans les perſonnes fort maigres, ces glandes qui ne filtrent rien, & les cellules de la Membrane adipeuſe qui ne contiennent rien, s'affaiſſent, s'effacent & en quelque ſorte s'anéantiſſent. Au contraire, dans les perſonnes fort graſſes les glandes ſont viſibles, quoiqu'elles ne le ſoient qu'avec le Microſcope, & les cellules fort tendues; & ſi ces cellules le ſont au point qu'elles en ayent perdu le reſſort par le-

quel elles chaſſent hors d'elles une partie du ſuc qui y eſt entré, & le font retourner dans les voies de la circulation, il ſe fait un amas exceſſif de ce ſuc qui ſéjourne, c'eſt-à-dire une tumeur. Cet accident eſt fort rare, & peut-être ne connoiſſoit-on point encore une tumeur de graiſſe.

Il n'y a point d'apparence qu'une tumeur de cette eſpece doive être accompagnée ni d'inflammation, puiſqu'il n'y a point de ſang extravaſé, ni de douleur, parce que la graiſſe eſt une matiere fort douce, & qui humectant les fibres nerveuſes les rend peu ſuſceptibles d'une tenſion violente.

Cette tumeur de graiſſe s'étant formée dans un ſujet en qui toutes les glandes & toutes les cellules de tout le reſte de la Membrane adipeuſe s'étoient entierement flétries & deſſéchées, on peut concevoir que les glandes qui avoient cauſé la tumeur étoient ſeules demeurées en état de filtrer le ſuc huileux, & qu'elles en avoient filtré une quantité d'autant plus grande, que les autres n'en filtroient plus du tout.

Il ne ſera pas impſſible d'imaginer des remedes à un pareil accident, quand on jugera qu'il en merite. M. Littre croit que ſi la tumeur eſt récente, il y faut appliquer d'abord un Topique aſtringent, qui reſſerrant la peau, les glandes & les cellules de la Membrane adipeuſe, le mette en état de réſiſter à l'impulſion des ſucs qui ſurviennent toujours de nouveau; qu'enſuite un remede réſolutif fera tranſpirer une partie de la graiſſe amaſſée en trop grande quantité; que dans tout le cours du penſement il ſera à propos d'employer un bandage qui aide à l'effet du topique aſtringent; que ſi la tumeur eſt invétérée, on ne peut plus que la couper, parce que les parties ne ſont plus en état de reprendre leur reſſort, & qu'il faut bien obſerver de la couper toute entiere, de peur que s'il reſtoit quelques glandes & quelques cellules dilatées, elles ne reçuſſent encore dans la ſuite une trop grande quantité de ſuc huileux qu'elles

ne pourroient chaſſer hors d'elles, & ne cauſaſſent une nouvelle tumeur.

I I.

Dans une jeune Femme de 38 ans, & de bonne conſtitution, que deux Hommes avoient étranglée avec leurs mains, M. Littre trouva que la peau du Tambour de l'Oreille gauche étoit déchirée, & qu'il étoit ſorti par cette oreille environ une once de ſang; que les Vaiſſeaux ſanguins du Cerveau étoient plus pleins qu'à l'ordinaire, qu'il y avoit du ſang d'un rouge clair épanché dans les Ventricules du Cerveau, & ſur la baſe du Crane; que le Poumon étoit fort tendu, & ſa membrane, où il ne paroît naturellement aucun vaiſſeau ſanguin, toute parſemée de vaiſſeaux gros comme de moyennes épingles, qu'au travers de cette membrane on appercevoit beaucoup plus d'air qu'à l'ordinaire dans les cellules du poumon; qu'en ouvrant le ventricule droit du cœur, il en ſortit de l'air avec impétuoſité, & que cette cavité contenoit une once de ſang vermeil & écumeux comme celui du poumon. Tout ces faits extraordinaires ne tiennent pas tant à ce que cette Femme fut étranglée, qu'à la maniere dont elle le fut. Les mains des deux hommes ne lui ſerrerent pas la gorge auſſi fort, auſſi continûment, ni auſſi également qu'auroit fait une corde; elle ſe défendit, ſe débatit, & vécut aſſez long-temps, comme à diverſes repriſes; & pendant ce temps-là le ſang qui étoit pouſſé par le cœur vers les parties ſupérieures, & qui n'en redeſcendoit pas librement, s'y amaſſa, les gonfla, & même en quelques endroits creva les vaiſſeaux. Celui des veines du poumon ne recevant plus l'air qui auroit dû le pouſſer dans le ventricule gauche, ou plutôt ne le recevant pas en aſſez grande quantité, reflua par l'artere du poumon dans le ventricule droit, & y porta de l'air avec lui. Cependant M. Littre, en ſoufflant par la Trachée, ne put jamais faire paſſer d'air dans le ventricule droit, mais ſeulement dans le gauche, encore cela n'arrivoit-il pas toujours.

III.

Dans ce même ſujet, M. Littre obſerva que les deux Trompes de la Matrice étoient plus groſſes, plus épaiſſes, & plus charnues que de coutume. Elles s'ouvroient à l'ordinaire dans la Matrice par leur petit bout, mais par le gros elles n'avoient ni l'une ni l'autre aucune ouverture, ni aucune apparence d'en avoir jamais eu. Elles étoient même ſans Pavillon. Cependant cette Femme avoit eu deux Enfans, le dernier 5 ans avant ſa mort. A moins qu'on ne ſuppoſe que ces deux Trompes s'étoient fermées également, & de maniere à ne laiſſer nulle trace de leur ouverture naturelle; ou que du moins l'une ayant toujours été naturellement fermée, il en étoit arrivé autant à l'autre par accident, le Siſteme des Oeufs paroît détruit : mais il eſt d'ailleurs ſi vraiſemblable & même ſi néceſſaire, qu'il mérite qu'on ſe reſolve à cette ſuppoſition. Les deux Trompes étoient pleines, l'une d'une ſéroſité ſanguinolente, & l'autre d'une ſéroſité jaunâtre. Leur ſurface intérieure étoit inégale en quelques endroits, & percée par tout d'un très-grand nombre de petits trous, qui répondoient à autant de grains glanduleux, ſitués ſur la ſuperficie extérieure de ces deux conduits.

IV.

M. Lémery a parlé d'une Dame de Paris, grande, robuſte, d'un tempérament vif & ſanguin, ſujette à des paſſions fortes, mais peu durables, qui depuis l'âge de 24 ans juſqu'à 40 ayant fait 14 couches en a eu 6 d'extraordinaires par les différentes envies, dont elle a été frappée. L'un de ces accouchemens monſtrueux a été d'une fille parfaitement bien formée à l'extérieur, & même d'une ſi grande beauté que feu M. le Brun la voulut peindre. Elle n'avoit ni foie, ni ratte, ni inteſtins, mais ſeulement une maſſe charnue qui communiquoit avec l'Eſtomac, & n'avoit point d'ouverture vers le fondement, groſſe à peu près comme la tête de l'Enfant,

parſemée d'arteres & de veines, & rougeâtre. Cette fille vécut 8 jours.

V.

M. du Verney le jeune a parlé d'une cure fort heureuſe qu'il avoit faite. Une jeune Demoiſelle qui n'avoit pû épouſer un homme qu'elle aimoit, tomba d'abord dans une ſombre mélancolie, & enſuite par degrés dans une telle fureur, qu'elle ne connoiſſoit plus aucune retenue, & donnoit toutes les marques les plus indécentes de la paſſion qui la tourmentoit. Elle étoit devenue d'une extreme maigreur, on lui avoit fait inutilement beaucoup de remedes, & la maladie duroit déja depuis 5 ou 6 mois, & paroiſſoit déſeſpérée, lorſque M. du Verney fut appellé. Il lui vint d'abord en penſée de baſſiner avec de l'eau tiede les parties qui étoient la ſource du mal, & qui apparemment devoient être dans une grande irritation. Il vit auſſi-tôt du ſoulagement, il continua à les baſſiner, & même y fit des injections avec une forte décoction de racine d'Ellébore noir & de Patience, de Solanum & de Guimauve, où il avoit ajoûté du Sel de Saturne. Il appliqua de plus ſur la tête de la Malade qu'il avoit fait raſer, un Emplâtre où entroit le Sel de Saturne, le Caſtoreum, l'Opium, & le Camphre. Le ſoulagement fut très-conſidérable; M. du Verney paſſa aux remedes intérieurs, & fit uſer à la Malade d'une teinture d'Hiéra elléborinée. Les premieres voies ayant été débarraſſées par ce moyen, il lui fit prendre ſoir & matin deux cuillerées d'une teinture faite avec le vin, la racine d'Ellébore noir, les fleurs de Millepertuis, & le Coquelicot, le tout aiguiſé d'un peu d'Eau de vie, & mêlé de plus ou de moins de Sel de Saturne ſelon les diverſes circonſtances de la maladie. En un mois ou ſix ſemaines au plus, la Demoiſelle fut entierement guérie, & n'a eu depuis ni reſſentiment ni rechûte.

Comme les Vapeurs ſont une eſpece de Manie, mais beaucoup moins forte, & plus familiere, M. du Verney

aſſûre que dans toutes celles qui ne ſont point accompagnées de convulſions, il a toujours vû de très-bons effets de la teinture qu'on a décrite ici, & qu'il n'a eu beſoin d'y joindre le Sel de Saturne, que quand les Malades étoient furieux. A l'égard de ceux qui ont des convulſions, il ajoûte à cette teinture celle de Venus faite avec l'Eſprit volatil ammoniac, l'Eſprit de vin, le Camphre, & le Verdet. Par ce remede, les mouvemens convulſifs ſont arrêtés preſque dans le moment. Il faut purger dès qu'on le peut, & en cette occaſion M. du Verney n'a point trouvé de meilleur Purgatif que l'Hiéra elléborinée, ou ſeule, ou mêlée, ou en teinture, ſur tout aux femmes & aux filles qui ne ſont pas réglées.

V I.

M. Homberg a dit que quand on pile de l'Ipecacuanha en aſſez grande quantité, & qu'on en reſpire par le nez, il arrive aſſez ſouvent qu'on en crache le ſang, & qu'on a de grands maux de tête pendant 2 ou 3 jours.

V I I.

M. Lémery a vû cracher à un Malade parmi des flegmes aſſez épais des fibres blanches, groſſes comme le tuyau d'une plume de Poulet, mêlées ou entourées d'un peu de ſang, formées en branches ou ramifications, & repréſentant parfaitement la figure des veines qui paroiſſent ſur les Poumons. Elles étoient molaſſes, ſembloient creuſes en dedans, ne ſe rompoient pas aiſément, & s'allongoient beaucoup quand on les tiroit. M. Lémery crut que ces fibres pouvoient être un Polype qui s'étoit formé dans quelque artere ou dans quelque veine du poumon. Leur ſubſtance étoit ſemblable à celle des Polypes du cœur, mais elles étoient plus grêles, & ſe ramifioient comme les vaiſſeaux pulmonaires. Elles devoient être ſorties par une ouverture qui s'étoit faite à leur vaiſſeau, auſſi étoient-elles accompagnées de ſang, & le malade avoit fait effort pour les jetter.

De petits corps blancs & molaſſes qui paroiſſent ſouvent dans les ſaignées à l'ouverture de la veine, qui empêchent le cours du ſang, & que les Chirurgiens prennent pour de petits morceaux de graiſſe, & quand ils ſont aſſez longs, pour des Vers, pourroient donc, ſelon la conjecture de M. Lémery, n'être que des parcelles de quelque Polype, qui ſe ſeroient rompues, & auroient coulé avec le ſang.

VIII.

M. Méry apporta un Enfant venu à terme, bien formé, & bien nourri, qui n'avoit que la baſe du Crane, & point de Cerveau, ni de Cervelet. Il lui ouvrit dans l'Aſſemblée le Canal de l'Epine, & il s'y trouva un filet de moëlle, plus petit qu'il n'auroit dû être naturellement. Ce ſeul filet avoit dû faire les fonctions du cerveau. On peut voir ſur ce ſujet l'Hiſt. de 1703. *

* pag. 26. & ſuiv.

IX.

M. Lémery a dit qu'il a vû une Pierre d'un pouce de diametre, & d'un pouce & demi de long, qui étoit dans les Inteſtins d'une Femme, & en bouchoit exactement le paſſage, de ſorte qu'elle faiſoit refluer les matieres. Le fait eſt fort ſingulier. Les Inteſtins ne paroiſſent pas propres à produire une Pierre. Celle-là étoit trop groſſe pour s'être formée telle qu'elle étoit dans la Véſicule du Fiel, & en être ſortie enſuite par le canal Colidoque : on peut ſeulement concevoir qu'elle en étoit ſortie beaucoup plus petite, & avoit groſſi dans les Inteſtins.

X.

Dans le Lion, la véſicule du Fiel a pluſieurs plis ou feuillets, & delà M. du Verney a conjecturé que la bile y pouvant ſéjourner plus long-temps, & s'exalter davantage, c'étoit peut-être la cauſe de la grande ardeur de cet Animal, & de la Fievre continuelle qu'on lui attribue.

X I.

M. Littre a vû un Homme en qui un accident avoit rendu le battement de cœur ſi violent & ſi impétueux qu'on l'entendoit quelquefois de plus de dix pas. A l'âge de 16 ou 17 ans, il avoit reçû dans le Sternon un coup qui le lui avoit un peu enfoncé dans la poitrine. Auſſitôt ſa reſpiration devint difficile, & il commença un mois après à ſentir dans la poitrine une douleur qui ne le quitta plus. Enſuite il devint ſujet à des palpitations de cœur, & c'étoit dans leur grande force qu'on entendoit de ſi loin ſon cœur battre. Il mourut ſubitement à 32 ans, mais moins, à ce qu'on put juger, par les ſuites de cet accident, que par l'exceſſive quantité d'Eau de vie & de Ratafia qu'il prenoit tous les jours, & qui étoit preſque ſa ſeule nourriture. M. Littre l'ouvrit. Il trouva les poumons ſecs, flétris, & leur membrane fort épaiſſe, les deux troncs de la Veine Cave, l'Oreillette & le Ventricule droit du cœur, le tronc & les branches de l'Artere Pulmonaire, avant qu'elle entrât dans le poumon, beaucoup plus grands que dans l'état naturel, & leurs parois beaucoup moins épaiſſes, les branches des Veines Pulmonaires, tant au dedans qu'au dehors du poumon, plus petites que les branches de l'Artere pulmonaire hors du poumon, mais proportionnées à ces mêmes branches contenues dans le poumon, leurs parois plus épaiſſes quand leurs cavités étoient plus petites, les parois du Ventricule gauche du Cœur, du tronc & des groſſes branches de l'Aorte, plus épaiſſes qu'à l'ordinaire, & les capacités plus petites. Il eſt aiſé de juger que toute cette conformation extraordinaire venoit de l'enfoncement du Sternon, qui ayant retréci la cavité de la poitrine, & cela préciſément dans un âge, où l'accroiſſement des parties s'avance beaucoup, avoit empêché les poumons de s'étendre autant qu'ils euſſent fait naturellement. Leur membrane & en général tout leur tiſſu s'étoit donc moins dilaté, & peut-être auſſi que tou-

te la nourriture qu'ils prenoient ne servoit qu'à augmenter leur épaisseur. Les poumons ayant moins d'étendue, & étant plus difficiles à pénétrer, le sang de l'Artere pulmonaire y passoit en moindre quantité, & delà s'ensuivent naturellement tous les autres phénomenes.

Le Cœur étoit de figure presque ronde, le milieu en étant fort élevé, & la pointe rapprochée de la base, c'est-à-dire que son dernier mouvement avoit été une contraction imparfaite. Aussi les ventricules étoient-ils entierement pleins de sang.

X I I.

Ce même Homme avoit la substance du Cerveau & du Cervelet molle & fort imbibée d'eau, beaucoup d'eau épaisse & sanguinolente, ou du sang noir & caillé répandus dans tous les Ventricules. Delà venoit qu'il étoit comme hébété, & le plus souvent assoupi. Mais, ce qui paroît avoir été la principale cause de sa mort, son Cervelet étoit déchiré par la partie supérieure, & il y avoit en cet endroit une cavité de 3 pouces de largeur, & de 2 pouces de profondeur, qui s'étendoit jusqu'au dedans du Ventricule du Cervelet. Elle étoit pleine de sang noir & caillé, & il s'étoit écoulé plus de 3 onces de semblable sang sur la base du Crane, ou dans le commencement du canal de l'Epine. M. Littre jugea que de cette déchirure & de cet épanchement, il devoit s'ensuivre une cessation de filtration d'esprits dans les glandes déchirées du Cervelet, une dissipation d'esprits par les fibres nerveuses rompues qui étoient en grand nombre, une compression d'une grande partie du Cervelet par le sang épanché, aussi-bien que de la Moëlle allongée, & du commencement de la Moëlle épiniere, une privation d'esprits dans le Cœur & dans les Poumons, & par conséquent une cessation de mouvement presque subite.

X I I I.

Une Femme âgée de 50 ans, & qui pendant 19 an-

nées de mariage n'avoit point eu d'enfans, fut tuée d'un coup d'arme à Feu. Elle rendoit peu de ſang dans le temps de ſes regles, elle étoit alors fort gonflée, & ſouffroit de grandes douleurs dans le bas ventre, & quelques années après qu'elle eut commencé à être réglée, elle mouchoit ou crachoit du ſang dans ces temps-là. M. Littre l'ayant ouverte, vit la cauſe de tous ces accidens, & de ſa ſtérilité. L'orifice intérieur de la Matrice étoit fermé par la membrane qui tapiſſe intérieurement le Vagin, & cette membrane y étoit auſſi adhérente qu'à la ſuperficie du Vagin. Elle étoit ſeulement percée de deux petits trous d'un quart de ligne de diametre. Le col de la matrice étoit deux fois plus long qu'à l'ordinaire, apparemment parce que le corps de la matrice étoit obligé dans le temps des regles à faire de grands efforts pour chaſſer de ſa cavité par deux ſi petites ouvertures le ſang qu'il contenoit. Auſſi ce ſang, qui y ſéjournoit long-temps, en avoit-il étendu la cavité, & rendu les parois plus minces qu'à l'ordinaire. La cavité des Trompes, principalement vers leur ouverture dans la Matrice, étoit plus grande que de coutume; parce que la lymphe filtrée par les glandes des Trompes, s'amaſſoit là, ne pouvant être reçûe dans la matrice qui preſque toujours étoit pleine de ſang.

Une autre ſingularité de la conſtitution de cette Femme, & qui n'eſt pas tout à fait indigne d'être remarquée, c'eſt qu'un pli à un drap de ſon lit, un ourlet de chemiſe, lui faiſoit venir preſque dans le moment des taches noires ſur la peau. Il falloit que ſon ſang eût une grande diſpoſition à ſe figer.

XIV.

M. du Verney le jeune ouvrant une jeune Femme morte deux mois après être relevée de ſes couches, & dont le mal étoit une extreme douleur dans le ventre, qu'elle avoit fort tendu, quoiqu'il ne fût pas fort élevé, trouva qu'auprès de l'orifice inférieur de l'eſtomac,

qui étoit dilaté à y pouvoir mettre le poing, il y avoit un trou, où l'on paſſoit le pouce. La capacité du ventre étoit remplie de beaucoup de matiere très-corrompue : toutes les parties de cette region étoient enflammées, ou livides. Il ne pouvoit y avoir nul ſoupçon de poiſon, & c'eſt ce qui rend ce trou de l'eſtomac fort extraordinaire.

X V.

Voici encore un fait approchant. Un Homme d'environ 63 ans, après une Colique violente, pour laquelle il prit de l'Emétique, eut une tumeur ſur les Côtes du côté droit. Elle s'étendoit de haut en bas, & comme elle s'augmentoit toujours, & qu'on crut que c'étoit un abſcès on l'ouvrit le long de la derniere Côte des vrayes, & la premiere des fauſſes, & même on penetra entre les deux Côtes. On fut fort ſurpris de voir ſortir parmi du pus & d'autres matieres, des pierres de la figure de Cachets à trois faces, & d'une couleur tirant ſur le Bol. Il en eſt ſorti juſqu'à ſix pendant près de deux mois, il y en a eu quelques-unes de ſi groſſes qu'elles ont eu de la peine à paſſer par l'ouverture, & même celle qui s'eſt preſentée la derniere n'y a jamais pû paſſer, & elle ne s'y eſt plus fait ſentir. Ces pierres ſurnagent ſur l'eau, & elles paroiſſent de la même nature que celles qui ſe forment dans le Foie & dans la véſicule du Fiel.

Comme il ſort toujours des matieres par l'ouverture, on s'eſt déterminé à y tenir une Canule, & à penſer le Malade matin & ſoir. On lui tire toujours une palette, & quelquefois juſqu'à deux d'une matiere telle qu'elle eſt dans l'Eſtomac après la digeſtion, & même on y a vû pluſieurs fois des morceaux de ce qu'il avoit mangé, car il a toujours bon appetit. M. Littre a rapporté cette Hiſtoire ſur la foi d'un témoin oculaire, & on n'en a pas ſçû la ſuite. Il eſt difficile d'imaginer d'où viennent les Pierres. Il faut d'ailleurs que l'Eſtomac, ou peut-être le Duodenum & le Diaphragme ſe ſoient percés natu-

rellement, car il ne paroît pas possible qu'ils l'aient été par l'opération, & cet accident est fort singulier.

XVI.

Un homme fort & robuste, âgé de 60 ans, eut pendant 32 jours une suppression d'urine causée par une grande inflammation du col de la Vessie; ensuite il urina un peu, mais lentement, goute à goute, & continuellement. Cela dura 10 jours, & il mourut. Vers le milieu de sa maladie son ventre avoit commencé à s'enfler beaucoup, & avoit toujours grossi jusqu'à la mort. M. Littre ayant ouvert le cadavre, trouva la Vessie extremement dilatée, & à tel point que par sa partie supérieure elle faisoit une espece de cloison qui séparoit la cavité du ventre en deux, & comprimoit fortement la fin de l'intestin Colon, & le milieu de l'Urétere droit. La membrane intérieure de la Vessie étoit devenue si mince, à force d'avoir été étendue, que l'on y voyoit comme à nu les fibres charnues, ramassées en paquets, gros comme des fers d'aiguillette, & laissant entr'eux des intervalles à peu près quarrés, de 3 à 5 lignes de long. Dans tous ces intervalles la membrane intérieure étoit inséparablement collée à l'extérieure.

Il est plus que vraisemblable que l'inflammation du col de la Vessie avoit été la premiere cause de tout le desordre. Elle avoit gonflé, & par conséquent rapproché les parois de ce col, & fermé le passage à l'urine, qui s'amassant toujours dans la vessie, l'avoit extraordinairement dilatée. Les fibres charnues renfermées entre les deux membranes & dans la substance de la Vessie, & qui en se contractant chassent l'urine hors de ce réservoir, perdirent leur ressort par leur excessive dilatation. La grande quantité de l'urine amassée força enfin la résistance du col de la Vessie : mais comme l'urine ne couloit alors que par l'impulsion de son propre poids, & non par celle des fibres charnues contractées, elle couloit lentement, goute à goute ; ce qui fait bien voir que

c'eſt la contraction de ces fibres qui chaſſe l'urine avec force, & la fait ſortir à plein canal. Quant à la conti-nuité de l'écoulement, elle venoit de ce que le ſphincter du col de la Veſſie avoit perdu ſon reſſort par l'extenſion que lui avoit cauſée l'inflammation ; de ſorte qu'ayant été une fois forcé, il ne pouvoit plus, après que l'inflammation eut ceſſé, ſe remettre, ni refermer le paſſage.

La compreſſion que faiſoit la Veſſie dilatée ſur le Colon, & ſur l'Uretere droit, avoit été cauſe que toute l'étendue de ces conduits qui étoit au-deſſus de l'endroit comprimé, s'étoit extremement dilatée.

XVII.

Un homme de 26 ans étant mort après avoir eu durant 3 ſemaines une douleur continuelle d'eſtomac, des maux de cœur frequens & des nauſées, & avoir rendu les derniers jours de ſa vie beaucoup de ſang par haut & par bas, fut ouvert par M. Littre, qui lui trouva dans l'Eſtomac un ulcere rond, de 5 lignes de diametre, & de demi-ligne de profondeur, ſitué à un pouce & demi du Pilore, & 3 chopines de ſang, dont une partie étoit caillée, & l'autre liquide, épanchées dans la cavité de l'Eſtomac, les Inteſtins à moitié remplis de ſang, les Ventricules, les Oreillettes, & les Vaiſſeaux du cœur, auſſi-bien que les autres gros vaiſſeaux du reſte du corps entierement vuides de ſang, & pleins d'air, & peu de ſang dans les vaiſſeaux moyens & dans les petits. Il eſt aſſez clair que l'ulcere de l'Eſtomac a été la cauſe de ce grand épanchement de ſang, auſſi y voyoit-on fort ſenſiblement pluſieurs vaiſſeaux ſanguins ouverts : mais pour la cauſe de l'ulcere, on ſoupçonna que ce pouvoient être des médicamens violens que le Malade avoit pris d'un homme peu expérimenté.

M. Littre dit que dans ceux qui ſont morts d'une perte de ſang, de quelque nature qu'elle ait été, il a toujours trouvé pleins d'air les vaiſſeaux qui étoient vui-

des de ſang. Apparemment par la reſpiration continuelle, le corps ſe penetre & s'imbibe entierement d'air, qui entre dans tous les pores des membranes & des tuniques des vaiſſeaux, où il eſt ſans ceſſe comprimé par le cours rapide du ſang, & d'où il ne ſort que quand ces vaiſſeaux étant vuides, il a la liberté de ſe dilater. Alors il prend une grande extenſion, & les remplit.

XVIII.

Un Homme de 40 ans, ſujet quelque temps avant ſa mort à des coliques & à une douleur dans la région du Foie, mourut après avoir rendu par les ſelles quantité de corps ſemblables à de petites veſſies. Il n'en avoit point rendu les 4. derniers jours qu'il vécut. Ces corps étoient de figure ovale, les plus petits étoient gros comme des noiſettes, & les plus grands comme de petits œufs, remplis les uns & les autres d'une liqueur viſqueuſe, tranſparente, & de couleur approchante de l'eau. Il pendoit à la ſuperficie extérieure de chacun une eſpece de pédicule membraneux, par lequel apparemment ils tenoient à des parties dont ils s'étoient détachés.

M. Littre ouvrit le cadavre, & chercha inutilement dans toutes ſes parties internes la ſource de ces corps véſiculaires. Il trouva bien dans le grand lobe du Foie une cavité large de 4 pouces, pleine de ſemblables corps, dont quelques-uns tenoient encore par leur pédicule à la membrane intérieure de la cavité; mais elle n'avoit nulle ouverture, par où ils euſſent pû ſortir. Il n'étoit reſté aucun corps véſiculaire dans tout le canal des inteſtins, & ils n'avoient rien de particulier ſinon que la partie inférieure du Colon, & la ſupérieure du Rectum étoient dépouillées en pluſieurs endroits de leur membrane intérieure de la largeur de 3 à 5 lignes. Ce fut là la ſeule trace que M. Littre put découvrir de l'origine & de la formation des corps véſiculaires qui étoient ſortis. C'étoient vraiſemblablement les grains glandu-

leux du Rectum & du Colon extremement dilatés, parce que l'humeur destinée à s'y filtrer, ne s'y filtroit plus, & ne faisoit que s'y amasser. Comme il est de l'essence d'une glande d'avoir un conduit excrétoire par où sorte l'humeur filtrée, ces grains glanduleux doivent en avoir un, & c'est là que s'étoit faite l'obstruction. Ce conduit excrétoire gonflé & tendu par l'amas de la liqueur, avoit tiré par son poids les autres vaisseaux du grain glanduleux, les avoit excessivement allongés, & leur avoit enfin donné la figure d'un pédicule. Ce changement de figure les avoit rendus incapables de se nourrir, & avoit causé leur dessechement, après quoi le pédicule s'étoit détaché naturellement de la membrane qui contenoit le grain glanduleux, ou plutôt avoit emporté avec lui la partie de la membrane qui lui répondoit; delà venoit que le Colon & le Rectum en étoient dépouillés en quelques endroits. On peut croire que le passage continuel des matieres dans les Intestins avoit contribué à détacher les pédicules; & que comme cette cause n'avoit point de lieu à l'égard des corps vésiculaires renfermés dans le Foie, il en étoit demeuré quelques-uns attachés à leur membrane, au lieu que tous ceux des Intestins sans exception, l'avoient quittée ou plutôt emportée avec eux, & étoient sortis.

X I X.

M. Littre qui avoit déja montré d'autres fois dans la Dure-Mere des grains glanduleux sensibles, car ils ne le sont pas ordinairement, en a fait voir encore dans celle d'un homme de 60 ans fort sain, mort subitement d'une mort violente. Ils étoient placés principalement près des Sinus, & des autres gros vaisseaux sanguins de cette membrane, situés dans son épaisseur les uns du côté de sa superficie extérieure, & les autres du côté de l'intérieure; de sorte qu'il paroissoit de part & d'autre une petite portion de ces grains avec leur conduit excrétoire, par lequel il sortoit un peu de sérosité lorsqu'on les

les pressoit entre les doigts. L'usage des grains glanduleux placés du côté extérieur de la Dure-Mere, est vraisemblablement d'humecter par la sérosité qu'ils séparent du sang, la superficie intérieure du Crane, & l'extérieure de la Dure-Mere dans le peu d'endroits où elles ne sont pas attachées ensemble, & l'usage des grains glanduleux situés du côté intérieur de la Dure-Mere, est de rendre le même office à la superficie intérieure de cette membrane, & à l'extérieure de la Pie-Mere. Il est clair que si ces deux membranes, ou la Dure-Mere & le Crane se colloient ensemble, faute de quelque sérosité qui coulât entre deux, les mouvemens du Cerveau n'auroient plus la liberté nécessaire.

X X.

M. Antoine, Chirurgien de Méry sur Seine, dont il a été parlé dans l'Hist. de 1703. * a envoyé à M. Méry la relation d'un Polype plus gros qu'à l'ordinaire, qu'il avoit heureusement arraché à une Femme en une seule fois. Une branche du Polype lui remplissoit la narine droite, & s'avançoit quelquefois au dehors, l'extrémité de ce corps étranger descendoit plus bas que la Luette. Il l'arracha par la bouche. Il croit que c'étoit une extension de la membrane glanduleuse qui revêt les Lames du Nez, & par conséquent il attribue la même origine à tous les Polypes pareils. Leurs vaisseaux sanguins, & leurs fibres nerveuses qui ne peuvent être des générations nouvelles, leur tissu fongueux qui marque des glandules étendues au-delà du naturel, des sérosités ou d'autres liqueurs qui s'y filtrent encore, restes des fonctions de ces glandules, sont les principales preuves de M. Antoine. De plus, le Polype dont il s'agit étoit recouvert d'une espece de membrane, qu'il étoit impossible d'en séparer sans intéresser les fibres intérieures; ce qui fait voir que tout le Polype n'étoit formé que d'une même membrane allongée. C'est ainsi qu'à l'endroit des cicatrices, dont les plaies ont été profondes, on ne peut en-

* p. 28.

lever la peau ſans intéreſſer les chairs qui ſont au-deſſous ; parce que ces cicatrices ſont une eſpece de peau qui a été produite, non-ſeulement par les fibres de la peau allongées, mais encore par celles des chairs, & ces chairs qui ont contribué à cette production, ont été d'autant plus profondes que la plaie l'a été. En général on ne peut concevoir qu'il y ait des productions nouvelles ni d'Animaux ni de leurs parties, dès qu'elles ſont organiſées, mais ſeulement des développemens, & des extenſions. Une partie organiſée qui ne s'étend que juſqu'à ſa meſure preſcrite ou ordinaire, demeure véritablement partie; ſi elle va beaucoup au-delà, elle devient Corps étranger, Polype &c.

X X I.

M. Littre a vû dans une Femme de 40 ans qui n'avoit eu qu'un enfant, la Trompe gauche collée par ſon Pavillon à l'Ovaire du même côté, de ſorte qu'elle en embraſſoit une partie; & ſur l'extérieur de cette partie, il a remarqué une cicatrice fort ſenſible, & au-dedans ce Corps ſpongieux, dont nous avons parlé dans l'Hiſt. de 1701. * On l'appelle communément *Caroncule*. Celle-là étoit ronde & groſſe comme un pois. Il n'y avoit dans tout cet Ovaire ni dans le droit aucune autre cicatrice, ni aucune autre Caroncule, marque aſſez apparente que le Fœtus unique étoit ſorti par cet endroit. Deplus, il ne pouvoit abſolument avoir paſſé par la Trompe droite: car vers ſon embouchure dans la Matrice ſes parois étoient collées enſemble, & il n'y avoit à ſon autre extrémité nulle ouverture, ni apparence de Pavillon. Cette diſpoſition avoit été cauſe qu'il s'étoit amaſſé dans la cavité de cette Trompe un demi-ſeptier de la ſéroſité que filtrent les glandes dont elle eſt ſemée. Cette ſéroſité étoit claire, & ſans mauvaiſe odeur. Quand M. Littre l'eut évaporée à petit feu, il reſta au fond du Vaiſſeau une pellicule épaiſſe de demi-ligne, qui ſentoit bon, & avoit un bon goût.

* pag. 44.

XXII.

M. Berger a parlé d'un Malade qu'il avoit vû, âgé de 65 ans, d'une complexion ſaine & robuſte, qui mourut après une maladie dont les principaux ſymptomes avoient été une ſuppreſſion d'urine, mais ſans douleur, & une ſimple peſanteur dans le bas ventre. On l'ouvrit; on lui trouva le Colon extraordinairement dilaté, & quand on perça cet Inteſtin il en ſortit beaucoup de vents avec le même bruit & les mêmes ſifflemens que d'un balon bien enflé. On trouva auſſi à la Veſſie deux appendices qui en ſortoient en forme de ſacs, & qui étoient remplies d'urine. Toute la merveille conſiſte en ce que ces dilatations extraordinaires & du Colon & de la Veſſie étoient ſans douleur. Il falloit abſolument que ces deux Viſceres fuſſent devenus paralytiques. M. Berger rapporte cette paralyſie à ce que le Malade buvoit beaucoup de vin & d'eau de vie, & mangeoit peu. Les ſels acres de ces liqueurs pouvoient avoir corrodé les fibres nerveuſes de ces Viſceres, avoir affoibli peu à peu, & enfin abſolument détruit leur reſſort, ce qui les avoit rendues incapables en même tems & de réſiſter à une grande extenſion, ou de ſe remettre après l'avoir ſoufferte, & de recevoir les eſprits qui font le ſentiment. La maniere dont ces deux effets ſont produits enſemble, demanderoit un grand détail de Méchanique, où M. Berger entra, mais c'eſt un Siſteme aſſez important, & aſſez difficile pour meriter d'être traité à part.

MOnſieur Homberg a donné une Obſervation ſur un Battement de Veines ſemblable à celui des arteres. V. les M. p. 159.

V. les M. p. 6.

MOnſieur du Verney le jeune a donné ſur une Hydropiſie de Cerveau, une Obſervation rapportée dans les Mémoires, & qui fait part d'une eſpece de corps d'Obſervations qu'il a faites ſur l'Hydropiſie en général.

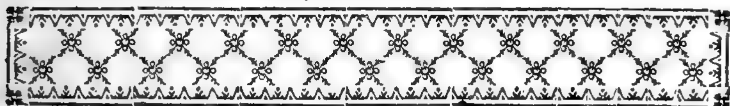
V. les M. p. 48.

MOnſieur Tournefort lut à l'Académie une ample & exacte Deſcription du Caſtor, qui lui avoit été envoyée de Quebec par M. Sarraſin ſon Correſpondant, Medecin du Roi en Canada.

CEtte année M. Lémery le fils imprima une *Diſſertation ſur la nourriture des Os* qu'il avoit lûe à l'Académie. Il y prouve que ce n'eſt point la Moëlle qui nourrit les Os, mais un Suc tout différent, verſé dans leur ſubſtance par les arteres : car les Os malgré leur ſolidité ont des arteres & des veines auſſi-bien que les chairs, & M. Méry a fait voir un Os fort dur traverſé en long dans toute ſon épaiſſeur par un gros vaiſſeau ſanguin. Sur la Moëlle & ſur les vaiſſeaux ſanguins des Os, inviſibles ordinairement à un certain âge, M Lémery tombe dans les mêmes penſées que l'on a rapportées dans l'Hiſt. de 1700. * Il confirme par une expérience qu'il a faite, la différence de la Moëlle & du Suc nourricier des Os. Il a fait bouillir dans de l'eau aſſez longtemps des Os concaſſés avec leur moëlle, & enſuite il a vû que l'eau contenoit deux ſortes de ſubſtances, l'une huileuſe, qui ſurnageoit, & qui ſe figeoit quand le bouillon étoit refroidi, l'autre ſemblable par ſon goût & par ſa conſiſtance à de la gelée de viande, & qui devenoit plus épaiſſe quand on la faiſoit bouillir de nouveau, &

* p. 14.

qu'on la laissoit ensuite refroidir. Il est plus que vraisemblable que la premiere substance étoit la Moëlle, & la seconde le Suc nourricier. La Moëlle destinée à entretenir la souplesse de l'Os, & à l'empêcher de devenir trop cassant, est une Huile fort fine que la chaleur du corps tient toujours assez liquide pour s'insinuer entre les fibres serrées de l'Os. Le suc nourricier qui doit se changer en la substance même de l'Os est une gelée, ainsi que tout autre suc nourricier, & une gelée qui s'épaissit toujours à la chaleur, & par conséquent peut enfin acquerir la solidité de l'Os. On ne tire la substance huileuse que des Os qui ont de la Moëlle, & de tous on en tire la gelée, ce qui appuie fort encore le sentiment de M. Lémery. Il remarque aussi que les seuls Os qui aient de la Moëlle sont ceux qui sont de grands mouvemens, & qui par-là pourroient se dessécher trop, de même que les parties où la nature a attaché le plus de graisse sont ordinairement celles où les Muscles aiant plus d'action ont plus de besoin d'être humectés & rafraichis. Delà vient encore qu'il y a beaucoup moins de moëlle à proportion dans les jeunes Os, qui sont par eux-mêmes assez tendres.



CHYMIE.

SUR LA RECOMPOSITION DU SOUFRE.

On n'est jamais si sûr d'avoir décomposé un Mixte en ses véritables principes, que quand avec les mêmes principes on le peut recomposer. Ce rétablissement n'est pas toujours possible, & quand il ne l'est pas, V. les M. p. 278.

il ne conclut pas néceſſairement contre l'analyſe du Mixte, mais il la démontre quand il réuſſit. C'eſt une eſpece de bonheur dont il faut jouir quand il ſe préſente.

On a vû dans l'Hiſt. de 1703.* l'analyſe que M. Homberg a faite du Soufre commun. M. Geoffroy a voulu voir s'il la vérifieroit par la récompoſition de ce corps, & le ſuccès a été pleinement favorable.

* p. 47. & ſuiv.

Il a pris de l'Eſprit de Soufre bien déflegmé, c'eſt-à-dire, le Sel acide du ſoufre auſſi pur qu'on le puiſſe avoir, une partie égale de cette Gomme que M. Homberg tire du ſoufre, & qui en eſt la partie inflammable & graſſe; & pour ſuppléer au troiſiéme principe qui eſt une terre, ou un alcali terreux, il a joint une partie d'huile de Tartre; l'opération ayant été conduite ſelon les regles de l'art, il a tiré de ce mélange du ſoufre brûlant tout pur.

Il a fait plus, il a compoſé du ſoufre, non en le récompoſant avec les mêmes matieres qui en étoient ſorties, mais en employant d'autres matieres qu'il a jugées devoir être de la même nature. Ainſi en ſubſtituant au Sel acide du ſoufre, l'Huile de Vitriol, & à la partie graſſe & inflammable, l'Huile de Térébenthine, il a réuſſi de la même maniere.

Les Sels Fixes, qui ſont des Acides abſorbés & retenus par une terre, tenant lieu de deux principes du Soufre à la fois, n'ont eu beſoin que d'être mêlés avec une Huile inflammable, & ils ont auſſi-tôt donné du ſoufre; & même au lieu de cette Huile, M. Geoffroy a employé auſſi heureuſement des matieres ſolides inflammables, comme le bois, le charbon de bois, le charbon de terre. L'effet a été le même, parce que ces matieres ne brûlent que par une huile qu'elles renferment.

Il faut remarquer que tous les Sels acides enveloppés dans une terre, ne ſe ſont pas trouvés propres à faire du ſoufre. M. Geoffroy excepte le Sel marin décrepité, & le Nitre Fixé. Peut-être leur acide eſt-il différent

de celui du Soufre ou du Vitriol, ou de l'Alun, qui ne ſont que le même. L'acide qui entre dans le ſoufre, devra donc être d'une nature particuliere, & on peut l'appeller *vitriolique.*

Boyle & Glauber, deux grands Chymiſtes, ont fait tous deux du ſoufre commun, & par des mélanges tels que M. Geoffroy les preſcrit. Mais ils ſe ſont trompés tous deux dans les conſéquences qu'ils ont tirées. Ils ont crû, l'un que le ſoufre qui lui venoit, avoit été renfermé dans un ſel Fixe; l'autre, dans du charbon: & ils n'ont pas ſçû que c'étoit le mélange ſeul de trois principes, qui produiſoit ce Mixte. L'erreur de ces grands hommes releve le merite de la découverte de M. Homberg.

Si celle que M. Geoffroy a faite en travaillant ſur le ſoufre, ſe vérifie dans la ſuite, elle ſera plus importante que tout ce qui avoit été le principal objet de ſon travail. Il croit avoir reconnu que le fer n'eſt, auſſi bien que le Soufre commun, qu'un compoſé du ſoufre principe, ou d'une matiere inflammable, d'un Sel vitriolique, & d'une terre. La rouille du fer, c'eſt-à-dire une diſſolution qui ſe fait de quelques-unes de ſes parties par l'humidité de l'air, prouve aſſez que ces parties-là ſont ſalines, & leur goût, qu'elles ſont vitrioliques; & la facilité avec laquelle le fer s'enflame, fait voir combien il eſt ſulfureux. Mais à ces indices manifeſtes M. Geoffroy joint des preuves plus philoſophiques: il a fait du fer par le mélange des trois principes rapportés, du moins c'eſt une poudre noire, peſante, & qui s'attache à l'Aiman, caractere ſpécique du fer.

Si la compoſition de ce métal étoit une fois bien ſûrement développée, apparemment ce ſeroit un degré pour paſſer à celle des autres Métaux. La Chymie ne ſe peut rien propoſer de plus grand ni de plus difficile que de les connoître juſque dans leurs principes; & peut-être après cela ce fameux objet de tant de recherches inutiles, ceſſeroit-il dre chi'êtmérique.

OBSERVATION
CHYMIQUE.

MOnſieur Homberg a fait voir une eſpece de petit arbriſſeau d'argent, haut de près de 2 pouces, élevé ſur une plaque d'argent de la grandeur d'une piece de trente ſols, & un peu plus peſante, dont la ſuperficie qui portoit l'arbriſſeau étoit extrémement polie, l'oppoſée étant grenue & raboteuſe. Le fait eſt que M. Homberg avoit mis à la Coupelle environ deux Onces d'argent pour le purifier par trois fois autant de plomb. La Coupelle étant faite & l'argent congelé dans le feu, il s'éleva de deſſus ſa ſuperficie comme un petit jet d'argent liquide, qui forma l'arbriſſeau. Apparemment la matiere qui étoit ſous cette petite voute, & qui bouillonnoit encore, n'ayant pas eu la liberté de s'étendre, avoit percé la voute par l'endroit le plus foible, ou du moins à l'endroit qui répondoit à la plus grande chaleur du feu, & avoit fait le jet qui s'étoit enſuite congelé à l'air.

MOnſieur Lémery a continué ſon grand Traité de l'Antimoine.



BOTANIQUE.

BOTANIQUE.

OBSERVATION BOTANIQUE.

MOnsieur Lémery a dit qu'un de ses amis, curieux du jardinage, ayant enté sur un Coignassier une branche de Prunier, plia la greffe en arc, & en fit entrer la pointe dans un autre endroit du Coignassier, après quoi il fit avec de la terre glaise ce qu'on appelle des *Poupées* aux deux bouts de cette greffe. Elle prit par les deux bouts, & jetta des branches garnies de feuilles, qui produisirent dans leur temps des Prunes de l'espece de celles que portoit le Prunier, & d'un goût fort approchant. Mais celles qui étoient sorties de la pointe de la greffe, n'avoient pour tuyau qu'un pepin gros comme celui du raisin, & fort dur, au lieu que les Prunes sorties du bout d'embas avoient un noyau à l'ordinaire.

MOnsieur Tournefort a donné la Description de l'*Alhagi*, Plante d'Arménie & de Perse, d'où l'on tire une espece de Manne purgative, & du *Chamærhododendros* de Levant. V. les M. p. 345.

M. Marchand a lu la Description de la *Linaria hederæ Foliis Col.* ou *Cymbalaria C. B.* réservée pour un ouvrage particulier.

M. Chomel a lu aussi la Description de la *Moschatellina Foliis Fumariæ bulbosæ J. B.*

LE P. Gouye a communiqué à l'Académie, des descriptions de quelques Plantes d'Amérique, envoyées par le P. Breton, Missionnaire Jesuite. Ces Plantes sont le Thé, le Sapotile, Liane, Cuébé, Mabouya pommier, & le Mahot à coton.



ARITHMETIQUE.

SUR UNE PROPRIETÉ GÉNÉRALE DE TOUTES LES PUISSANCES.

MOnsieur Carré parla un jour par occasion d'une propriété du nombre *6*. Les nombres Cubiques naturels, 8, 27, *64*, 125, dont la racine est moindre que *6*, étant divisés par *6*, le résidu des divisions est leur racine même. Ainsi 8 étant divisé par *6*, 2 résidu de la division est la racine cubique de 8. 3 résidu de la division de 27 par *6*, est la racine cubique de 27 &c.

Si l'on pousse plus loin la Suite des Cubes naturels, 21*6* cube de *6* étant divisé par 6 ne laisse aucun reste, & le diviseur *6* est lui même la racine cubique : mais 343 cube de 7 divisé par *6*, laisse pour résidu 1, qui joint à *6*, fait cette racine cubique de 343; 512 cube de 8 divisé par *6* laisse 2, qui, joint à *6*, fait 8 racine cubique de 512, & ainsi de suite; de sorte que le résidu des divisions des cubes au dessus de 21*6* divisés par *6*, étant joint à *6*, donne toujours la racine du cube qu'on a di-

visé, jusqu'à ce que ce reste soit 5, & par conséquent 11 la racine cubique du nombre divisé, après quoi le Cube supérieur étant divisé par 6 il ne reste rien, parce que la racine cubique est 12, multiple de 6; & ensuite si l'on continue de diviser par 6 les Cubes supérieurs, il ne faut plus ajouter le résidu des divisions à 6, mais à 12 premier multiple de 6, & immédiatement après qu'on aura passé le Cube de 18, où l'on trouvera encore une division sans reste, il ne faudra plus ajouter le résidu des divisions à 6, ni à 12, mais à 18 second multiple de 6, & toujours ainsi de suite, prenant toujours de six cubes en six cubes après une division sans reste un multiple supérieur de 6, auquel on ajoutera le résidu de la division faite par 6.

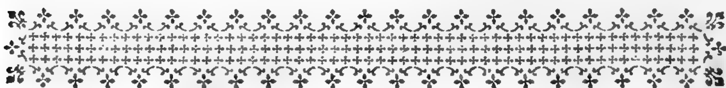
Il arrive presque toujours que les propriétés qui paroissent particulieres à quelques grandeurs, soit nombres, soit lignes, sont générales & communes à une infinité d'autres grandeurs, conditionnées de la même maniere : mais on n'apperçoit pas toujours ce qui fait que ces autres grandeurs sont de la même condition, & du même ordre, & delà vient que des propriétés générales passent pour n'être que particulieres à certaines grandeurs, en qui elles se manifestent plus sensiblement. M. de la Hire en examinant la propriété du nombre 6, par rapport aux nombres cubiques, trouva que tous les autres nombres élevés à quelque puissance que ce fût, avoient leur diviseur qui faisoit par rapport à eux le même effet, que 6 par rapport aux nombres cubiques.

Telle est la regle générale qu'il a découverte. Si l'exposant de la puissance d'un nombre est pair, c'est-à-dire, si ce nombre est élevé à la 2de, 4e, 6e puissance, &c, il faut le diviser par 2, & le résidu de la division, en cas qu'il y en ait un, ajouté à 2 ou à un multiple de 2, donnera la racine de ce nombre correspondante à sa puissance, c'est-à-dire, la racine 2de, ou 4e ou 6e &c. mais si l'exposant de la puissance du nombre est impair; c'est-à-dire, si le nombre est élevé à la 3e, 5e, 7^e^

puiſſance &c. le double de cet expoſant ſera le Diviſeur qui aura la propriété dont il s'agit. C'eſt par là qu'elle ſe trouve dans 6, double de 3 qui eſt l'expoſant de la puiſſance de tous les Cubes. De même 10 eſt le Diviſeur de tous le nombres élevés à la 5e puiſſance, 14 de tous ceux qui ſont élevés à la 7e &c.

Quand on aura bien conçu quel eſt, à l'égard des nombres cubiques, l'effet du nombre 6, dans quels cas les diviſions ſont ſans reſte, & ſelon quel ordre il faut ajouter aux réſidus les différens multiples de 6 au lieu de 6, il ſera très-facile d'appliquer de même le nombre 2 à toutes les puiſſances paires, & les nombres 10, 14, 18, &c. aux différentes puiſſances impaires.

La démonſtration de la Regle générale de M. de la Hire dépend de la formation des puiſſances, & de quelques conſidérations ſur la nature des Nombres. Les propriétés des Nombres ſont un champ infini, ouvert à la curioſité, & aux recherches de l'Eſprit humain.



GÉOMÉTRIE.

SUR LA RECTIFICATION DES COURBES.

V. les M. p. 66. * p. 83.

ON a déja vû dans l'Hiſt. de 1701. * que M. Carré avoit donné des Méthodes générales pour la Rectification des Courbes. Il la conſidéroit alors en elle-même, & ſans aucun rapport étranger: mais parce qu'il arrive quelquefois que la rectification d'une Courbe dépend de la quadrature d'une autre, il conſidere maintenant les rectifications comme liées aux quadratures.

Que l'on prenne pour les deux premiers termes d'une proportion la Soutangente de tel point qu'on voudra d'une Courbe quelconque, & ſa Tangente, & pour troiſieme terme une ligne droite conſtante quelconque, il eſt viſible que comme la Soutangente & la Tangente varieront toujours entr'elles, le quatrieme terme de la proportion variera toujours auſſi, & variera dépendamment de la variation de la Soutangente & de la Tangente, & par conſéquent on en pourra former continuellement les Appliquées d'une ſeconde Courbe. Or cette ſeconde Courbe étant ainſi formée, M. Carré démontre que l'eſpace qu'elle comprendra, ſera égal à un parallélogramme fait de la droite conſtante employée pour troiſieme terme de la proportion, & d'une autre droite égale à la premiere Courbe; c'eſt-à-dire, que la rectification de cette premiere & la quadrature de la ſeconde ne feront qu'un même Probleme, & ne demanderont que la même ſolution.

Si ſur la Parabole on conſtruit de cette maniere une ſeconde Courbe, on voit naître auſſi-tôt l'Hyperbole, & par conſéquent la rectification de la Parabole tombe dans la même impoſſibilité que la quadrature de l'Hyperbole.

Si la premiere Courbe eſt la ſeconde Parabole cubique, il s'en forme la Parabole ordinaire, qui étant quarrable donne une ligne droite égale à la ſeconde parabole cubique. C'eſt une curioſité agréable en Géométrie, & même un progrès dans cette Science que de découvrir la ſource de la dépendance mutuelle où ſont les uns à l'égard des autres les Problemes des quadratures & des rectifications. On fait donc non-ſeulement que toute Courbe rectifiable repond à quelque Courbe quarrable, & toute Courbe non rectifiable à quelque autre non quarrable, & réciproquement, mais encore de quelle maniere il faut trouver l'une par l'autre.

Sur les Lieux qui se forment par le concours des Tangentes de la Cycloïde, & des Sections Coniques.

V. les M. p. 209.

SUr une Courbe une fois formée, on en peut toujours conſtruire d'autres, & il n'y a qu'à imaginer les conditions que l'on preſcrira à cette nouvelle conſtruction. Ainſi étant donnée une Cycloïde ordinaire, dont la baſe eſt égale à la circonférence du cercle générateur, les Tangentes que l'on tirera à deux de ſes points quelconques prolongées juſqu'à ce qu'elles concourent, feront toujours un angle droit, pourvû qu'elles ſoient conditionnées d'une certaine maniere que M. de la Hire preſcrit. Tous les points que déterminent par leur concours hors de la Cycloïde toutes ces Tangentes ainſi priſes deux à deux, font une ſuite qui n'étant pas en ligne droite, compoſe une nouvelle Courbe, ou un *Lieu* : car on appelle Lieu en Géométrie toute ligne ou tout eſpace qui ſe détermine par la variation de quelques grandeurs, toujours réglée de la même maniere, & aſſujettie à une certaine Loi.

En cherchant quelle eſt la nouvelle Courbe produite par la Cycloïde, M. de la Hire trouve que c'eſt une autre Cycloïde, mais *accourcie*, c'eſt-à-dire, dont la baſe eſt plus petite que la circonférence de ſon cercle générateur.

Mais ſi les angles, par leſquels ſe forme la ſeconde Courbe, au lieu d'être droits comme on les a ſuppoſés, étoient aigus ou obtus, & tous égaux entr'eux, comme ce ſeroit une autre génération, ce ſeroit auſſi une autre recherche. En ce cas-là, M. de la Hire démontre que la ſeconde Courbe ſeroit encore une Cycloïde accourcie. Il fait enſuite un grand nombre de remarques ſur les contours, les poſitions, enfin ſur les différentes

particularités des ces nouvelles Cycloïdes.

Il étend après cela toute cette Théorie aux Sections Coniques, & examine les Lieux qui naissent du concours de leurs Tangentes, sous quelques angles qu'elles se rencontrent, pourvû seulement qu'ils soient égaux. Toutes les nouvelles Courbes qui naissent, ne sont que des Sections coniques : mais tout le détail qui n'est que de pure Géométrie doit être renvoyé au Mémoire de l'Auteur.

SUR LES SPIRALES
A L'INFINI.

SI l'on vouloit faire un parallele des Géometres Anciens & Modernes, & comparer leur différent mérite, les Spirales dont nous allons parler, en fourniroient peut-être une occasion plus heureuse qu'aucune autre matiere. V. les M. p. 69.

Archimede a fait un Traité des Spirales, & tout le monde connoît leur génération. On suppose le rayon d'un cercle divisé en autant de parties que sa circonférence, par exemple en 360. Le rayon se meut sur la circonférence, & la parcourt toute entiere. Pendant ce même temps, un point qui part du centre du cercle, se meut sur le rayon, & le parcourt tout entier, de sorte que les parties qu'il parcourt à chaque instant sur le rayon, sont proportionelles à celles que le rayon parcourt dans le même instant sur la circonférence; c'est-à-dire, que tandis que le rayon parcourt, par exemple, un degré de la circonférence, le point qui se meut sur le rayon, en parcourt la 360e partie. Il est évident que le mouvement de ce point est composé, & si l'on suppose qu'il laisse une trace, ce sera une Courbe qu'Archimede a nommée *Spirale*, dont le *Centre* est le même que celui du Cercle, & dont les Ordonnées ou *Rayons* sont

les différentes longueurs du rayon du cercle, prises depuis le centre, à l'extrémité desquelles le point mobile s'est trouvé à chaque instant. Par conséquent les Ordonnées de cette Courbe concourent toutes en un point, & elles sont entr'elles comme les parties de la circonférence du cercle correspondantes, qui ont été parcourues par le rayon, & qu'on peut appeller *arcs de révolution.*

Quand le rayon du cercle a parcouru toute la circonférence, & que par conséquent le point mobile est arrivé à l'extrémité du rayon, on peut concevoir que ce rayon soit prolongé hors du cercle d'une quantité égale à celle dont il étoit, & qu'il commence une seconde révolution dans les mêmes conditions que la premiere, & de même à l'infini. Voilà donc la Spirale infiniment prolongée. Le cercle de la premiere révolution est toujours le même, mais dans la seconde révolution les arcs auxquels les Ordonnées de la Spirale doivent être proportionnelles, sont la circonférence du cercle de la premiere révolution, plus l'arc décrit de nouveau dans la seconde, & toujours ainsi de suite. Si l'on conçoit à la fin de chaque révolution un nouveau cercle décrit, concentrique au premier, on les appelle *Cercles circonscrits*, chacun à sa révolution.

Archimede, inventeur de la Spirale, est aussi le premier qui l'a examinée. Il en a trouvé les Tangentes, ou, ce qui revient au même, les Soutangentes, & ensuite les Espaces. Il démontre qu'à la fin de la premiere révolution, la Soutangente de la Spirale est égale à la circonférence du cercle circonscrit, qui est alors le même que celui sur lequel on a pris les arcs de révolution; qu'à la fin de la seconde révolution la Soutangente est double de la circonférence du cercle circonscrit, triple à la fin de la troisieme révolution, & toujours ainsi de suite. Quant aux Espaces, qui sont toujours compris entre le rayon qui termine une révolution, & l'arc spiral qui s'y termine aussi, pris depuis le centre, Archimede

chimede a prouvé que l'eſpace ſpiral de la premiere révolution eſt à l'eſpace de ſon cercle circonſcrit, comme 1 à 3; que l'eſpace de la ſeconde révolution eſt au cercle circonſcrit comme 7 à 12; celui de la troiſieme, comme 19 à 27, &c. Ce ſont là les deux plus conſidérables découvertes du Traité d'Archimede.

Nous avons ſes propres démonſtrations. Elles ſont ſi longues, & ſi difficiles à embraſſer, que, comme on l'a pû voir dans la Préface de l'Analyſe des Infiniment petits, M. Bouillaud a avoué qu'il ne les avoit jamais bien entendues, & que Viete les a injuſtement ſoupçonnées de paralogiſme, parce qu'il n'avoit pû non plus parvenir à les bien entendre. Mais toutes les preuves qu'on peut donner de leur difficulté & de leur obſcurité tournent à la gloire d'Archimede: car quelle vigueur d'eſprit, quelle quantité de vûes différentes, quelle opiniâtreté de travail n'a-t-il pas fallu pour lier & pour diſpoſer un raiſonnement que quelques-uns de nos plus grands Géometres ne peuvent ſuivre, tout lié & tout diſpoſé qu'il eſt?

L'eſprit de la Géométrie moderne eſt d'élever toujours les verités ſoit anciennes, ſoit nouvelles, à la plus grande univerſalité qu'il ſe puiſſe. Dans la Spirale d'Archimede, les Ordonnées ou rayons ſont comme les arcs de révolution; M. de Fermat rendit la génération de cette Courbe plus univerſelle, en ſuppoſant que les rayons y fuſſent comme telle puiſſance qu'on voudroit de ces arcs, c'eſt-à-dire, comme leurs quarrés, leurs cubes, &c. ou même leurs racines quarrées, cubiques, &c. Car les Géometres ſçavent que les racines ſont des puiſſances miſes en fraction.

La nature de la Parabole en général conſiſte en ce que ſes Abſciſſes ſont comme quelque puiſſance des Ordonnées, & c'eſt l'infinité de ces puiſſances poſſibles qui fait le nombre infini des différentes eſpeces de Paraboles. Sur cela, M. Varignon fit réflexion que prendre une puiſſance quelconque des arcs circulaires, à la maniere de M. de

Fermat, ou les prendre comme les Ordonnées de quelque Parabole, c'étoit donc la même chose. Mais pourquoi ne les prendre que comme les Ordonnées de quelque Parabole? Pourquoi ne suivroient-ils pas la raison des Ordonnées de toute autre Courbe? Voilà donc la génération de la Spirale devenue plus universelle qu'elle ne l'étoit, selon M. de Fermat, puisque ces arcs de révolution peuvent suivre telle raison qu'on voudra. D'un autre côté, rien n'assujettit les rayons de la Spirale à se régler sur les arcs de révolution, ni sur aucune de leurs puissances, & par consequent la génération de la Spirale n'est plus renfermée dans aucunes bornes, puisque cette Courbe se peut former de telle raison qu'on voudra imaginer entre ses rayons, & de telle autre qu'on supposera entre ses arcs de révolution.

En concevant la formation de toute Spirale en général, ainsi que nous avons conçu celle de la Spirale d'Archimede, c'est-à-dire, en concevant une ligne qui parcourt une circonférence de cercle, & un point mobile sur cette ligne, il est bien clair que le mouvement de la ligne & celui du point sont absolument indépendans l'un de l'autre, & peuvent suivre chacun en particulier, telle progression qu'on voudra. De-là vient l'universalité infinie de la génération de la Spirale; car c'est le mouvement de la ligne qui détermine les arcs de révolution, & celui du point qui détermine les rayons.

Quelques différentes raisons ou progressions qu'on établisse pour les deux mouvemens, on peut toujours imaginer une Courbe dont les Abscisses représenteront l'une, & les Ordonnées l'autre, & par conséquent il n'y a nulle Courbe qui ne puisse servir à former une Spirale, & qui, pour ainsi dire, n'ait sa Spirale particuliere. Les Abscisses de la Courbe génératrice sont les rayons de la Spirale, & les Ordonnées déterminent les arcs de révolution.

Afin que les Abscisses de la Courbe génératrice soient les rayons de sa Spirale, ou, ce qui est la même chose,

ſoient égales à ces rayons, il faut que, comme la Spirale a ſon origine au centre du cercle de révolution, la Courbe génératrice y ait auſſi la ſienne. Mais parce que cette poſition de la Courbe génératrice à l'égard du cercle de révolution n'eſt nullement néceſſaire, quoique la plus naturelle & la plus ſimple, & qu'on en peut ſuppoſer telle autre qu'on voudra, M. Varignon laiſſe cette poſition indifférente & indéterminée, ce qui donne encore une plus grande généralité à la formation des Spirales : car non ſeulement il peut y en avoir autant de différentes que de Courbes; mais encore autant que l'origine de chaque Courbe peut avoir de poſitions différentes par rapport au centre du cercle de révolution. Ainſi, ce qui auroit pû paroître un Paradoxe, il y a plus de genres de Spirales poſſibles, que d'autres Courbes, quoique les Spirales ne ſoient qu'une eſpece de Courbes.

Quand l'origine de la Courbe génératrice n'eſt pas au centre du cercle de révolution, ſes Abſciſſes ne laiſſent pas de régler toujours les rayons de la Spirale. Seulement il faut ajouter à ces Abſciſſes ou en retrancher une certaine quantité, qui eſt déterminée par l'éloignement de l'origine de la Courbe à l'égard du centre du cercle de révolution.

La poſition de la Courbe génératrice demeurant donc indéterminée, & par conſequent auſſi le rapport de ſes Abſciſſes aux rayons de ſa Spirale, il ne reſte rien de conſtant que le rapport de ſes Ordonnées aux arcs de révolution, qu'elles déterminent toujours : auſſi eſt-ce uniquement ſur ce rapport que M. Varignon fonde une Equation générale pour toutes les Spirales poſſibles à l'infini. Il ne faut, pour amener cette Equation à quelque choſe de particulier, qu'y faire entrer l'expreſſion des Ordonnées de quelque Courbe particuliere. Et comme l'expreſſion des Ordonnées d'une Courbe enferme néceſſairement ſes Abſciſſes, on trouvera par-là quels ſeront les rayons de la Spirale, ſelon la poſition qu'on aura donnée à la Courbe génératrice.

Par exemple, si la génératrice est une Parabole en général, dont les Ordonnées montent à telle puissance ou tel degré qu'on voudra, & si l'on suppose que son sommet soit au centre du cercle de révolution, on voit aussitôt la Spirale générale qui devient particuliere, ou plutôt moins générale, puisqu'elle comprend encore une infinité d'especes, dont chacune répond à chaque espece de Parabole. M. Varignon trouve les Soutangentes de cette Spirale Parabolique générale, le rapport de ces Soutangentes, soit au cercle de révolution, soit à leur cercle circonscrit, lorsqu'elles terminent une révolution, ou, lorsqu'elles sont dans le cours d'une révolution, leur rapport à la portion de cercle correspondante ; tous les espaces spiraux, soit tout ce qu'il y en a de compris dans tel nombre de révolutions qu'on voudra, soit l'espace seul de quelque révolution complete, soit seulement quelque partie de cette espace ; enfin les *déroulemens* de ces Spirales, c'est-à-dire, les Courbes qui naîtroient, si les rayons ou Ordonnées qui concourent toutes en un point étoient toutes posées sur un axe parallelement entr'elles, selon l'ordre qu'elles avoient, & en conservant la même grandeur.

Tout l'artifice de cette Spirale Parabolique générale ne consiste qu'en ce que le degré de la Parabole génératrice a été laissé indéterminé ; & lorsqu'on le détermine, il vient enfin une Spirale particuliere, &, pour ainsi dire, individuelle, & qui ne peut descendre davantage. Les Géometres conviennent que le Triangle peut passer pour la premiere espece de Parabole, dans laquelle les Ordonnées sont en même raison que les Abscisses ; d'ailleurs dans la Spirale d'Archimede, les arcs de révolution sont comme les rayons, & par consequent elle peut être produite par le Triangle ou par la Parabole du premier degré. Aussi quand on détermine le degré général de la Parabole à n'être que l'unité, toutes les propriétés qu'Archimede a découvertes dans sa Spirale s'offrent aussitôt, & accompagnées de plusieurs autres qu'il n'a pas vûes.

C'eſt là le grand avantage des Géometres modernes ſur les Anciens. Un nombre de vérités infiniment plus grand nous coûte infiniment moins, non que nous ayons un génie ſupérieur, mais parce que nous avons d'excellentes méthodes. La gloire des Anciens eſt d'avoir pû faire ſans le ſecours de notre art, le peu qu'ils ont fait; & la gloire des Modernes eſt d'avoir trouvé un art ſi merveilleux. Les Anciens reſſemblent aux Habitans du Mexique & du Perou, qui n'ayant ni Grues ni inſtrumens pareils, & ne ſachant point échafauder, ne laiſſoient pas d'élever des bâtimens à force de bras; & les Modernes ſont les Européens, qui bâtiſſent incomparablement mieux, mais avec des Machines.

On voit d'un ſeul coup d'œil par la Formule générale de M. Varignon, que dans la Spirale d'Archimede engendrée par la Parabole du premier degré ou par le Triangle, les Soutangentes qui terminent chaque révolution, ſont entr'elles comme la ſuite des quarrés naturels 1, 4, 9, &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du ſecond degré, qui eſt la Parabole ordinaire, ces mêmes Soutangentes ſont entr'elles comme les racines quarrées des Cubes des nombres naturels, c'eſt-à-dire, comme les racines quarrées de 1, de 8, de 27, de 64, &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du troiſieme degré, ou cubique, elles ſont comme les racines cubiques des quatriemes puiſſances des nombres naturels; & enfin l'on trouve toujours avec la même facilité la progreſſion qui regne entre ces Soutagentes dans quelque Spirale Parabolique que ce ſoit, ce qui fourniroit encore de nouveaux Theoremes fort univerſels, ſi l'on vouloit comparer ces différentes progreſſions en différentes Spirales. Rien ne plaît davantage à l'Eſprit en fait de Géométrie, que de voir naître d'une même grandeur différemment conditionnée, ces différens ordres infinis de progreſſions, également invariables dans toutes leurs parties, & qui ne ſe démentent jamais.

Les Soutangentes comprifes dans le cours de quelque révolution fe tirent de la Formule générale avec la même facilité que celles qui terminent une révolution quelconque, feulement elles ne font pas exprimées par les nombres de ces progreffions que nous venons de marquer, mais par des nombres moyens. Les Soutagentes trouvées, rien n'eft plus facile que de déterminer en général leur rapport aux circonférences de leurs cercles circonfcrits, ou à celle du feul cercle de révolution.

Il en va de même des efpaces de toutes les Spirales paraboliques, comparés à leurs cercles circonfcrits, foit qu'on les prenne par révolutions completes ou incompletes. M. Varignon les donne tous à la fois, & ce qu'on a rapporté ci-deffus des efpaces de la Spirale d'Archimede, eft prefque étouffé & anéanti dans cette multitude.

La Théorie des déroulemens n'eft pas moins générale. Toute Spirale parabolique fe déroule en une parabole plus élevée d'un degré que fa génératrice. Ainfi la Spirale d'Archimede déroulée devient la Parabole commune. De-là il fuit fort naturellement qu'une Spirale Parabolique déroulée contient un efpace parabolique double de l'efpace fpiral qu'elle contenoit.

La Spirale parabolique déroulée eft de la même longueur dont elle étoit auparavant, & par confequent elle n'eft rectifiable que quand la Parabole en laquelle elle fe change, l'eft auffi: car il n'y a que certaines efpeces de Paraboles qui foient rectifiables. La Parabole commune ne l'étant pas, la Spirale d'Archimede ne l'eft pas non plus.

Si au lieu de prendre la Parabole en général pour génératrice d'une Spirale, on prend de même en général l'Hyperbole entre fes Afymptotes, tout le refte demeurant le même, les changemens qu'il faut faire dans la formule des Spirales à l'infini, font bientôt faits, & la Spirale hyperbolique générale paroît avec toutes fes propriétés enveloppées dans fon Equation, d'où le calcul

algébrique les dévéloppe facilement.

L'origine de la Spirale hyperbolique eſt à une diſtance infinie du centre de ſon cercle de révolution, au lieu que l'origine de la Spirale parabolique eſt à ce même centre. La Spirale hyperbolique, quoiqu'elle parte d'un point infiniment éloigné de ce cercle, y arrive cependant après une ſeule révolution, & quand elle en a coupé la circonférence, quoique de-là au centre, il n'y ait qu'une diſtance finie, elle n'y peut arriver qu'après une infinité de révolutions, ou, ce qui eſt la même choſe, elle n'y peut arriver.

Cet exemple peut ſuffire pour faire imaginer les variétés dont les ſpirales ſont ſuſceptibles ſelon les différentes Courbes qui les produiſent. Une Courbe fort ſimple peut produire une Spirale aſſez biſarre. Ainſi celle qui réſulte du Cercle pris pour Courbe génératrice, a un point de rebrouſſement tel que ſes deux concavités ſont tournées du même côté, ce qui eſt l'eſpece la moins ordinaire de rebrouſſement. Après cela, on ne ſera pas ſurpris de trouver des Spirales avec des points d'inflexion. On en verra même qui ont des contours plus ſinguliers qu'aucune Courbe que l'on ait examinée juſqu'à préſent.

Les Methodes dont M. Varignon s'eſt ſervi pour trouver les Soutangentes, les longueurs, les eſpaces, les déroulemens, &c. des Spirales paraboliques, ſe peuvent aiſément appliquer à toutes les autres eſpeces de Spirales. Il donne même des exemples de la maniere dont il faudroit conſidérer des Spirales produites par des Courbes, qui ſeroient autrement poſées à l'égard du centre du cercle de révolution, qu'on ne l'a ſuppoſé juſqu'ici.

Il ne nous reſteroit plus rien à dire pour donner une idée de la Théorie de M. Varignon ſur les Spirales, ſi ce n'étoit une Spirale aſſez fameuſe chez les nouveaux Géometres, pour mériter d'être traitée en particulier, & qui le merite d'autant plus qu'elle a ſervi de modele à M. Varignon pour en former d'autres de ſon eſpece qui n'étoient point encore connues.

La Courbe, qu'on appelle *Logarithmique*, eſt telle que ſi l'on prend ſes Abſciſſes en progreſſion arithmétique, ſes Ordonnées ſeront en progreſſion géométrique, & de-là vient ſon nom. Si ſes Ordonnées ſont croiſſantes vers une extrémité de l'axe, elles ſont néceſſairement décroiſſantes vers l'autre : & comme elles ſont en progreſſion géométrique, elles ne peuvent jamais décroître juſqu'à Zero ; c'eſt-à-dire, que la Courbe Logarithmique ne peut jamais venir à rencontrer ſon axe, quoiqu'elle s'en approche toujours, & que par conſequent cet axe eſt ſon Aſimptote.

Il y a longtemps que, ſur l'idée de la Logarithmique, on a imaginé une Spirale, qu'on a appellée *Spirale Logarithmique*, parce qu'elle eſt Logarithmique auſſi : car ſi ſur ſon cercle de révolution on prend les arcs en progreſſion arithmétique, les rayons de cette Spirale ſeront en progreſſion géométrique.

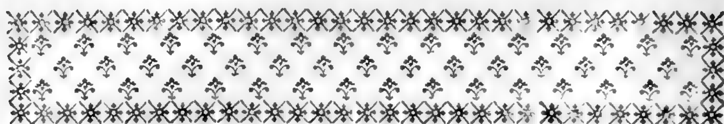
Pour la former, M Varignon poſe la Logarithmique, de maniere que ſon Aſimptote ſoit perpendiculaire au rayon, où commencent & ſe terminent les révolutions completes. Mais s'étant aviſé de donner à la Logarithmique une poſition qui fît un effet contraire, il a vû naître une autre Spirale, & qui étoit Logarithmique auſſi, puiſque ſes Ordonnées étant priſes en progreſſion arithmétique décroiſſante, les arcs de révolution en ſuivoient une géométrique croiſſante. Cette nouvelle Spirale Logarithmique, qui a l'Aſimptote de la Logarithmique pour le commencement & la fin de ſes révolutions completes, a auſſi l'extrémité de cette Aſimptote pour ſon origine, & par conſéquent commence à une diſtance infinie de ſon cercle de révolution, ainſi que la Spirale hyperbolique, au lieu que l'ancienne Spirale Logarithmique ne commence qu'à une diſtance finie de ſon cercle. La nouvelle arrive au centre, & l'ancienne n'y peut arriver.

Les deux Spirales Logarithmiques épuiſent toutes les combinaiſons qu'on peut faire de la progreſſion arithmé-

tique

tique & de la géométrique entre les Ordonnées ou rayons, & les arcs de révolution, & ce sont les seules Spirales que la Logarithmique puisse produire. Mais si l'on vouloit que les arcs d'une Spirale quelconque pussent suivre la progression soit arithmétique soit géométrique, tandis que les Ordonnées ou les arcs de révolution suivroient celle que les arcs de la Spirale ne suivroient point, il résulteroit de ces deux progressions différemment distribuées à trois grandeurs, six combinaisons, & par conséquent six Spirales Logarithmiques possibles, puisque ce qui fait qu'une Spirale est Logarithmique, c'est que quelques-unes des grandeurs qui la composent, suivent l'une des deux progressions, tandis que les autres grandeurs suivent l'autre. C'est là la réflexion qui a conduit M. Varignon à découvrir cinq nouvelles Spirales Logarithmiques. Nous avons déja vû la formation de la premiere des cinq, qui appartient, ainsi que l'ancienne, à la Logarithmique. Qüant aux quatre autres nouvelles, M. Varignon a trouvé les différentes Courbes dont elles devroient naître, & il a donné leur formation & leurs propriétés, toujours par sa méthode générale.

Une Spirale quelconque étant donnée, on peut aisément retrouver sa génératrice. Or toute Courbe dont les Ordonnées concourent en un point, peut être considérée comme une Spirale, & par conséquent on peut supposer qu'elle a une génératrice, & la trouver. S'il est donc question de décrire une Courbe quelconque dont les Ordonnées soient concourantes en un point, on peut la traiter de Spirale, remonter à sa génératrice, & par le moyen de cette génératrice la décrire, selon la méthode de M. Varignon. On peut donner à sa Théorie cet usage, si l'on ne veut pas qu'elle demeure simple Théorie.



ASTRONOMIE.

SUR DEUX ECLIPSES DE LUNE.

V. les M. p. 6. 14. 197. 199.

UNe Eclipse de Lune du 23 Decembre 1701, dont on ne parla dans l'Académie qu'en 1704, ne put être observée à Paris à cause des nuages dont le Ciel fut couvert. On en a pû voir le détail dans la *Connoissance des Temps* de 1703, tel qu'il avoit été prédit par le calcul astronomique.

Mais l'Académie reçut les observations qui en avoient été faites à Dunquerque par M. de Chazelles, à Montpellier par M[rs] de Plantade & Clapiers, à Arles par M. Davisard, à Avignon par le P. Bonfa Jésuite, & à Marseille par le P. Laval Jésuite, Professeur en Hydrogaphie.

Il y eut dans ces différentes observations des particularités remarquables. L'Eclipse arriva le matin, elle devoit commencer à Paris à 4h 40', & la Lune devoit se coucher éclipsée. A Montpellier on la vit, après l'immersion totale, vers les 6 heures, si sombre & si obscure qu'on avoit beaucoup de peine à y distinguer les taches, qui d'ordinaire sont aisées à reconnoître, quoique la Lune soit plongée dans l'ombre. Quelque temps après elle commença à rougir vers sa circonférence, & circulairement, le milieu du disque demeurant plus obscur, & vers les 6 heures $\frac{1}{4}$ ce milieu obscur, & l'anneau rougeâtre qui l'enveloppoit, partageoient assez également le diametre du disque. Mais ce qui fut fort extraordinai-

re, c'eſt qu'a 6 heures $\frac{1}{2}$, la Lune diſparut dans le ciel, quoiqu'il fût très-ſerain, & très net, qu'elle ne dût ſe coucher qu'à plus d'une heure de là, & que le crépuſcule ne fût point encore aſſez fort pour l'effacer, puiſqu'il laiſſoit voir des Etoiles, même du côté de l'Orient.

A Arles, la Lune parut toujours d'un rouge obſcur & brun, après l'immerſion totale, & au contraire, d'un rouge fort clair à Avignon, & ſi clair qu'on l'eût crue tranſparente, & éclairée du Soleil par derriere. A Marſeille, la Lune fut rougeâtre dans ſa partie qui étoit au Nord-oueſt, & fort obſcure dans la partie oppoſée. Elle diſparut auſſi vers les 7 heures, le ciel étant fort net.

Une autre Eclipſe de Lune du 17 Juin 1704. au ſoir, dont on n'auroit pû voir à Paris que la fin, qui n'y fut pas vûe à cauſe des nuages, fut obſervée de quelques autres endroits, dont on eut des relations, & fut remarquable principalement par une très-forte pénombre qui parut à Montpellier à M[rs] Bon, de Plantade, & de Clapiers.

On peut réduire à quelques cauſes générales les différens degrés d'ombre & de pénombre, & les differentes couleurs qui paroiſſent dans les éclipſes de Lune. Il faut ſe ſouvenir d'abord de ce que c'eſt que la pénombre expliquée dans l'Hiſt. de 1702 *. Elle n'a été alors conſidérée que comme formée par le globe ſeul de la Terre, & l'on a fait voir que la Lune pouvoit ne tomber que dans cette pénombre, qui eſt un eſpace privé ſeulement des rayons d'une partie du Soleil, & non pas dans l'ombre qui eſt un eſpace où il n'entre abſolument aucuns rayons. Par la formation de la pénombre, il eſt viſible qu'elle doit avoir différens degrés de clarté ou d'obſcurité, ſelon qu'elle s'éloigne ou s'approche davantage de l'ombre : mais ſi outre le globe de la terre, on conſidere auſſi l'Atmoſphere dont il eſt environné, il eſt certain qu'il s'y doit rompre des rayons, qui en vertu de cette réfraction ſe rapprochant de la perpendicu-

* p. 73. & 74.

laire, & se rabattant par conséquent vers l'axe de l'ombre de la terre, pourront aller se mêler dans la pénombre, & la rendre plus claire qu'elle n'étoit naturellement, & peut-être iront-ils jusque dans l'ombre, qui en deviendra nécessairement moins obscure. Cela depend de la grandeur de la réfraction, c'est-à-dire de la densité de la matiere qui l'aura causée. Cette matiere peut varier dans l'Atmosphere, & par conséquent l'ombre & la pénombre prises à la même distance du globe de la terre, pourront en différens temps, & peut-être pendant la durée d'une même éclipse, avoir différens degrés de clarté ou d'obscurité.

M^rs les Astronomes de Montpellier ont eu sur cela, à l'occasion de cette forte pénombre de l'Eclipse du 17 Juin, une pensée assez nouvelle, & qui merite d'être suivie. Ils ont cherché quelles étoient les parties de la surface de la terre comprises pendant cette éclipse, tant dans l'hemisphere éclairé, que dans l'hemisphere obscur: car si l'on peut juger que l'air de l'hemisphere éclairé soit plus épais que celui de l'hemisphere obscur, les rayons qui passeront par réfraction de l'hemisphere éclairé dans l'obscur, souffriront une moindre réfraction, & étant moins rabattus vers l'axe de l'ombre de la terre, ne tomberont point dans la pénombre, & au contraire. Ces Astronomes ont trouvé que la mer du Sud qui est très-vaste, étoit dans l'hemisphere éclairé; & tout le grand Continent de l'Europe, de l'Asie, & de l'Afrique dans l'hemisphere obscur; de sorte que les rayons rompus qui passoient de dessus la mer du Sud, & d'un air chargé de vapeurs, dans un air plus leger & sur des terres, ne devoient souffrir qu'une foible réfraction: & c'est ce qui rendit si obscure la pénombre de cette éclipse. Pour pousser cette recherche à sa derniere précision, il faut voir de plus quelle est la partie de la terre qui couvre de son ombre la partie éclipsée de la Lune, & comparer cet endroit de la terre à ceux d'où il y peut venir des rayons rompus, ou plutôt, les differentes den-

ſités d'air. Si l'on peut s'aſſurer qu'il y ait dans ces denſités quelque choſe d'égal & d'uniforme, & que l'air d'une grande mer ſoit toujours plus épais que celui d'un Continent, ce qui paroît aſſez vraiſemblable, on pourra faire par avance quelques conjectures ſur le plus ou le moins d'obſcurité de la pénombre ou de l'ombre des éclipſes de Lune, & joindre ces prédictions phyſiques à celles qui ſont purement aſtronomiques. Ce ſeroit un nouveau degré de connoiſſance qu'on auroit acquis, quoique l'on n'eût guere dû l'eſpérer.

Quand la Lune vûe en même temps de différens endroits paroît avoir différens degrés d'obſcurité, ou même différentes couleurs, ainſi qu'il eſt arrivé dans l'Eclipſe du 23. Decembre 1703. obſervée à Arles & à Avignon, cela ne ſe peut plus rapporter qu'aux différentes vapeurs particulieres de chaque lieu, & à leur différente quantité. Ce ſont des eſpeces de verres inégalement épais & diverſement teints, au travers deſquels le même objet eſt vû. Qoique le ciel paroiſſe fort net, ces vapeurs ne laiſſent pas d'y être répandues. Dans l'Eclipſe du 23 Decembre, une foible pénombre devoit couvrir la Lune, l'air devoit être à Arles fort chargé de ces vapeurs inviſibles, & au contraire fort pur à Avignon.

On ne peut guere attribuer qu'à ces mêmes vapeurs, que la Lune éclipſée diſparoiſſe dans le ciel, ſans qu'il y ait d'ailleurs nul accident nouveau. Je ſuppoſe que la Lune a pris dans ſon éclipſe une certaine couleur peu différente de celle du ciel tel qu'il eſt alors, c'eſt-à-dire du fond ſur lequel on la voit. Si les vapeurs interpoſées, deviennent telles qu'elles rendent la couleur de la Lune entierement ſemblable à celle du fond, la Planete doit diſparoître à nos yeux, & il eſt clair ſelon cette idée que ce phénomene ſurprenant ne doit être poſſible que dans les éclipſes, parce qu'en tout temps la couleur de la Lune eſt trop différente de celle du fond qui la porte.

Nous ne comptons dans tout ceci que ſur l'Atmoſphere de la Terre, & ſur les vapeurs qui y ſont inégalement

répandues. Il eſt vrai que la Lune ne paroît pas avoir d'Atmoſphere groſſiere & ſenſible, mais peut-être a t-elle des vapeurs déliées, qui étant inviſibles pendant qu'elle eſt lumineuſe, contribuent à lui donner une couleur & une teinture, pendant qu'elle eſt dans l'obſcurité. Quoiqu'il en ſoit, on peut croire que les Philoſophes après avoir découvert, preſque contre toute apparence de ſuccès, tout ce qu'il y a de géométrique dans les Eclipſes, viendront auſſi à découvrir les cauſes des accidens phyſiques qui s'y mêlent : mais ce qui eſt phyſique doit naturellement ſe manifeſter le dernier, parce qu'il eſt plus compliqué, & plus variable.

SUR LE MOUVEMENT
D'UN ASTRE EN ASCENSION DROITE
COMPARE' A SON MOUVEMENT
EN LONGITUDE.

V. les M. p. 134.

QUand un Aſtre parti du premier degré d'Aries eſt arrivé au premier degré de Cancer, il a fait par ſon mouvement en aſcenſion droite le quart de l'Equateur, & par ſon mouvement en longitude le quart de l'Ecliptique ; & la diſtance où il ſe trouve de l'interſection, ou, ſi l'on veut, de l'origine de ces deux grands Cercles, eſt également de 90 degrés par rapport à l'un & à l'autre. Mais de ce que le quart de l'Ecliptique répond préciſément au quart de l'Equateur, il ne s'enſuit pas que chaque autre partie égale de l'Ecliptique réponde à une partie égale de l'Equateur, & chaque degré de l'un à chaque degré de l'autre ; l'obliquité de l'Ecliptique par rapport à l'Equateur ne le permet pas, & l'Aſtre qui, arrivé au premier degré de Cancer, a parcouru deux parties égales ſur l'un & l'autre cercle, y avoit pendant tout ſon cours précédent, ou plutôt pendant chaque inſtant de ce cours, parcouru des parties inégales. Ayant fait un degré par rapport à l'Equateur, il avoit

fait plus d'un degré fur l'Ecliptique, ou réciproquement. Mais puifque par un cours qui étant comparé à l'un & à l'autre cercle eft inégal, il a fait à la fin fur l'un & fur l'autre un efpace égal, il faut abfolument qu'un degré de l'Ecliptique ait été tantôt plus grand, tantôt plus petit qu'un degré de l'Equateur & comme il eft conftant que cette variation a été continue & réglée, un degré de l'Ecliptique n'a pû, après avoir été plus grand qu'un degré de l'Equateur, devenir plus petit, fans paffer par lui être égal. M. Parent appelle mouvement *médiocre* d'un Aftre celui qu'il a lorfque ces deux différens degrés font égaux, & il cherche à quel point de l'Ecliptique entre le premier degré d'Aries, & le premier degré de Cancer, doit être ce mouvement médiocre.

Pour rapporter les degrés de l'Ecliptique à ceux de l'Equateur, il faut concevoir l'Equateur divifé de degré en degré par des Méridiens, qui coupent enfuite l'Ecliptique. Par-là, chaque partie égale de l'Equateur a une partie de l'Ecliptique qui lui répond, comprife entre les mêmes Méridiens : mais ces parties de l'Ecliptique font toujours inégales, parce que l'efpace qui eft entre deux Méridiens diminuant & fe ferrant toujours à mefure qu'ils approchent du Pole où ils doivent concourir, la portion de l'Ecliptique qu'ils comprennent, eft d'autant plus petite qu'elle eft plus éloignée de l'Equateur. Ainfi les deux Méridiens qui comprennent le premier degré de l'Equateur, comprennent plus d'un degré de l'Ecliptique, enfuite une moindre portion de l'Ecliptique, mais toujours plus grande qu'un degré de l'Equateur, jufqu'à ce qu'elle lui foit égale, après quoi elle eft toujours plus petite que ce degré, & enfin la plus petite qu'elle puiffe être lorfqu'elle répond au 90e degré de l'Equateur.

Il faut donc confidérer le point du mouvement médiocre comme partageant en deux le quart de l'Ecliptique. Du côté d'Aries font les parties de l'Ecliptique plus grandes chacune qu'un degré de l'Equateur, du

côté de Cancer celles qui ſont plus petites. Le point du mouvement médiocre ſera au 45ᵉ degré de l'Ecliptique, ſi les 45 degrés de l'Ecliptique qui ſont vers Aries pris enſemble, l'emportent autant en grandeur ſur 45 degrés de l'Equateur, que les 45 degrés vers Cancer leur cedent: mais ſi cela n'eſt pas ainſi, ce point s'approchera d'Aries, en cas que pour faire la compenſation il faille un plus grand nombre de parties vers Cancer, ou, ce qui revient au même, ſi les parties de l'Ecliptique vers Aries l'emportent plus en grandeur ſur les degrés de l'Equateur, que des parties priſes à même diſtance de Cancer ne leur cedent, & ſi l'on ſuppoſe le contraire, le point du médiocre mouvement s'éloignera d'Aries. Or moins l'Ecliptique ſera ſuppoſée oblique, moins ſes parties vers Aries l'emporteront ſur les degrés de l'Equateur, & moins les parties vers Cancer leur céderont, & au contraire; de ſorte qu'il eſt viſible que c'eſt l'obliquité de l'Ecliptique qui doit ſeule régler la poſition ou la place du point du médiocre mouvement dans le quart de l'Ecliptique.

M. Parent trouve par une équation algébrique, que ces trois grandeurs ſont continûment proportionnelles, le Rayon de la Sphere, la Tangente de l'arc qui eſt la diſtance de Cancer au point du mouvement médiocre, & le Sinus du complément de l'obliquité de l'Ecliptique. Delà il ſuit évidemment que moins l'Ecliptique eſt oblique, plus le point du mouvement médiocre eſt éloigné de Cancer, ou proche d'Aries.

Mais l'obliquité de l'Ecliptique étant réellement conſtante, & déterminée de 23° 29', on trouve auſſi-tôt par la Formule de M. Parent, que le point du mouvement médiocre eſt au 46° 14' de l'Ecliptique, au lieu qu'il eſt placé dans pluſieurs Tables aſtronomiques vers les 44 ou 45°. Cela vient de ce que les Tables ne l'ont pas déterminé par une Formule algébrique, comme a fait M. Parent, mais par des calculs où il entre un peu de tâtonnement, & qui aſſez ſouvent ne ſont que des approximations

mations. Les formules d'Algebre, quand on les peut employer, frappent droit au but.

SUR LES PLANETES EN GENERAL, ET SUR SATURNE EN PARTICULIER.

ON ne sauroit mieux, ni relever la gloire de l'Astronomie, ni excuser ce qui lui reste d'imperfection, qu'en montrant, comme a fait M. Maraldi, toutes les difficultés qu'elle a eues à combattre, & qu'elle a presque entierement surmontées. V. les M. p. 306.

Toutes les Planetes *principales*, car il ne s'agit point ici de celles qui ne sont que des Lunes ou des Satellites, tournent autour du Soleil, quelle que soit la ligne qu'elles décrivent autour de cet Astre, & leur mouvement s'y rapporte uniquement. Il faudroit donc, pour observer & pour calculer le cours des Planetes le plus commodément & le plus avantageusement qu'il fût possible, qu'il y eût des Astronomes placés dans le Soleil. Supposons qu'il y en ait effectivement.

Ils s'appercevroient d'abord que nulle Planete ne seroit dans tout son cours également éloignée du Soleil, & qu'il n'y en auroit aucune qui n'eût son *Aphélie* & son *Perihélie*, c'est-à-dire, deux points diamétralement opposés, dont l'un marqueroit le plus grand éloignement, l'autre le moindre, & entre lesquels seroient de part & d'autre ceux des *moyennes distances.*

Quand le mouvement des Planetes seroit égal & uniforme en lui-même, il paroîtroit inégal; parce que leur distance à l'égard du Soleil seroit toujours inégale d'un moment à l'autre. On les verroit aller plus lentement vers leur Aphélie, & plus vîte vers le Perihélie. Or on

ne ſauroit calculer le mouvement des Planetes qu'en le ſuppoſant toujours égal, & par conſéquent *moyen* entre la plus grande viteſſe & la plus grande lenteur, ſauf à réduire enſuite ce mouvement moyen & faux, au *vrai* & *apparent* par des Tables qui marquent combien à chaque point de l'Orbe de la Planete, il faut ajouter à ſon mouvement moyen ou en retrancher. Ceſt ce qu'on appelle, *Equation additive* & *ſouſtractive.* Il eſt clair que la conſtruction de ces Tables dépend d'une détermination préciſe de l'Aphélie & du Perihélie : mais ce ne ſont pas deux points viſibles dans le cours d'une Planete, & on ne les peut avoir que par une aſſez longue ſuite d'obſervations comparées les unes aux autres. Si par l'erreur des obſervations, ou par celle des comparaiſons que l'on en fait, on ſe trompe d'un degré, par exemple, ſur la poſition de l'Aphélie, il y aura un degré dans l'Orbe de la Planete, où la Table donnera le moyen mouvement plus grand que le vrai, quoiqu'il ſoit réellement plus petit, & un autre degré où le contraire arrivera, & ſur tous les autres degrés ou points de l'Orbe ſans exception, l'équation ſera plus grande ou plus petite qu'elle n'eût été, ſi l'Aphélie & le Perihélie euſſent été bien poſés.

Leur poſition ne détermine que les degrés de l'Orbe où l'équation doit être additive ou ſouſtractive, & plus ou moins additive ou ſouſtractive, en un mot, la diſtribution de l'équation dans l'Orbe : mais la grandeur totale de cette équation dépend de la grandeur de l'*excentricité* de l'Orbe au Soleil conſideré comme centre. Cette excentricité n'eſt point un objet viſible, non plus que l'Aphélie & le Perihélie, il la faut conclurre avec peine d'un grand nombre d'obſervations, & pour peu qu'on ſe trompe ſur ſa grandeur, toute l'équation ſera néceſſairement fauſſe en toutes ſes parties. De plus, pour la diſtribuer dans l'Orbe, il faut ſavoir quelle eſt la Courbe de l'Excentrique : car une Ellipſe, par exemple, ſe partagera en parties égales autrement qu'un Cercle, & une certaine Ellipſe

autrement qu'une autre, or pour déterminer la Courbe d'une Orbe par les obſervations ſeules, il en faudroit un nombre preſque infini, & l'on ne peut guère ſe paſſer de faire une hipothese qui concilie le plus grand nombre d'obſervations qu'il ſera poſſible ; mais qui ſera toujours incertaine en elle-même.

Les Planetes ſe meuvent toutes dans des plans différens, quoiqu'à la vérité peu inclinés les uns aux autres ; mais d'autant plus difficiles à diſtinguer. Les Aſtronomes placés dans le Soleil ſeroient obligés à en choiſir arbitrairement quelqu'un, par rapport auquel ils meſureroient l'inclinaiſon des autres : je ſuppoſe qu'ils choiſiſſent le plan qui paſſe par le centre du Soleil & de la Terre, & que nous appellons le plan de l'Ecliptique. Une Planete, par exemple, Jupiter ne pourroit être parfaitement en conjonction ou en oppoſition avec la Terre, à moins que d'être dans le même plan ; c'eſt-à-dire, puiſque les plans de l'Orbe de Jupiter & de celui de la Terre ſont différens, mais inclinés, à moins que d'être dans l'un des deux points ou *Nœuds* diamétralement oppoſés, qui ſont l'interſection des Orbes de Jupiter & de la Terre. Plus l'angle que feroit l'Orbe de Jupiter avec celui de la Terre, ou avec le plan de l'Ecliptique, ſeroit grand, plus Jupiter hors de ſes nœuds ſeroit éloigné d'être en conjonction, ou en oppoſition parfaite ou centrale avec la Terre. On voit donc que le calcul des conjonctions & des oppoſitions des Planetes demanderoit la connoiſſance préciſe des inclinaiſons de leurs Orbes au plan de l'Ecliptique, & de la poſition de leurs nœuds, mais cette recherche n'eſt pas facile. Un nœud ne ſe voit point ; il faut faire pluſieurs obſervations de la Planete aux environs du nœud, avant qu'elle y paſſe, & après qu'elle y a paſſé ; & par ſes différentes diſtances de l'Ecliptique de côté & d'autre, juger à quel point ſa diſtance a été nulle, ce qui eſt la même choſe que déterminer ſon nœud. Mais parce que les Orbes ſont peu inclinés, une Planete s'approche ou s'éloigne beau-

coup de son nœud, ou avance beaucoup en *longitude* sans s'approcher ou s'éloigner beaucoup du plan de l'Ecliptique, ou sans diminuer ou augmenter beaucoup sa *latitude*, & par conséquent son mouvement par rapport au plan de l'Ecliptique, ou en latitude, étant insensible dans une assez grande étendue, la position du nœud est incertaine & douteuse dans une étendue égale.

Il y a encore plus : ni l'Aphélie & le Perihélie, ni les Nœuds ne sont des points fixes dans les Orbes des Planetes, ils changent continuellement, mais avec une lenteur qui rend leur variation beaucoup plus difficile à déterminer.

Toutes ces difficultés étant applanies, autant qu'il est possible à l'Art, quand on veut faire des Tables astronomiques pour une Planete, & donner les principes de calcul ou *Elémens* qui doivent servir à trouver à l'avenir son vrai lieu dans le Ciel pour tel moment qu'on voudra, il faut lui fixer une *Epoque*, c'est-à-dire, un moment pour lequel ce vrai lieu soit bien connu, & d'où l'on comptera tout le reste. Si cette Epoque est fausse, tout s'en ressent, & toutes les difficultés que nous avons rapportées, concourent à en rendre la détermination fort pénible, & peu sûre.

Jusqu'ici nous avons supposé des Astronomes placés dans le Soleil, au centre de tous les mouvemens : mais que sera-ce quand ils seront placés sur la Terre, qui voit comme inégal & irrégulier tout ce qui auroit été vû égal & régulier de dedans le Soleil, & qui par sa situation ajoute à tout ce qui seroit inégal & irrégulier en soi-même, une fausse inégalité & une fausse irrégularité fort difficile à démêler d'avec la vraie ?

En fait de Planetes, ce qui se rapporte au Soleil, & n'est pas vû de dedans le Soleil, ne peut être que faux, & demande à être rectifié. Le véritable angle d'inclinaison des Orbes des Planetes sur le plan de l'Ecliptique, est celui qui seroit vû du Soleil, & non cet angle plus ou moins grand qui est vû de la Terre. La position des nœuds

d'une Planete dans le Zodiaque n'eſt point celle qui eſt vûe de la Terre, à moins que la ligne tirée du centre du Soleil, par laquelle ils ſont déterminés, ne paſſe auſſi par le centre de la Terre, ce qui eſt une rencontre fort rare. Enfin de la Terre au Soleil il y a toujours une *parallaxe* ou différence optique, dont il faut tenir compte dans les déterminations tirées de nos obſervations. C'eſt un travail dont notre ſituation nous impoſe la néceſſité, & qui rend tous les calculs aſtronomiques plus compliqués, & par conſéquent plus ſujets à erreur.

La grandeur de cette parallaxe dépend de la diſtance de la Terre, & de celle de la Planete au Soleil, ou, ce qui revient au même, du rapport de ces deux diſtances. Il eſt évident que ſi la diſtance de la Terre au Soleil par rapport à celle de la Planete obſervée au Soleil, étoit aſſez petite pour ne devoir pas être comptée, ou du moins pour pouvoir être négligée ſans une erreur ſenſible, la parallaxe ceſſeroit; & par conſequent elle eſt d'autant plus grande, que la diſtance de la Terre au Soleil eſt plus grande par rapport à celle de la Planete au Soleil. Mais les meſures de ces ſortes de diſtances, qui paroiſſent au commun des hommes des entrepriſes impratiquables, ſont du moins très-pénibles pour les plus habiles Aſtronomes, & ne peuvent être d'une grande ſûreté.

Les Orbes des Planetes ne ſe rapportent qu'au Soleil; on ne peut pas dire proprement qu'ils ſoient excentriques à la Terre, à laquelle ils ne ſe rapportent point. Les uns enveloppent l'Orbe de la Terre, les autres en ſont enveloppés, & par cette diſpoſition, les Planetes étant dans leur plus grande proximité de la Terre, ou dans leur *Périgée*, en ſont très-proches par rapport à la grande diſtance où elles en ſont dans leur *Apogée*. Mais, & cet Apogée & ce Périgée ne ſont que des rencontres, pour ainſi dire, fortuites, qui naiſſent de la combinaiſon du mouvement des Planetes & de celui de la Terre ou du Soleil, il n'y a que l'Aphélie & le Perihélie qui ſoient des points déter-

minés par eux-mêmes, le Perigée d'une Planete peut arriver dans son Aphélie, & son Apogée dans le Perihélie : & comme ce sont l'Aphélie & le Perihélie seuls, qui ont un mouvement par lequel se regle la distribution de l'excentricité ou de l'équation dans l'Orbe, il faut les démêler d'avec l'Apogée & le Périgée, ce qui est d'autant plus mal-aisé, que les uns nous sont visibles, & les autres invisibles. De même, l'excentricité des Planetes au Soleil est celle dont nous avons besoin : mais nous ne la voyons pas, & il faut la conclurre avec beaucoup de peine de leurs inégales distances à la Terre. On appelle *premiere inégalité* des Planetes, celle qui vient de leur excentricité au Soleil, & qui est réellement dans leur cours par rapport à cet Astre, & *seconde inégalité*, celle qui vient de ce qu'elles sont vûes de la Terre, & non du Soleil.

A rassembler toutes les déterminations que nous avons rapportées, nécessaires au calcul des Planetes, le nombre en est si grand, & souvent elles sont si délicates & si subtiles, ou demandent des observations faites en des circonstances si rares, que M. Maraldi ne croit pas que les observations seules puissent aisément suffire, & que l'on ne soit pas réduit à emprunter le secours de quelques hipotheses ; c'est-à-dire, à supposer pour Orbe d'une Planete quelque ligne Courbe, dont la nature particuliere donnera la mesure de ses différens arcs, quand on en aura quelques-uns par observation. Quoi qu'il en soit, les difficultés de l'Astronomie sont assez bien prouvées, ne fût-ce que par la différence qui se trouve assez souvent entre le Ciel & les Tables des plus grands Astronomes.

M. Maraldi en donne pour exemple les Tables de Kepler sur Saturne. Des observations de cette Planete faites à l'Observatoire depuis plus de 33 ou 34 ans, ont fait voir que Saturne étoit moins avancé dans le Zodiaque, tantôt de 20 à 21 Minutes, tantôt de 10 à 12, que ne le donnoient les Tables de Kepler, fondées sur les observations de Tycho-Brahé. Cette différence d'un tiers

ou d'une ſixieme partie de degré, n'auroit pas été comptée autrefois, & paroît maintenant fort conſidérable. M. Maraldi s'eſt donné beaucoup de peine pour en découvrir la ſource. Kepler pouvoit s'être mépris, ou dans l'Epoque d'où il avoit commencé ſes Tables de Saturne, ou dans la plus grande équation qu'il lui avoit donnée. Si l'erreur étoit dans l'Epoque, Saturne avoit donc été d'abord poſé par Kepler plus avancé dans le Zodiaque d'une certaine quantité, qu'il ne l'étoit réellement, & cette quantité devoit être toujours la même: or par les obſervations elle varioit. Si l'erreur étoit dans la plus grande Equation, on devoit trop ajouter au mouvement moyen de Saturne dans une moitié de ſon Orbe, & par conſéquent le trouver trop avancé: mais auſſi dans l'autre moitié de l'Orbe, on devoit ôter trop, & le trouver trop peu avancé: or il l'étoit toujours trop, mais inégalement. De-là M. Maraldi tira cette conſéquence aſſez ſubtile, que l'erreur appartenoit & à l'Epoque, puiſque Saturne étoit toujours fort avancé ſelon Kepler, & à la plus grande Equation, puiſqu'il l'étoit inégalement. Il corrigea l'une & l'autre, ſelon qu'il étoit néceſſaire pour les concilier avec les obſervations.

Il ſe pouvoit auſſi que Kepler ſe fût trompé dans le mouvement moyen en le faiſant trop grand: mais après beaucoup de raiſonnemens & de calculs, on trouva que l'erreur, du moins pour la plus grande partie, devoit venir de l'Equation & de l'Epoque.

M. Maraldi a examiné de la même maniere l'Aphélie, les Nœuds, & la plus grande Latitude de Saturne ou l'inclinaiſon de ſon Orbe, déterminés par Kepler; il les a corrigés lorſqu'il a été néceſſaire pour accorder un grand nombre d'obſervations: & il faut dire à la gloire des Tables de M. Bouillaud ſur Saturne, que ſouvent ces corrections ſe ſont trouvées conformes à ces Tables.

On pourra juger par le travail de M. Maraldi ſur

Saturne, ce que coûte la détermination des mouvemens d'une Planete, quel amas d'obſervations anciennes & modernes il faut avoir devant ſoi, avec quel art il faut les comparer, combien de différentes méthodes il faut avoir en main, & combien de réflexions, quelquefois fort fines & fort délicates, ſont néceſſaires pour ſe conduire dans un pareil labyrinthe.

SUR LE CALENDRIER.

V. les M. p. 146.

LA révolution apparente du Soleil autour de la Terre a été diviſée arbitrairement en 24 parties, qui ſont les Heures, premier fondement de toute la meſure du temps. L'uſage civil ne connoît que les Heures, ou plutôt des multiples d'Heures, comme des Jours, des Années: mais ni le mouvement annuel du Soleil, ni celui des autres corps céleſtes, ne peuvent être meſurés exactement & ſans reſte par des heures ni par leurs multiples; celui du Soleil, par exemple, eſt de 365 jours, 5 heures, 49′ à peu près; celui de la Lune eſt de 29 jours, 12 heures, 44′, & de-là vient que pour abſorber ces fractions dans des nombres entiers, & même dans des nombres qui n'expriment que des jours ou des années, il faut imaginer des Cycles, qui embraſſant pluſieurs révolutions d'un même Aſtre, le remettent après un certain nombre d'années aux mêmes points du Ciel d'où il étoit parti d'abord, ou, ce qui eſt la même choſe, aux mêmes temps du Calendrier établi pour l'uſage civil.

Tel a été le fameux Cycle de 19 années, inventé autrefois pour remettre les Nouvelles Lunes aux mêmes jours; de ſorte que le cours de la Lune comparé à celui du Soleil, ſe doit toujours retrouver le même dans chaque période de 19 années. Mais ce Cycle, qui remet les nouvelles Lunes aux mêmes jours, ne les remet pas

aux mêmes heures, il s'en faut à peu près une heure & demie, les heures s'accumulent, & deviennent des jours, & enfin en 625 ans les nouvelles Lunes arrivent deux jours entiers plutôt qu'elles ne devroient arriver par le Cycle.

Cette différence entre le Ciel & le Cycle de 19 ans a été inconnue à l'antiquité, & l'erreur qu'elle avoit produite dans le Calendrier depuis le quatrieme siecle de l'Eglise, qui fut celui du Concile de Nicée, jusqu'au seiziéme, fut une des causes de la Réforme du Calendrier par le Pape Gregoire XIII, ainsi qu'on l'a vû dans l'Hist. de 1701.*

* p. 107. & suiv.

Ceux qui travaillerent à cette Réforme sous les ordres du Pape, découvrirent l'équation de 2. jours, nécessaire au bout de 625 ans, pour remettre le Cycle de 19 ans parfaitement d'accord avec le Ciel. Cette équation est heureuse en ce qu'elle est de 2 jours entiers sans aucune fraction ni d'heures, ni de minutes : car s'il y en avoit eu quelqu'une, il auroit fallu une autre équation plus grande que celle de 2 jours pour un nombre d'années beaucoup plus grand que 625, & d'autant plus grand que la fraction eût été plus petite, ce qui auroit été incommode ; & peut-être même la fraction eût été telle, qu'il eût été impossible d'en composer des jours qui n'eussent eu encore quelque fraction. Cette équation de 2 jours précis pour 625 ans, partagée proportionnellement à une période de 125 ans est de 9 heures 36′ précises : & partagée de même à une période de 25 ans, elle est d'1 heure, 55′ 12″ sans tierces ; or on sait de quelle commodité il est dans le calcul & dans la pratique, d'avoir peu de fractions.

Il y a plus : cette équation si heureuse & si facile est en même-temps très-juste, & M. Cassini prouve qu'elle donne les mouvemens ou les lieux de la Lune avec la même exactitude que les meilleures Tables. A peine eût-on osé espérer qu'un Cycle destiné seulement pour l'usage Civil

ou Ecclésiastique, & auquel on ne demande pas une rigoureuse précision, pût en avoir autant que les Tables Astronomiques, qui sont faites pour suivre pas à pas les mouvemens célestes, & pour n'en laisser rien échapper.

M. Cassini fait voir, en comparant ensemble les Tables les plus célebres que nous ayons pour la Lune, que l'équation Grégorienne tient le milieu entr'elles, & que par conséquent elle n'a pas seulement toute la perfection qu'on peut desirer par rapport à l'usage Ecclésiastique; mais encore, que dans l'usage astronomique, si exact & si scrupuleux, elle peut & doit être préférée aux Tables même, puisqu'elles ne sont pas plus justes, & demandent des calculs beaucoup plus longs & plus pénibles. C'est là certainement ce qu'on peut jamais dire de plus glorieux pour les Auteurs du Calendrier Grégorien, du moins quant à cette partie.

V. les M. p. 9. 10. 12. 40. 44. 131. 132.
NOus renvoyons entierement aux Mémoires, selon le plan que nous nous sommes fait, différentes Observations de Taches dans le Soleil faites par les Astronomes de l'Académie, ou des comparaisons de leurs observations avec celles de leurs Correspondans.

V. les M. p. 198. 233. 246. 247.
Des observations de Venus, & de Jupiter cachés par la Lune.

V. les M. pag. 352. & 356.
Et les observations de l'Eclipse de Lune du 10 Decembre.

MOnsieur Clapier Professeur de Mathématique à Montpellier, Correspondant de M. Cassini lui a envoyé une Table qu'il a calculée des Déclinaisons du Soleil, pour tous les degrés & minutes de l'Ecliptique, en supposant que sa plus grande déclinaison soit de 23° 29′.

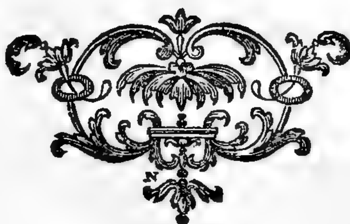
Le même M. Clapier a envoyé à M. Cassini, & par lui à l'Académie, une Table qu'il a calculée, fort utile pour faciliter la description des Cadrans Verticaux déclinans à la

hauteur du Pole de Paris. Il ne ſuppoſe dans cette Table que la déclinaiſon du plan vers l'Orient ou vers l'Occident connue; & enſuite vis-à-vis de chaque degré de déclinaiſon, il met en différentes colonnes l'angle de la Méridienne avec la Souſtilaire, l'angle de l'axe avec la Souſtilaire, les angles des lignes Horaires avec la Méridienne au centre du Cadran, calculés de demi-heure en demi-heure; c'eſt-à-dire que par cette Table tous les Cadrans de cette eſpece ſe trouvent tout faits.

M. Caſſini a rendu compte à la Compagnie, d'un Livre fait au ſujet du Calendrier par M. Bianchini, dont nous avons déja parlé dans l'Hiſt. de 1701 *. Cet habile homme y eſt d'accord avec M. Caſſini ſur les vûes qu'il avoit propoſées à la Congrégation, & ſur les concluſions qu'il tiroit. Du reſte, M. Bianchini fait paroître dans cet Ouvrage une grande connoiſſance de l'Aſtronomie. V. les M. p. 142. * p. 107.

Les RR. PP. Jeſuites de Lyon s'étant fait chez eux un Obſervatoire bien entendu, & fourni de tous les inſtrumens néceſſaires, ils ont communiqué leurs principales obſervations à M. Caſſini, qui en a tiré tout le fruit qui s'en pouvoit tirer en les comparant aux ſiennes.

De même M. Caſſini le fils a comparé ſes obſervations à celles que le P. Fueillée, Minime, & bon Aſtronome, a faites en Amérique. V. les M. p. 338.



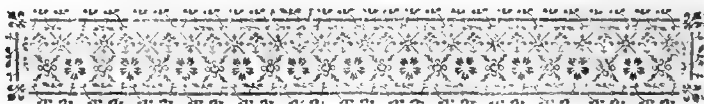


HYDROGRAPHIE.

V. les M. p. 200.

MOnsieur de Lagni a répliqué à la Réponse que M. Chazelles lui avoit faite sur les Cartes Réduites, & dont il a été parlé dans l'Hist. de 1702*. Mais comme cette Replique ne demande aucun éclaircissement, nous n'en dirons rien ici.

* pag. 86. & suiv.



DIOPTRIQUE.

DES FOYERS EN GENERAL.

V. les M. p. 24.

IL seroit inutile de répéter ici ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1703*. sur les Foyers ou sur les Caustiques. Ces idées supposées, il s'agit maintenant de déterminer sur l'axe d'un Verre de figure quelconque quel est le point où cet axe touche la Caustique par réfraction, ou, ce qui revient au même, quel est au-delà du Verre le point où les rayons d'un point lumineux qui ont passé au travers du Verre, & qui en se rompant ont pris de nouvelles directions, se réunissent en plus grande quantité que par tout ailleurs.

* pag. 69. & suiv.

On ne peut imaginer que quatre choses qui entrent dans la Réfraction, & dans toutes les modifications différentes qu'elle peut recevoir, 1°. La différence de densité des deux

Milieux par où paſſent les rayons ; par exemple, celle de l'air & du verre. 2°. La figure du ſecond Milieu qui rompt les rayons ; par exemple, la courbure du Verre. 3°. La direction qu'avoient entr'eux les rayons partis d'un ſeul point, lorſqu'ils ont rencontré le ſecond milieu, c'eſt-à-dire, leur divergence, leur paralléliſme, ou leur convergence. 4°. L'angle ſous lequel chacun d'eux rencontre la ſurface du ſecond milieu.

A l'égard du premier point, on a reconnu que la différente denſité des milieux donne au Sinus de l'angle d'incidence d'un rayon, & au Sinus de ſon angle rompu une certaine proportion qui eſt toujours la même dans les mêmes milieux pour tous les différens angles d'incidence poſſibles ; ce qui renferme, ou rend inutile la conſidération du 4e point que nous venons de poſer. Tout le monde ſait que de l'air au verre le rapport des Sinus, ou de la réfraction eſt de 3 à 2.

La figure de la ſurface du ſecond milieu a une grande part à la réfraction : car il eſt viſible que l'angle d'incidence, qui par le rapport conſtant des Sinus donne l'angle rompu, dépend de la maniere dont la ſurface du ſecond milieu ſe préſente au rayon qui la doit pénétrer. Si cette ſurface eſt plane, & ſi tous les rayons ont entr'eux la même direction ; c'eſt-à-dire, s'ils ſont paralleles, comme ils ont tous le même angle d'incidence, ils ont tous auſſi le même angle rompu, & ſont tous paralleles après la réfraction ainſi qu'ils l'étoient auparavant. Mais ſi la ſurface eſt courbe, les rayons incidens, quoique paralleles entr'eux, tombent tous ſous des angles différens, & par conſéquent après la réfraction ne ſont plus paralleles, mais divergens, ou convergens. Plus une ſurface eſt courbe, plus elle fait un effet contraire à celui de la ſurface plane, & par conſéquent, puiſque la ſurface plane renvoie paralleles les rayons qu'elle a reçus paralleles, une ſurface courbe renvoie d'autant plus divergens ou convergens les rayons qu'elle a reçus paralleles, qu'elle eſt plus courbe. Il faut

donc pour connoître le degré de la divergence ou de la convergence des rayons qui ont été rompus par une surface courbe, connoître le degré de sa courbure : or pour avoir cette connoissance en général il faut aller à la Théorie des Développées, & voici pourquoi. Nous allons supposer dans cette explication ce qui a été dit des Déve-
* pag. 81. loppées dans l'Hist. de 1701.*

Un petit cercle est plus courbe qu'un grand, & plus courbe en même raison que son rayon est plus petit. Chaque portion infiniment petite d'une Courbe formée par le développement d'un autre, étant considérée comme un arc de cercle infiniment petit décrit sur le rayon de la Développée tel qu'il est en cet instant, il s'ensuit que cette portion de Courbe est d'autant plus ou moins courbe que le rayon de la Développée correspondant est plus court ou plus long; & par conséquent le rayon de la Développée d'une Courbe détermine par la variation ou il est toujours, hormis dans un cas, celle de la courbure de la Courbe dans toutes ses portions, ou dans tous ses arcs infiniment petits. Si le rayon de la Développée ne change point, ce qui n'arrive que dans le Cercle, la courbure est uniforme, & toujours la même. Si ce rayon est infini, la courbure devient la moindre qu'il soit possible, c'est-à-dire, une ligne droite; s'il est nul ou zero, la courbure devient infiniment grande; c'est-à-dire, plus grande que celle d'aucun cercle fini, quelque petit qu'il soit.

Il arrive dans une infinité de Courbes, par exemple, dans les Sections Coniques, que quand on cherche quel est le rayon de la Développée à leur sommet, on le trouve d'une certaine longueur déterminée; c'est-à-dire, qu'entre le sommet de ces Courbes & celui de leurs Développées, il y a une distance de cette même longueur. Ce n'est pas qu'on ne puisse toujours développer la Développée en commençant à son sommet, auquel cas il n'y a nulle distance entre ce sommet, & celui de la Cour-

be qui naît du développement : & le rayon de la Développée étant nul, on voit naître une Courbe dont la courbure à son sommet est infiniment grande. Mais la courbure d'une Section Conique à son sommet n'étant pas infiniment grande, si l'on veut que la même Développée produise une Section Conique, il faut nécessairement que le rayon de la Développée au sommet de cette Section ait une certaine longueur, telle qu'elle doit être pour la courbure déterminée du sommet, autrement la même Développée produiroit une autre Courbe qu'une Section Conique. Delà vient qu'en développant une Courbe déterminée, si on en veut faire naître une certaine autre Courbe déterminée, il faut souvent concevoir qu'à l'origine du développement la Ligne qui enveloppe excede d'une certaine longueur la Courbe enveloppée.

La courbure n'entre pas seulement dans les réfractions par le degré dont elle est, mais encore par la maniere dont elle est tournée à l'égard des rayons incidens; c'est-à-dire, qu'elle fait différens effets selon qu'elle est concave ou convexe de leur côté. Si une courbure convexe rend convergens des rayons paralleles, la même courbure concave les rend divergens. La convexité ou la concavité se déterminent encore par les rayons de la développée : car ils sont toujours du côté de la concavité ; puisque ce sont toujours des rayons d'arcs de cercle; & par conséquent si l'on a supposé une Courbe convexe du côté de l'objet lumineux, les rayons de sa Développée seront de l'autre côté de cette Courbe ; & si dans cette supposition on a affecté ces rayons du signe *plus*, ou, ce qui est la même chose, si on les a rendus positifs, on n'a, selon l'usage établi en Géométrie, qu'à les affecter du signe *moins*, ou qu'à les rendre négatifs, pour faire que la même Courbe soit concave du côté de l'objet lumineux. Si l'on veut que la Courbe devienne une ligne droite, il n'y a qu'à rendre les rayons de la Développée infinis : car alors ils deviennent rayons d'un cercle infini, dont la circonférence

infiniment peu courbe, ne peut être qu'une ligne droite.

Il reste le 3e point qui rentre dans la réfraction, c'est-à dire, le parallélisme, la divergence, ou la convergence que les rayons d'un même point ont entr'eux, lorsqu'ils tombent sur la surface qui les rompt. Naturellement tous les rayons d'un même point sont divergens, & ils le sont d'autant plus que le point lumineux est plus proche. Par conséquent leur divergence décroît d'autant plus, & approche d'autant plus du parallélisme que le point lumineux est plus éloigné, & il doit l'être infiniment afin que les rayons soient paralleles, ou du moins il doit être à une si grande distance que l'angle aigu des rayons puisse sans une erreur sensible être compté pour rien. Jamais des rayons d'un même point ne peuvent tomber convergens sur une surface que par accident; c'est-à-dire, à moins qu'ils n'aient été déja rompus par une autre surface, qui ait changé leur divergence naturelle en convergence.

Les rayons directs, qui tombent donc toujours divergens sur une surface du côté qu'elle regarde le point lumineux, auroient été convergens par rapport à ce même côté de la surface, si le point lumineux avoit passé de l'autre côté. Par conséquent si lorsque les rayons tombent divergens la distance du point lumineux à la surface est une grandeur positive, on n'aura qu'à la rendre négative pour faire que les rayons tombent convergens sur ce même côté de la surface; & pour les rendre paralleles il n'y a qu'à rendre infinie cette même distance du point lumineux. J'ai supposé ici que l'on sçût qu'en Géométrie les grandeurs positives & les négatives sont toujours contrairement posées par rapport à quelque terme commun d'où l'on commence à les considérer, ou à les compter.

La Formule que M. de l'Hôpital a donnée dans son Analyse des Infiniment petits pour trouver le point ou un rayon rompu sur un point quelconque de telle Courbe

be qu'on voudra, touche la Caustique par réfraction, ne devoit donc comprendre, & elle ne comprend en effet que le rapport constant des deux Sinus, ou de la réfraction, le rayon de la Développée, ou quelques grandeurs qui en dépendent, & la distance du point lumineux, les trois seuls principes qui entrent dans toutes les réfractions, & les modifient différemment par leurs combinaisons différentes. Mais M. de l'Hôpital n'a considéré que la premiere surface qui rompt les rayons : or dans la pratique un Verre ou une Lentille qu'on emploie à cet usage, a nécessairement deux surfaces, & la seconde augmente, ou affoiblit, ou détruit, ou change la modification que les rayons ont reçue de la premiere : car alors ils passent du verre dans l'air, second passage d'un Milieu dans un Milieu différent. C'est là ce que M. Guisnée a entrepris de rechercher d'une maniere infiniment générale, & par conséquent, car cette conséquence est presque absolument nécessaire, il emploie la Méthode des Infiniment petits.

Il suppose une Lentille convexe des deux côtés, formée de deux surfaces courbes quelconques, tellement posées que l'axe de la Lentille soit aussi leur axe commun. Le point lumineux est sur l'axe à une distance finie quelconque, & par conséquent ses rayons tombent divergens sur la Lentille. M. Guisnée a, par la Formule de M. de l'Hôpital, le point de l'axe où la premiere surface fait concourir deux rayons rompus infiniment proches ; ensuite il cherche dans quel autre point de l'axe la seconde surface les fait concourir, il appelle Foyer de la Lentille ce nouveau point, & sa distance à la seconde surface est une grandeur qui lui vient dans une Formule générale, où il n'entre que les rayons des Développées des deux surfaces, les deux autres grandeurs qui sont aussi les principes de toutes les réfractions, & de plus, l'épaisseur de la Lentille, 4e grandeur qui ne pouvoit avoir lieu dans la recherche de M. de l'Hôpital. Supposé que la seconde surface rapproche le Foyer causé par la premiere, il est

visible que plus la lentille est épaisse, plus les rayons rompus infiniment proches conservent long-temps le peu de convergence ou de disposition à s'unir, que leur avoit donnée la premiere surface, & par conséquent la seconde agissant plus tard sur eux, rapproche d'autant moins le Foyer sur l'axe. Au contraire si l'épaisseur de la lentille est si petite, qu'elle puisse n'être comptée pour rien, la seconde surface ne laisse les rayons qu'un seul instant avec le peu de convergence qu'ils avoient reçue, & leur donne aussi-tôt une convergence plus forte, & par conséquent fait avancer le Foyer sur l'axe, autant qu'il est possible. Delà vient que M. Guisnée propose une double Formule, l'une où l'épaisseur de la lentille est comptée, l'autre où elle ne l'est pas. Dans la pratique ordinaire, elle ne merite pas de l'être.

Il est très-facile de juger par ce qui a été dit, que quoique les Formules de M. Guisnée ne soient que pour le cas où des rayons divergens tombent sur une lentille convexe des deux côtés, elles ne laissent pas de s'étendre à tous les autres où les rayons sont paralleles, ou même convergens, & où la Lentille est ou concave, ou même plane, soit d'un côté, soit de tous les deux, & où elle n'est convexe que d'un côté, & concave ou plane de l'autre. Un leger changement de *plus* en *moins*, appliqué aux grandeurs qui doivent le porter, ou la supposition d'une grandeur infinie, donne tous ces différens cas, & toutes les combinaisons qui en peuvent résulter. Nous pouvons ici en ébaucher une idée sans aucun calcul algébrique

Une surface courbe a d'autant plus de *force* pour changer la direction des rayons, qu'elle est plus courbe ; & comme la lentille a deux surfaces, il faut savoir, 1°. Si elles conspirent toutes deux au même effet, c'est-à-dire, à rendre les rayons paralleles, divergens, ou convergens, ou si l'une détruit, en tout ou en partie, l'effet de l'autre. 2°. Quelle est la force de chacune. D'ailleurs

il eſt d'autant plus difficile à une ſurface de donner une certaine direction aux rayons, qu'elle les a reçus ſous une direction plus oppoſée. Ainſi une ſurface convexe, qui naturellement rend les rayons convergens, les rend d'autant moins convergens, ou, ce qui revient au même, les réunit d'autant plus loin, qu'elle les a reçus plus divergens, ou d'un point lumineux plus proche; & même elle peut les avoir reçus ſi divergens, & avoir ſi peu de force par rapport à cette grande divergence, qu'elle ne fera que les rendre moins divergens. En ce cas-là les rayons ne ſe réuniront donc jamais, au contraire ils s'écarteront toujours : mais comme ils ſont devenus moins divergens qu'ils n'étoient en partant du point lumineux, ils ont pris la même direction que s'ils étoient partis d'un point lumineux plus éloigné de la ſurface convexe. Ce nouveau point auquel ils ſe rapportent comme s'ils en étoient venus, n'eſt point un Foyer *réel* pareil à celui où des rayons ſe réuniroient après avoir été rompus : mais c'eſt une autre eſpece de Foyer que quelques-uns appellent *virtuel.* Si l'on a établi dans le calcul algébrique que le Foyer réel ſoit poſitif, le virtuel ſera négatif, parce qu'ils ſont toujours poſés l'un d'un côté de la ſurface qui fait la réfraction, l'autre de l'autre.

Si dans la ſuppoſition que nous venons de faire, tout le reſte demeurant le même, la ſurface convexe avoit eu un peu plus de force juſqu'à un certain point, elle auroit abſolument ôté aux rayons leur divergence, & l'auroit changée en paralléliſme. Ce ſeroit la même choſe, ſi la ſurface demeurant la même, le point lumineux s'éloignoit juſqu'à un certain point : car une moindre divergence des rayons ſe ſeroit changée en paralléliſme. En ce cas les rayons devenus paralleles peuvent être cenſés ſe réunir à une diſtance infinie; c'eſt-à-dire, que le Foyer réel eſt infiniment éloigné, ou, ſi l'on veut, ce même Foyer infiniment éloigné eſt virtuel, puiſque les rayons devenus paralleles ont la même direction que s'ils étoient partis

d'un point lumineux infiniment éloigné. Cette confusion du Foyer réel & du virtuel en ce cas, s'accorde avec le calcul algébrique qui donne l'Infini pour un terme commun du positif & du négatif.

Il est aisé de joindre à ces considérations celle d'une seconde surface qui fortifiera, ou diminuera ou détruira l'effet de la premiere. Il peut donc arriver que les rayons, en sortant de la lentille, reprennent ou la même espece de direction ou précisément la même direction qu'ils avoient perdue en y entrant.

Une lentille étant convexe des deux côtés, sa premiere surface peut être si forte, ou la divergence des rayons si petite, & en même tems l'épaisseur de la lentille si grande, que le Foyer de la premiere surface se fera dans cette épaisseur, après quoi les rayons partant de ce Foyer tomberont nécessairement divergens sur la seconde surface, & fort divergens à cause de la proximité du Foyer ou point lumineux; & cette seconde surface pourra bien n'avoir la force que de diminuer cette grande divergence, de sorte qu'une lentille convexe des deux côtés qui naturellement rend convergens & réunit dans un Foyer réel les rayons qu'elle a reçus divergens, les rendra tels qu'elle les aura reçus, ce qui auroit pû passer pour une espece de paradoxe. Il est clair que dans la supposition présente, l'épaisseur de la Lentille peut être diminuée de façon que le Foyer de la premiere surface tombera sur la seconde, auquel cas la distance de ce Foyer à la seconde surface est nulle, ce qui, joint aux cas où cette distance est positive, ou négative, ou infinie, la représente de toutes les manieres dont elle peut être conçue.

Mais il faut avouer que tous les cas où l'épaisseur de la Lentille est considérée ne sont que pour la curiosité, & pour l'honneur de l'universalité de la Formule. Cette épaisseur étant supprimée, ou plutôt négligée dans le calcul, il ne reste point d'autres cas où la distance du foyer soit nulle, que ceux où le rayon de la Dévelopée de

l'une ou de l'autre ſurface, ou de toutes les deux, eſt nul. En effet quand le rayon de la Développée de la premiére ſurface eſt nul, ſa courbure, & par conſéquent ſa force eſt auſſi grande qu'il ſoit poſſible, & elle rompt un rayon infiniment proche de l'axe, de maniere qu'elle le fait dans le même inſtant concourir avec celui qui eſt dans l'axe; d'où il ſuit néceſſairement que la réunion de ces rayons ne ſe fait point au delà de la Lentille. Il en va de même, ſi c'eſt le rayon de la Développée de la ſeconde ſurface qui ſoit nul.

Mais il faut convenir encore que ces cas-là ne ſont point pour la pratique. On n'emploie que des Lentilles dont les deux ſurfaces ſont ſphériques, ou tout au plus l'une des deux planes: or dans un cercle le rayon de la Développée eſt toujours le rayon même du cercle, & ſi l'on veut que le cercle devienne une ligne droite, il faut concevoir ſon rayon infini; & comme d'ailleurs l'épaiſſeur de la Lentille n'eſt comptée pour rien, on ne trouve jamais dans la pratique, que la diſtance du Foyer à la ſeconde ſurface ſoit nulle.

Les rayons des Développées étant donc changés dans la Formule de M. Guiſnée en rayons de cercles tels qu'on voudra, on a une Formule particuliere qui n'eſt que pour les Verres ſphériques, & qui cependant donne encore beaucoup plus de combinaiſons que l'uſage n'en demande: mais il eſt bon d'avoir devant ſoi une plus grande étendue de Théorie, qu'il n'eſt néceſſaire, & on voit avec plaiſir que l'on n'a qu'à retrancher, & à ſe réduire.

Tout dépendra maintenant de la diſtance du point lumineux, & de la courbure ſphérique des deux ſurfaces. Si le verre eſt convexe des deux côtés, & que les rayons tombent divergens, plus le point lumineux eſt éloigné, plus le Foyer ſera proche, à cauſe du peu de divergence des rayons, & du peu de difficulté de les réunir; plus les demi-diametres des ſurfaces ſeront grands, plus le Foyer ſera éloigné à cauſe de la foibleſſe des ſurfaces;

ainſi la grandeur de la diſtance du point lumineux & la grandeur des demi-diametres des ſurfaces ſont deux eſpeces de Forces oppoſées qui font des effets contraires; & il faut, pour conſpirer au même effet, une grande diſtance du point lumineux & de petits demi-diametres des ſurfaces, ou au contraire. L'effet d'un verre convexe eſt d'autant plus grand, que le Foyer eſt plus proche: ſi le Foyer eſt infiniment éloigné, cet effet eſt moindre, & moindre encore ſi le Foyer n'eſt que virtuel.

On trouve par la Formule, que quand les deux Forces oppoſées ſont en telle proportion que deux fois le produit des deux demi-diametres l'un par l'autre, eſt égal au produit des deux demi-diametres par la diſtance du point lumineux, la diſtance du Foyer eſt infinie; que quand la diſtance du point lumineux eſt plus grande, celle du Foyer eſt moindre, & finie; & que quand la diſtance du point lumineux eſt moindre, celle du Foyer eſt plus qu'infinie, c'eſt-à-dire, négative; ou, ce qui eſt la même choſe, que le Foyer n'eſt que virtuel. Le verre demeurant le même, on voit ſon effet qui diminue toujours ſelon que le point lumineux eſt plus proche.

Si le point lumineux eſt placé à une diſtance du verre égale à l'un des deux demi-diametres, tout dépendra de leur rapport de grandeur, qui fait la force des ſurfaces. Lorſque les deux demi-diametres ſont égaux, la diſtance du Foyer eſt infinie, ſi celui qui eſt égal à la diſtance du point lumineux, eſt plus grand que l'autre, la diſtance du Foyer eſt finie, & l'effet du verre plus grand, parce que le point lumineux eſt plus éloigné. Si c'eſt le contraire, la diſtance du Foyer eſt plus qu'infinie.

Quand on fait des verres pour de grandes Lunettes, les rayons venus d'un point du Soleil ſont cenſés venir d'un point infiniment éloigné. Cette diſtance étant donc ſuppoſée infinie, & le verre convexe des deux côtés, c'eſt la courbure des deux ſurfaces qui fait tout, le Foyer

ne peut plus être que réel, il ne sauroit être infini, & il est d'autant plus éloigné, que les deux demi-diametres sont plus grands. S'ils sont égaux, le Foyer est à la distance d'un demi-diametre, & quand on dit dans l'usage commun qu'un verre convexe a tant de pieds de Foyer, ce nombre de pieds est aussi la longueur du demi-diametre des deux spheres dont il a été formé, quand elles sont égales.

Si l'on veut que les rayons tombent convergens sur le verre convexe, on voit que le Foyer ne peut être que réel & fini, ce qui est clair de soi-même.

Si l'on prend au lieu d'un verre convexe un verre concave des deux côtés, on voit que le Foyer ne peut être que virtuel, tant que les rayons tombent divergens ou paralleles; mais que s'ils tombent convergens, il peut être réel ou virtuel ou infini, ce qu'on a déja vû en général.

On sait en Dioptrique que le point lumineux & le Foyer sont deux points réciproques; c'est-à-dire que le Foyer que donne un certain verre aux rayons d'un point lumineux, étant connu, si l'on mettoit le point lumineux à la place du Foyer, il auroit son nouveau Foyer au même point où étoit sa premiere position, & que par conséquent les rayons repasseroient par le même chemin. Cette réciprocation suit de la Formule de M. Guisnée aussi évidemment que tout le reste.

On en tire encore sans aucune peine le nouveau Foyer qui résulteroit d'une seconde Lentille placée sur le même axe que la premiere, ainsi qu'il se pratique dans les Lunettes. Car quel sera l'effet de cette seconde Lentille? Elle recevra les rayons tels que la premiere les lui envoyera, convergens, par exemple, & le degré de leur convergence sera plus ou moins grand selon que le Foyer de la premiere lentille en sera plus ou moins proche. La seconde sera donc dans le même cas que si elle recevoit des rayons convergens d'un point lumineux placé où est le Foyer de la premiere lentille. Or on a vû que ce cas

eſt un de ceux qui ſont compris dans la ſuppoſition d'une ſeule Lentille, & par conſéquent le Foyer de la ſeconde lentille, tel que le donnera la Formule générale, ſera celui que produiront les deux lentilles enſemble. Il eſt viſible qu'un plus grand nombre de Lentilles ne ſeroit pas plus embarraſſant.

Toutes les Propoſitions que cette Théorie embraſſe ont leurs *inverſes*, qui ne doivent pas non plus être difficiles à trouver. Au lieu que l'on a toujours cherché les Foyers, tous les principes qui entrent dans la réfraction étant connus, on pourroit ſuppoſer les Foyers connus, avec tous les principes de la réfraction, horſmis un ſeul que l'on chercheroit, & il eſt clair qu'on le découvriroit très-aiſément. Enfin il ne paroît pas que ſur toute cette matiere des Foyers on puiſſe rien deſirer que la Théorie de M. Guiſnée ne donne dans l'inſtant.



ACOUSTIQUE.

MOnſieur Carré a lû dans quelques Aſſemblées la Théorie générale du ſon qui doit précéder ſa Deſcription des Inſtrumens de Muſique, & qui avoit été
* p. 137. annoncée dans l'Hiſt. de 1702 *. Il y a prouvé que le Son n'eſt pas immédiatement produit par les vibrations totales & ſenſibles du Corps Sonore, par exemple, d'une Corde à boyau, mais par les tremblemens inſenſibles des petites parties, toujours aidés, & quelquefois cauſés par les vibrations totales. Mais comme ces tremblemens ſont en même raiſon pour le nombre & pour la fréquence que les vibrations totales, on peut toujours prendre ces vibrations pour la meſure de tous les Accords. Enſuite M. Carré eſt entré dans un ample détail de

de tous les Accords de Musique soit consonans soit dissonans : & comme des rapports de nombres, qui font la nature & l'essence de tous les Accords, ne fourniroient pas toujours des raisons assez plausibles de leur agrément ou de leur desagrément, il a été obligé de mêler souvent la Métaphysique à la Mathématique, & de remonter jusqu'aux principes que nous avions établis dans l'Histoire de 1701. * Le Traité des Accords a conduit M. Carré à un Traité du Monochorde, dont les différentes divisions donnent tous les Accords possibles, & là, il a décrit un nouveau Monochorde de son invention. La Théorie de la Musique est aussi sublime, que la Pratique en est délicieuse, & l'une est aussi charmante pour l'Esprit, que l'autre l'est pour les Sens & pour l'imagination.

* p. 123. & suiv.



MECHANIQUE.

SUR LE CENTRE D'OSCILLATION.

UN des plus grands caractéres de la Vérité, c'est d'être féconde. La Théorie générale du centre d'Oscillation, trouvée par M. Bernoulli de Bâle, & rapportée dans l'Histoire de 1703 *, a produit comme par surcroît, la décision de deux autres questions importantes en cette matiere.

V. les M. p. 136.

* p. 114.

I. M. Huguens, qui a aussi donné une Formule pour le centre d'Oscillation, n'avoit pû y parvenir qu'en supposant que si plusieurs poids attachés comme l'on voudra à un Pendule, se détachoient & se séparoient les uns des autres, au moment que le Pendule cesseroit de des-

cendre, chacun d'eux en vertu de la viteſſe acquiſe pendant ſa chûte remonteroit à telle hauteur, que leur centre de gravité commun ſe trouveroit remonté à la même hauteur d'où il étoit deſcendu. Pour ſe faire plus aiſément une image, il faut concevoir deux poids dont chacun eſt attaché à l'extrémité d'une ligne qui traverſe la verge, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, ces lignes étant inégalement diſtantes du point de ſuſpenſion, & même inégales entr'elles. Lorſque la verge eſt devenue par ſa chûte une ligne verticale, on ſuppoſe qu'elle s'arrête là; les deux poids ont acquis chacun différentes viteſſes: & ſi avec ces viteſſes acquiſes on les rapporte à la verge, ils y auront un centre de gravité commun, tel que ces poids multipliés chacun par ſa diſtance de ce centre, & par ſa viteſſe feroient de part & d'autre des produits égaux. On peut concevoir que ce même centre étoit auſſi ſur la verge, avant qu'elle commençât à tomber & lorſqu'elle étoit horiſontale. Si l'on ſuppoſe donc maintenant que la verge étant devenue verticale, les poids s'en détachent, ſe ſéparent l'un de l'autre, & remontent perpendiculairement chacun avec ſa viteſſe acquiſe, & par conſéquent à la hauteur que preſcrira cette viteſſe; ſi de plus la verge que l'on peut ſuppoſer qui étoit devenue d'horiſontale verticale, remonte auſſi & redevient horiſontale, M. Huguens a prétendu, mais ſans le prouver, que les différentes hauteurs auxquelles remontoient les deux poids détachés, étoient telles que leur centre de gravité commun ſe retrouvoit encore ſur la verge redevenue horiſontale, ainſi qu'il y étoit d'abord, & par conſéquent qu'il étoit remonté auſſi haut qu'il étoit deſcendu. On entend aſſez que ſi le centre de gravité ſe retrouve encore ſur la verge, cela veut dire que les différentes viteſſes des deux poids rapportées à cette verge, & multipliées ainſi qu'il le faut pour les centres de gravité, feroient des produits égaux, qu'elles ne feroient pas étant rapportées à toute autre ligne tirée du point de ſuſpenſion.

Cette ſuppoſition de M. Huguens fut attaquée par un habile Géometre, qui en conteſta la vérité. D'autres, en la jugeant vraie, la trouverent trop hardie pour être reçue dans une Science qui démontre tout. Enfin la diſpoſition la plus générale fut d'en deſirer & d'en attendre la preuve, & juſques-là de demeurer en ſuſpens.

M. Bernoulli juſtifie préſentement M. Huguens, & démontre en rigueur géométrique ce que l'autre n'avoit conjecturé que par génie, & par un certain goût de vérité. Il eſt inconteſtable que le Pendule ſimple, ou, ce qui eſt la même choſe, la verge délivrée des poids qui y étoient attachés, à l'exception de celui qu'elle porte à ſon extrémité, remontera à la même hauteur d'où elle étoit deſcendue, & redeviendra horiſontale, ſi elle l'étoit d'abord. Par-là M. Bernoulli trouve la hauteur à laquelle remonteront les poids détachés : car cette hauteur pour chacun de ces poids, eſt à celle du Pendule ſimple comme les quarrés des viteſſes, ou des diſtances de chaque poids au point de ſuſpenſion. La hauteur de chacun des poids détachés étant trouvée, elle le met à une certaine diſtance de la verge redevenue horiſontale, M. Bernoulli prend cette diſtance pour la viteſſe que ce poids a par rapport à la verge, & détermine l'expreſſion algébrique de ces nouvelles viteſſes, différentes pour chacun des deux poids. Le Pendule ſimple entre dans cette expreſſion, mais marqué par une ſeule lettre, & ſi à cette lettre on ſubſtitue la valeur générale que M. Bernoulli a trouvée du Pendule ſimple, on voit auſſitôt que les deux viteſſes des poids détachés multipliées par ces poids, donnent des produits égaux : & comme ces viteſſes n'ont été priſes que par rapport à la verge redevenue horiſontale, ſur laquelle étoit d'abord le centre de gravité de ces poids, il s'enſuit que ce centre y eſt encore, puiſque ce n'eſt que l'égalité de ces produits qui le détermine. M. Huguens, pour démontrer ſa Formule d'Oſcillation, avoit eu beſoin de ſuppoſer que le centre de gravité des poids détachés remontoit à la même hau-

teur d'où il étoit deſcendu loſqu'ils étoient liés enſemble; & M. Bernoulli prouve par ſa Formule du centre d'Oſcillation, toute différente de l'autre, que cette ſuppoſition de M. Huguens étoit vraie.

II. On avoit encore ſur cette même matiere une très-forte conjecture que l'on n'avoit pû pouſſer juſqu'à la démonſtration. Je ſuppoſe ici que l'on ſache ce que c'eſt que les centres de percuſſion, ſi amplement expliqués dans l'Hiſtoire de 1702.* Quand par la Formule générale de M. Huguens, ou par telle autre qu'on pût avoir, on avoit trouvé le centre d'oſcillation de quelque figure particuliere, & qu'enſuite on venoit à chercher le centre de percuſſion de cette même Figure, on les trouvoit toujours au même point. Il y avoit donc une grande apparence que ces deux centres étoient le même, & en toute autre Science que la Géométrie, on n'en auroit pas douté: mais il manquoit pour une entiere certitude d'avoir une Formule générale du centre de percuſſion, qui fût la même que celle du centre d'oſcillation. Ce ſcrupule géométrique ſi délicat eſt levé par M. Bernoulli, & il fait voir qu'en cherchant le centre de percuſſion qui eſt le point autour duquel les produits des poids par leurs diſtances à ce point, & par leurs viteſſes, ſont égaux, on arrive à la même Formule que celle de ſon centre d'oſcillation. Ce qui rend viſible cette conformité, ou plutôt cette *identité* auparavant cachée, c'eſt qu'il a réduit les centres d'oſcillation aux principes du levier, auxquels on ne ſavoit rapporter que les centres de percuſſion. Ainſi deux Formules qui ne devoient être que la même, tirées de différens principes, ne ſe reſſembloient point, & quoique dans l'application on leur trouvât toujours les mêmes effets, on ne les a pû reconnoître ſûrement pour la même, juſqu'à ce que M. Bernoulli ait eu l'art de les faire naître de la même ſource, & de les montrer ſous la même Forme. Si l'on veut ſe rappeller ici ce qui a été dit ſur les Centres d'oſcillation de M. Bernoulli dans l'Hiſt. de 1703, on verra que toutes

* page 108. & ſuiv.

les considérations qui y entrent, ne sont que celles qui doivent entrer dans les centres de percussion, & ce sera là une espece de démonstration métaphysique aussi évidente que les géométriques.

SUR LA FIGURE DE L'EXTRADOS D'UNE VOUTE CIRCULAIRE, DONT TOUS LES VOUSSOIRS SONT EN EQUILIBRE ENTR'EUX.

UNe Voute ou un Arc demi-circulaire étant posé sur ses deux *piédroits*, & toutes les pierres ou *Voussoirs*, qui composent cet Arc, étant taillés & posés entr'eux de maniere que leurs *joints* prolongés se rencontrent tous au centre de l'arc, il est évident que tous les Voussoirs ont une figure de Coin, plus large par haut que par bas, en vertu de laquelle ils s'appuyent & se soutiennent les uns les autres, & résistent réciproquement à l'effort de leur pesanteur qui les porteroit à tomber. Le Voussoir du milieu de l'arc, qui est perpendiculaire à l'horison, & qu'on appelle *Clef de Voute*, est soutenu de part & d'autre par les deux voussoirs voisins, précisément comme par deux plans inclinés; & par conséquent l'effort qu'il fait pour tomber, n'est pas égal à sa pesanteur, mais en est une certaine partie d'autant plus grande que les plans inclinés qui le soutiennent sont moins inclinés, de sorte que s'ils étoient infiniment peu inclinés, c'est-à-dire, perpendiculaires à l'horison aussi-bien que la Clef de voute, elle tendroit à tomber par toute sa pesanteur, ne seroit plus du tout soutenue, & tomberoit effectivement, si le ciment, que l'on ne considere pas ici, ne l'en empêchoit. Le second Voussoir, qui est à droite ou à gauche de la Clef de voute, est soutenu par un troisieme voussoir, qui en vertu de la figure

de la voute eſt néceſſairement plus incliné à l'égard du ſecond, que le ſecond ne l'eſt à l'égard du premier, & par conſéquent le ſecond vouſſoir dans l'effort qu'il fait pour tomber, exerce une moindre partie de ſa peſanteur que le premier. Par la même raiſon, tous les vouſſoirs, à compter depuis la Clef de voute, vont toujours en exerçant une moindre partie de leur peſanteur totale, & enfin le dernier qui eſt poſé ſur une ſurface horiſontale du piédroit, n'exerce aucune partie de ſa peſanteur, ou, ce qui eſt la même choſe, ne fait nul effort pour tomber, puiſqu'il eſt entierement ſoutenu par le piédroit.

Si l'on veut que tous les vouſſoirs faſſent un effort égal pour tomber, ou ſoient en équilibre, il eſt viſible que chacun, depuis la Clef de voute juſqu'au piédroit, exerçant toujours une moindre partie de ſa peſanteur totale, le premier, par exemple, n'en exerçant que la moitié, le ſecond un tiers, le troiſieme un quart, &c. il n'y a pas d'autre moyen d'égaler ces différentes parties, qu'en augmentant à proportion les touts dont elles ſont parties, c'eſt-á-dire, qu'il faut que le ſecond vouſſoir ſoit plus peſant que le premier, le troiſieme plus que le ſecond, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier, qui doit être infiniment peſant, parce qu'il ne fait nul effort pour tomber, & qu'une partie nulle de ſa peſanteur ne peut être égale aux efforts finis des autres vouſſoirs, à moins que cette peſanteur ne ſoit infiniment grande. Pour prendre cette même idée d'une maniere plus ſenſible, & moins métaphyſique, il n'y a qu'à faire réflexion que tous les vouſſoirs, hormis le dernier, ne pourroient laiſſer tomber un autre vouſſoir quelconque ſans s'élever, qu'ils réſiſtent à cette élévation juſqu'à un certain point déterminé par la grandeur de leur poids, & par la partie qu'ils en exercent; qu'il n'y a que le dernier vouſſoir qui puiſſe en laiſſer tomber un autre, ſans s'élever en aucune ſorte, & ſeulement en gliſſant horiſontalement; que les poids, tant qu'ils ſont finis, n'apportent aucune réſiſtance au mouvement horiſontal, & qu'ils ne com-

mencent à y en apporter une finie que quand on les conçoit infinis.

M. de la Hire, dans son *Traité de Méchanique* imprimé en 1695, a démontré quelle étoit la proportion selon laquelle il falloit augmenter la pesanteur des Voussoirs d'un Arc demi-circulaire, afin qu'ils fussent tous en équilibre, ce qui est la disposition la plus sûre que l'on puisse donner à une voute, pour la rendre durable. Jusque-là les Architectes n'avoient eu aucune regle précise, & ne s'étoient conduits qu'en tâtonnant. Si l'on compte les degrés d'un quart de cercle depuis le milieu de la Clef de voute, jusqu'à un piédroit, l'extrémité de chaque voussoir appartiendra à un arc d'autant plus grand, qu'elle sera plus éloignée de la Clef, & il faut, par la regle de M. de la Hire, augmenter la pesanteur d'un voussoir par-dessus celle de la Clef, autant que la tangente de l'arc de ce voussoir l'emporte sur la tangente de l'arc de la moitié de la Clef. La tangente du dernier voussoir devient nécessairement infinie, & par conséquent aussi sa pesanteur : mais comme l'infini ne se trouve pas dans la pratique, cela se réduit à charger, autant qu'il est possible, les derniers voussoirs, afin qu'ils résistent à l'effort que fait la voute pour les écarter, qui est ce qu'on appelle sa *poussée*.

M. Parent a cherché quelle seroit la courbure extérieure ou l'*Extrados* d'une voute, dont l'*Intrados* seroit circulaire, & tous les voussoirs en équilibre par leur pesanteur, selon la regle de M. de la Hire : car il est clair que tous ces voussoirs inégaux dans une certaine proportion, feroient en dehors une certaine courbure réguliere. Il ne l'a trouvée que par points, mais d'une maniere fort simple, de sorte que par sa methode on pourroit assez facilement construire une voute, dont on seroit sûr que tous les voussoirs seroient en équilibre.

Un fruit considérable de la recherche de M. Parent, c'est qu'il a découvert en même temps la mesure de la poussée de la voute, ou quel rapport a cette poussée au

poids de la voute entiere. On ſavoit ſeulement que cet effort étoit très-grand, & on y oppoſoit de groſſes maſſes de pierres, ou *culées*, plutôt trop fortes que trop foibles: mais on ne ſavoit point préciſément où il s'en falloit tenir. On pourra le ſavoir préſentement, les Arts ſe ſentent toujours du progrès de la Géométrie.

SUR LES FROTEMENS.

V. les M. p. 173. 206.

JUſqu'ici la Théorie de la Méchanique n'avoit point conſideré les Frotemens, faute d'en connoître préciſément la valeur. On calculoit l'avantage qu'une Force mouvante pouvoit tirer d'une Machine, ou par ſa diſtance à l'égard du point fixe, ou par la direction ſelon laquelle elle agiſſoit, on ſuppoſoit toujours dans ces démonſtrations que les corps, dont les ſurfaces devoient ſe mouvoir les unes ſur les autres, étoient parfaitement polis, & l'on s'attendoit bien que dans la pratique leurs Frotemens feroient perdre aux Forces mouvantes une partie de leur avantage, mais il n'y avoit que cette pratique même qui pût découvrir où devoit aller le déchet, & l'on riſquoit en quelque ſorte une Machine dont une bonne partie étoit inconnue.

* V. l'Hiſt. de 1699. p. 104. ſuiv.
* V. l'Hiſt. de 1700. p. 145. & ſuiv.

M. Amontons ayant le premier trouvé par expérience la valeur préciſe des Frotemens *, que M. Parent trouva enſuite par raiſonnement & par Géométrie *, le même M. Parent donne ici la maniere de faire entrer cette nouvelle conſidération dans toute la Théorie de la Méchanique, de ſorte qu'on n'aura plus beſoin d'attendre l'exécution pour ſavoir au juſte l'effet d'une Machine.

Si l'on ne conſidere pas les Frotemens, un corps peſant poſé ſur un plan incliné ne peut s'y ſoutenir, & il faut néceſſairement, ou qu'il gliſſe, ou qu'il roule & gliſſe en

en même-temps. Il glissera simplement, si la ligne de direction par laquelle il tend au centre de la terre, tombe sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre par rapport à l'horison, mais non pas par rapport au plan incliné; il glissera & roulera, si sa ligne de direction ne tombe pas sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre & par rapport à l'horison, & par rapport au plan incliné.

Mais si l'on tient compte des Frotemens, ce même corps pesant peut se soutenir sur un plan incliné dont la surface rude & inégale l'accrochera en quelque maniere. Il est visible que ce corps ne se soutiendra pas ainsi sur tous les plans inclinés possibles, & qu'il y en aura qui seront trop peu inclinés pour cet effet, ou, ce qui est la même chose, trop élevés. M. Parent cherche quelle est l'inclinaison nécessaire, & au-dessus de laquelle un certain corps déterminé ne se puisse plus soutenir par l'adhérence que cause le Frotement.

Il suppose que le Frotement n'est point proportionné aux surfaces, mais seulement à la pression, dont il est le tiers. Il tire la ligne de direction par laquelle le corps tend au centre de la terre; & cette ligne perpendiculaire à un plan horisontal est nécessairement oblique au plan incliné. L'action de la pesanteur du corps sur ce plan lui est donc oblique, & par conséquent, selon la Théorie des Mouvemens composés, elle peut être considérée comme résultant de deux autres actions dont l'une soit perpendiculaire à ce même plan, & l'autre parallele. La perpendiculaire est la pression du corps sur le plan en vertu de sa pesanteur, la parallele est la direction selon laquelle il tend à tomber, & par conséquent elle représente une force qui tireroit le corps en embas, & tendroit à surmonter le Frotement: or cette Force doit être égale au tiers de la pression; donc si ces deux lignes dans lesquelles on résout, & on décompose, pour ainsi dire, la direction oblique du corps pesant, sont telles que la parallele soit le tiers de la perpendicu-

laire, elles ont précisément le rapport qui est nécessaire afin que le Frotement du corps puisse être surmonté, ou, ce qui est la même chose, afin qu'il puisse tomber. Or le rapport de ces deux lignes entr'elles est toujours différent selon l'obliquité différente de la direction du corps, & cette obliquité est différente selon l'inclinaison du plan; donc afin que le corps puisse tomber, & qu'il ne puisse tomber sur tout autre plan moins élevé, il faut que l'inclinaison du plan soit telle que ces deux lignes qui composent la direction du corps aient entr'elles ce rapport précis.

Maintenant si une Force mouvante tiroit non parallelement à ce plan pour faire monter ce corps, il est clair qu'il faudroit qu'elle surmontât non seulement le Frotement causé par la pression du corps sur le plan, mais celui qu'elle y cause elle-même en le pressant par la traction, supposé qu'elle applique encore le corps sur le plan, ce qui arrive dans toutes les tractions non paralleles au plan, & qui en sont plus proches qu'une parallele. On sait déja quelle est la quantité du Frotement causé par la pesanteur du corps sur le plan incliné; il reste à savoir quelle est le Frotement causé par la traction de la Force mouvante, & on le découvrira par la même voie. Cette traction étant oblique au plan par la supposition, il la faut décomposer & diviser en deux dont l'une soit perpendiculaire, & l'autre parallele; la premiere est la quantité dont la Force mouvante applique, & presse le corps contre le plan en le tirant. On calcule par la Méchanique ordinaire de quelle quantité doit être la Force selon la direction par laquelle elle agit, selon la grandeur du poids, & l'inclinaison du plan: mais ce n'est pas assez, il la faut augmenter encore à proportion des deux pressions qu'elle a à vaincre, c'est-à-dire, l'augmenter du tiers de ces pressions prises ensemble.

M. Parent en détermine la valeur par la Géométrie & par Algebre, & la joignant avec ce que donne la Méchanique ordinaire, il compose une Formule générale qui exprime la Force accompagnée de toutes les circonstances, ou re-

vêtue de toutes les modifications qu'on peut confidérer dans le cas propofé, & dont les différentes combinaifons peuvent le faire varier à l'infini. Si l'on fait évanouir de la Formule générale les Frotemens, on retrouve toutes les conclufions de la Méchanique ordinaire.

Cette Théorie générale étant établie pour le plan incliné, M. Parent paffe fans peine, ou au Coin qui en eft une efpece, ou [illegible] Machines où il entre beaucoup de Frotement. Les mêmes principes regnent par-tout, & le fecret confifte toujours à trouver les preffions du poids, foit de la Force par la décompofition de leurs directions. Des cas plus compliqués ne font que plus longs à réfoudre, & non pas plus difficiles. Il paroît par les découvertes les plus générales & les plus fécondes où l'on foit arrivé jufqu'à préfent dans la Méchanique, qu'elle n'eft que la Science des Mouvemens compofés.

SUR UN NIVEAU

D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.

TOute la Science du Nivellement n'a pour objet que de déterminer deux ou plufieurs points également éloignés du centre de la terre. V. les M. p. 251.

La terre étant fphérique, du moins fenfiblement, tous les points qui font *de niveau* ou également éloignés de fon centre, font des points de fa circonférence, ou d'un cercle concentrique, & par conféquent deux points d'une Tangente à la circonférence de la terre, pris du même côté du point d'attouchement, ne fauroient être de niveau dans la rigueur mathématique. Mais comme la terre eft fort grande, & que dans une certaine étendue fa courbure ne differe nullement d'une ligne droite, on peut prendre fans aucune erreur pour points de niveau ceux

qui sont dans cette étendue. Ainsi les Anciens qui ne nivelloient à la fois qu'une distance de 20 pieds, n'étoient point à cet égard en danger de se tromper, quoiqu'ils en prissent les deux extrémités en ligne droite.

Si on niveloit des distances beaucoup plus grandes, les deux extrémités prises en ligne droite ne pourroient plus appartenir à la circonférence de la terre, mais à une Tangente de cette circonférence, de sorte que l'extrémité où se feroit l'opération étant sur le point d'attouchement de cette Tangente & de la circonférence, l'autre extrémité seroit aussi celle d'une Secante tirée du centre de la terre, & le point qu'elle détermineroit seroit élevé au-dessus de la circonférence, & par conséquent au-dessus du *vrai* niveau, de toute la quantité dont cette Sécante surpasseroit le demi-diametre de la terre. Cette extrémité d'une Sécante est dite être dans le Niveau *apparent*, parce que c'est celui que la vûe donne, & il est bien aisé de le réduire au vrai, puisqu'on sait par la Trigonométrie de combien chaque Sécante surpasse le Rayon, & que l'on a découvert par la Mesure de la Terre que l'Académie a faite, quelle est la valeur précise de son Rayon.

Faute d'avoir cette valeur du Rayon de la Terre, les Anciens n'eussent pû faire la réduction du niveau apparent au vrai, ou s'ils l'eussent entreprise ils seroient tombés dans de grandes erreurs. Aussi ne niveloient-ils que des distances de 20 pieds où cette réduction n'étoit aucunement nécessaire. On trouve par les Tables qui en ont été faites qu'à une distance de 50 toises le niveau apparent n'est élevé au-dessus du vrai que de $\frac{1}{3}$ de ligne, & par conséquent les Anciens avoient sur ce point beaucoup plus de sûreté qu'il ne leur en falloit.

La mesure de la Terre ayant été trouvée, la commodité de réduire le niveau apparent au vrai, invita les Géometres de l'Académie à niveler d'un seul *coup* de grandes distances, comme de 1000 toises. L'avantage

de ces grands coups de niveau, eſt que l'on fait ici, par exemple, en une ſeule opération, ce que les Anciens ne faiſoient qu'en trois cens, & outre le temps que l'on gagne, il eſt viſible que trois cens opérations ſont naturellement ſujettes à un nombre d'erreurs incomparablement plus grand qu'une ſeule. C'étoit auſſi par cette raiſon que les Anciens qui régloient ſur leurs nivellemens les grandes conduites d'eaux qu'ils faiſoient, prenoient toujours plus de pente qu'il n'étoit néceſſaire, ainſi qu'il a été dit dans l'Hiſt. de *1699* *. Ils ſe défioient avec juſtice du ſuccès de tant d'opérations. Il paroît qu'ils mettoient à ces ſortes d'Ouvrages beaucoup de travail & peu d'art, & nous, nous voulons préſentement que l'art nous épargne le travail.

* pag. 113.

Pour niveler tout d'un coup de grandes diſtances, il faut avoir des inſtrumens qui donnent bien ſûrement une ligne horiſontale, puiſque c'eſt celle dont l'extrémité ſera le niveau apparent : mais ce n'eſt pas une médiocre difficulté que de la déterminer dans la pratique.

Premierement il faut être bien ſûr que cette ligne ſoit une ligne, c'eſt-à-dire, conduite d'un ſeul point à un autre point : car autrement on prendroit à une grande diſtance pour le même point pluſieurs points différens d'un même plan vertical, & aſſez éloignés l'un de l'autre, & il s'agit d'une grande préciſion dans la pratique du nivellement. Autrefois on ſe contentoit de deux Pinnules percées chacune d'un trou le plus petit qu'il étoit poſſible, & l'on ſuppoſoit que l'objet vû par ces deux trous n'étoit qu'un point : mais il s'en falloit beaucoup que ce n'en fût qu'un, quelque petits que fuſſent les trous, & il s'en falloit d'autant plus que l'objet étoit plus éloigné. D'ailleurs pour peu que l'œil changeât de place, & eût de mouvement dans le temps de l'obſervation, c'étoit un autre point que l'on voyoit. Pour remédier à cet inconvénient, l'on a imaginé dans l'Académie, il y a déja du temps, d'employer au lieu de Pinnules une

Lunette avec un fil de Ver à ſoye très-délié poſé au foyer du verre objectif, ou plutôt avec deux fils qui ſe croiſent. Leur interſection arrête tous les rayons partis d'un ſeul point de l'objet que l'on ſuppoſe éloigné, puiſqu'elle ſe fait à l'endroit où ils ſe réuniſſent tous ; & comme on voit les deux fils ſur la peinture de l'objet qui ſe fait au Foyer, on eſt ſûr que l'endroit où on les voit ſe couper, n'eſt qu'un point de l'objet, ou du moins une partie auſſi petite que l'épaiſſeur des fils. L'œil a beau changer de place, ce ſont toujours les rayons du même point qui ſont arrêtés par l'interſection des fils, & l'on *pointe* toujours au même point. Cet ingénieux expédient a été mis en pratique avec beaucoup de ſuccès, depuis qu'il a été trouvé : mais M. de la Hire a jugé à propos d'y faire encore une réforme qui le perfectionne *, & il ſubſtitue aux filets de Ver à ſoye des traits auſſi déliés, & plus inaltérables, tracés ſur une petite glace.

* V. l'Hiſt. de 1701. p. 95.

En ſecond lieu il faut que la ligne du niveau apparent ſoit parfaitement horiſontale. D'abord on ſonge naturellement aux ſurfaces des liqueurs qui ſe mettent toujours de niveau. Auſſi le Niveau des Anciens n'étoit qu'une piéce de bois, longue de 20 pieds, égale à toute la diſtance qu'ils niveloient d'un ſeul coup, & au milieu de laquelle étoit un petit tuyau plein d'eau. Il ne leur devoit pas être fort difficile de conduire un rayon viſuel à une ſi petite diſtance le long de cette ſurface d'eau : mais pour de plus grandes diſtances, M. de la Hire a examiné de mettre au-deſſus de l'eau une Lunette avec ſes fils au Foyer, dans une poſition exactement parallele à la ſurface de l'eau. Ce parallèliſme fait la plus grande difficulté de l'exécution. C'eſt là le même niveau dont il a été parlé dans l'Hiſt. de 1699 * à l'occaſion de ce que M. Couplet y avoit ajouté pour le rendre plus commode.

* p. 112. & 113.

Une ligne ſera horiſontale, pourvû qu'elle ſoit per-

pendiculaire à une ligne verticale, ainſi il ſuffira encore pour ſonder la conſtruction d'un Niveau, de déterminer une ligne qui ſoit bien certainement verticale. C'eſt ce qu'on a fait par le moyen des poids ſuſpendus. Leur point de ſuſpenſion ou d'appui eſt certainement dans la même ligne verticale que leur centre de gravité, & pourvû que le fil qui les tient ſuſpendus ſoit très-délié, il eſt lui-même cette ligne. Reſte à poſer une Lunette dont l'axe lui ſoit bien perpendiculaire : car dans tous les Niveaux modernes on ſe ſert toujours d'une Lunette, à cauſe de l'avantage qu'elle donne de ne pointer qu'à un ſeul point de l'objet, & de plus, parce qu'elle eſt auſſi propre aux vûes les plus courtes qu'aux autres. On peut faire auſſi que la Lunette elle-même tienne lieu de poids, & qu'étant ſuſpendue horiſontalement elle donne pour ligne verticale celle qui joint ſon point de ſuſpenſion & ſon centre de gravité. C'eſt ſur ces ſuſpenſions que ſont fondés les Niveaux de Mrs Huguens & Roëmer. Mais M. de la Hire les croit ſujettes dans la pratique à pluſieurs inconvéniens expliqués dans ſon Mémoire.

Il a voulu trouver un Niveau qui n'y fût point expoſé. C'eſt une Lunette, non pas ſuſpendue par un point plus élevé que ſon centre de gravité, mais appuyée ſur un point qui ſoit plus bas, & par conſéquent toujours prête à tomber de côté ou d'autre à moins que d'être en équilibre. L'état de ſon équilibre détermine la ligne verticale, & enſuite l'horiſontale qui la coupe à angles droits. Le détail de la conſtruction eſt réſervé au Mémoire de l'Auteur. M. de la Hire aſſure qu'il s'en eſt ſervi à niveler d'un ſeul coup 1000. toiſes de diſtance ſans erreur ſenſible.

Il ne ſera peut-être pas inutile d'avertir ici que les hauteurs apparentes des objets, même de ceux qui ſont peu éloignés de la ſurface de la terre, ſont altérées par les réfractions, & d'autant plus altérées que ces objets

ſont ou plus élevés par rapport à l'Obſervateur, ou à une plus grande diſtance. D'ailleurs la grandeur de ces réfractions dépend auſſi & de l'heure du jour, & de la conſtitution de l'air, ſans aucune proportion qui ſoit encore bien connue. On ſait en général qu'il peut y avoir de l'erreur ſur les hauteurs apparentes, & en quelques occaſions particulieres on ſait à peu prés où elle peut aller. Les plus grands coups de niveau ſont à cet égard les plus dangereux : mais c'eſt un inconvénient commun à tous les Niveaux modernes, & qui étant preſque ſuffiſamment connu, n'a pas empêché que l'on n'ait fait de très-grands nivellemens avec une juſteſſe étonnante. Les Anciens qui ne connoiſſoient point les réfractions, ſe ſeroient ſouvent fort écartés du but, s'ils euſſent fait de grands nivellemens d'un ſeul coup : leur peu d'art en cette matiere étoit préciſément le reméde dont ils avoient beſoin.

SUR LES VITESSES DES CORPS

MUS SUIVANT DES COURBES.

V. les M. p 286.

IL ne ſuffit pas de découvrir une Vérité, il faut encore ſavoir ce qui la produit, & d'où elle vient : car ſi on ſe trompe ſur cette eſpece de cauſe, on peut croire qu'elle a lieu lorſqu'elle n'en a point, ou au contraire, & l'on donne à la vérité que l'on a découverte plus ou moins d'étendue qu'elle n'en doit avoir. Ceci ne s'entend que des matieres délicates, & l'on peut aſſurer que quand il en eſt queſtion, une démonſtration géométrique eſt capable de jetter dans l'erreur par les applications qu'on en fera, à moins qu'elle n'ait remonté juſqu'à la ſource de la vérité, & ne l'ait expoſée dans ſes premiers principes.

Galilée ayant trouvé ce beau Siſteme de la chute des Corps

Corps peſans, reçu aujourd'hui de tous les Philoſophes, par lequel les viteſſes d'un corps qui tombe verticalement, ſont, à chaque moment de ſa chute, comme les racines des hauteurs d'où il eſt tombé à compter depuis le commencement de la chute, trouva enſuite que ſi un corps tomboit ſur un plan incliné, les viteſſes qu'il avoit en différens momens de ſa chute, ſeroient encore dans la même proportion; & en effet puiſque ce corps tient de ſa chute toute ſa viteſſe, & qu'il ne tombe qu'autant qu'il y a de hauteur perpendiculaire dans le plan incliné, il paroît néceſſaire que ſa viteſſe ſe meſure & ſe regle toujours par cette hauteur, de même que ſi la chute étoit verticale. La propoſition de Galilée eſt vraie & inconteſtable.

Elle le conduiſit à croire que ſi un corps tomboit par deux plans inclinés contigus, & qui fiſſent un angle entr'eux, à peu-près comme un bâton briſé, la viteſſe ſe régleroit encore de la même maniere ſur la hauteur verticale des deux plans pris enſemble: car enfin ce n'eſt encore que ſelon cette hauteur que ſe fait la chute, & delà vient toute la viteſſe. Cependant M. Varignon démontra en 1693. que cette propoſition de Galilée, admiſe juſque-là par tous les Géometres, étoit fauſſe.

Sur ce fondement, il ſemble que les viteſſes d'un corps qui tombe en ſuivant la concavité d'une Courbe, d'une Cycloïde, par exemple, ne doivent point être comme les racines des hauteurs. Une Courbe n'eſt que la ſuite d'une infinité de plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, & par conſéquent la propoſition de Galilée ne doit pas non plus être vraie dans ce cas-là. Cependant elle l'eſt, quoiqu'avec une certaine reſtriction.

Tout ce mêlange de vérités & d'erreurs qui ſe reſſemblent tant, & qu'il eſt ſi aiſé de prendre les unes pour les autres, montre aſſez que l'on n'avoit point encore ſaiſi les premiers principes. Quand on y eſt une fois parvenu, on voit une diſtance infinie entre la vérité & l'er-

reur, & leur fausse ressemblance disparoît absolument.

M. Varignon a entrepris de démêler tout ce qui regarde les vitesses des corps qui tombent, & de mettre cette matiere dans un jour où elle n'avoit point encore été. Il suppose toujours, selon le Sisteme de Galilée, que les vitesses d'un corps qui tombe par une ligne verticale, sont dans les différens momens de sa chute comme les racines des hauteurs correspondantes.

Le grand principe que M. Varignon emploie, c'est celui des Mouvemens composés, sur lequel il a autrefois fondé toute sa Méchanique. Quand un corps est mû en même-temps par deux forces, qui ont des directions différentes, quelque angle que ces directions fassent entr'elles, il prend une direction *composée* qui est la diagonale du parallélogramme que feroient entr'elles les deux directions *simples*, & il décrit cette diagonale dans le même temps qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés du parallélogramme; de sorte que la vitesse que lui auroit imprimée l'une ou l'autre des deux Forces, est à celle qu'elles lui impriment toutes deux ensemble, comme le côté correspondant du parallélogramme est à la diagonale. Tout est donc connu dès que l'on a le rapport des deux Forces.

Un mouvement perpendiculaire ou parallele à un plan ne peut être conçû comme composé par rapport à ce plan, mais seulement quand il lui est oblique, & alors on le conçoit comme composé de deux autres mouvemens; l'un perpendiculaire, & l'autre parallele, dont les différens rapports, variables à l'infini, déterminent les différentes obliquités dont le mouvement composé est capable.

Un corps qui se meut obliquement à l'horison, ne fût-il poussé que par une seule Force, peut donc être conçu comme poussé par deux, dont l'une auroit eu une direction horisontale, & l'autre, une verticale; & sa vitesse ne seroit ni celle que lui auroit donnée la Force horisontale, ni celle que lui auroit donnée la verticale, mais

celle qui résulteroit des deux, & qui seroit exprimée par la diagonale du parallélogramme qu'elles formeroient. Par conséquent, puisque la Force verticale seule, ou, pour parler plus précisément, la pesanteur, auroit imprimé à ce corps une vitesse, qui auroit été dans tous les momens de la chute comme les racines des hauteurs correspondantes, il faut qu'il ait une autre vitesse lorsqu'il se meut obliquement.

Si ce corps tombe par sa seule pesanteur le long d'un plan incliné, il tombe encore obliquement à l'horison, & cependant il n'est pas dans le même cas que nous venons d'expliquer, & c'est là une chose qui avoit besoin d'être démêlée par M. Varignon. Ce corps qui tombe sur un plan incliné, ne tombe que par l'action de sa pesanteur qui est verticale, & cette action est nécessairement oblique au plan incliné. Elle peut donc être conçue comme composée de deux autres dont l'une soit perpendiculaire au plan incliné, l'autre parallele. Celle qui seroit perpendiculaire, est entierement arrêtée par le plan, & toute la vitesse que le corps auroit eue selon cette direction, est anéantie & perdue. Il ne reste que la Force parallele, qui est effectivement celle dont le corps suit la direction, & dont il conserve toute la vitesse. Or il se trouve que les vitesses qu'il tire de cette Force parallele & unique dans les différens momens de sa chute, sont dans la même raison que celles qu'il tireroit de la Force verticale seule, ou de la pesanteur agissant librement, & par conséquent comme les racines des hauteurs.

Toute la différence des deux cas vient de ce que dans le premier le mouvement du corps est composé par rapport à l'horison, & composé de deux Forces qui toutes deux subsistent, & dans le second cas il est composé par rapport au plan incliné, & composé de deux Forces dont l'une est entierement détruite par l'opposition de ce plan. Dans le premier cas, le corps n'est point soutenu, il l'est dans le second.

Maintenant si un corps tombe le long de deux plans inclinés, contigus, & qui fassent entr'eux un angle obtus, & une espece de concavité, M. Varignon a démontré, toujours par la composition des mouvemens, que ce corps à la rencontre du second plan perd quelque chose de sa vitesse; que par conséquent elle n'est pas la même à la fin de sa chute, ou à tel point qu'on voudra de sa chute par le second plan, que s'il n'étoit tombé que par le premier plan prolongé, & que la proportion des racines des hauteurs n'a donc plus de lieu, quoique Galilée l'ait cru. La raison de cette perte de vitesse est que le mouvement qui étoit parallele au premier plan devient oblique au second, puisqu'ils font un angle entr'eux, ce mouvement oblique au second plan étant conçu comme composé, ce qu'il a de perpendiculaire à ce plan est détruit à sa rencontre & par son opposition, & une partie de la vitesse perit aussi.

Plus ce que le mouvement oblique & composé a de perpendiculaire au second plan est petit, ou, ce qui est la même chose, moins les deux plans sont éloignés de n'en être qu'un, ou enfin plus leur angle obtus est grand, & l'aigu qui en est le complément, petit, moins le corps perd de sa vitesse, & au contraire. M. Varignon détermine géométriquement quelle est sur toute la hauteur de la chute entiere la portion de vitesse qui se perd à la rencontre du second plan. Elle est toujours d'autant plus petite que l'angle aigu complément de l'obtus que font les deux plans, est plus petit.

Les plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, dont une Courbe est composée, faisant tous entr'eux des angles obtus dont le complément est infiniment petit, il s'ensuit que si un corps tombe par sa pesanteur le long de la concavité d'une Courbe, la perte de vitesse qu'il fait à chaque instant est infiniment petite. Mais une portion finie de Courbe, quelque petite qu'elle soit, étant composée d'une infinité de plans infiniment petits, le corps qui l'a parcourue dans un temps fini, quelque petit qu'il

soit, a perdu une infinité de parties infiniment petites de sa vitesse, & une infinité d'infiniment petits font un infini de l'ordre *supérieur*; c'est-à-dire, qu'une infinité d'infiniment petits font une grandeur finie, s'ils sont du premier ordre ou genre, & un infiniment petit du premier, s'ils sont du second, & ainsi de suite à l'infini. Donc si les pertes de vitesses que fait un corps tombant le long d'une Courbe sont des infiniment petits du premier genre, elles feront une grandeur finie, lorsqu'il aura parcouru quelque portion finie de cette Courbe que ce soit, & par conséquent elles devront être comptées par rapport à la vitesse dont il se meut, qui est toujours finie, & les différentes vitesses en différens temps de la chute ne seront point comme les racines des hauteurs. Mais si les pertes n'étoient que des infiniment petits du second genre, elles ne feroient toutes ensemble dans un temps fini, qu'un infiniment petit du premier, qui retranché d'une vitesse finie ne la rendroit pas moindre, & laisseroit subsister la proportion des racines des hauteurs. Or M. Varignon démontre que les pertes de vitesse sont des infiniment petits du second genre, d'où il suit que les chutes par des Courbes, conservent la proportion des racines des hauteurs, quoique celles qui se font par différens plans inclinés contigus ne la conservent pas. Il ne seroit pas possible que sans la Géométrie des infiniment petits, on vît aussi clair dans cette matiere: & l'on y peut remarquer combien ces différens ordres d'Infinis que l'on soupçonne d'abord d'être feints à plaisir, sont réels & solides.

Un corps qui tombe par un seul plan incliné, ou par une Courbe, est donc dans le même cas à l'égard de la proportion des vitesses, & comme dans la chute par le plan incliné cette proportion ne suit celle des racines des hauteurs que parce que le corps est soutenu par ce plan, & que tout ce qu'il y a de mouvement perpendiculaire à ce plan est arrêté & détruit sans qu'il perde rien

du mouvement parallele, de même il faut dans la chute par la Courbe que le corps ſoit ſoutenu par cette Courbe, & coule en quelque ſorte le long de ſa concavité comme dans une eſpece de canal, qui à chaque point de ſa courbure laiſſe auſſi à ce corps tout ce qu'il a de mouvement parallele à la Tangente de ce point. Ce ſera la même choſe ſi un corps ſuſpendu décrit cette courbe en vertu de ſa ſuſpenſion : car la ſuſpenſion le ſoutiendra de la même maniere qu'auroit fait la concavité de la Courbe. En un mot, afin que les viteſſes d'un corps qui tombe par un ſeul plan incliné, ou par une Courbe, ſuivent les racines des hauteurs, il faut que le corps ſoit ſoutenu, qu'il perde tout ſon mouvement perpendiculaire au plan ou à la Courbe, conſerve tout le mouvement parallele, & ne ſe meuve que par ſa ſeule peſanteur.

Mais comme les viteſſes ne ſuivent point les racines des hauteurs dans la chute d'un corps qui tombe obliquement à l'horiſon, ſans être ſoutenu par un plan, ou, ce qui revient au même, d'un corps pouſſé obliquement à l'horiſon par deux Forces différentes, de même la proportion des viteſſes ne ſera plus celle des racines des hauteurs dans une chute par une Courbe qui feront décrire au corps deux impulſions différentes, mêlées & combinées enſemble, ainſi qu'il faudra pour la génération de cette Courbe : mais la viteſſe ſera à chaque moment celle qui naîtra du concours des deux Forces, & quand même la peſanteur feroit l'une des deux, la proportion des racines des hauteurs feroit altérée par l'autre, qui ſelon la ſuppoſition agiroit.

Il ne faut donc pas calculer de la même maniere la viteſſe de tous les corps qui tombent par des Courbes, & l'on doit admettre cette diſtinction nouvelle & ſubtile de M. Varignon entre les corps tombans par des Courbes qui les portent & les ſoutiennent, ou ſuſpendus équivalemment, & ceux qui tombent en décrivant ces Courbes par

le mêlange de deux Forces qui les meuvent. Faute de cette attention, qu'il étoit facile de ne pas avoir, de grands Géometres auroient pû se méprendre.

Lorsqu'une Courbe est décrite par le mêlange ou le concours de deux Forces connues, M. Varignon détermine aisément la vitesse qui en résulte à chaque instant. Toute Courbe étant conçue comme un Poligone infini, chaque côté infiniment petit est une diagonale, ou, ce qui est la même chose, l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont la différence de deux Ordonnées infiniment proches, & la portion infiniment petite de l'axe comprise entre ces deux Ordonnées. Un corps à qui deux Forces différentes font décrire une Courbe, ne décrivant à chaque instant qu'une de ces hypotenuses ou diagonales, elles représentent la vitesse composée qu'il a dans cet instant, & les deux autres côtés du triangle représentent les vitesses simples que chaque Force tendoit à lui imprimer séparément. On a donc toujours cette proportion: comme la différence de deux Ordonnées de la Courbe infiniment proches, ou la portion de l'axe comprise entre ces Ordonnées, est à l'hypotenuse ou côté infiniment petit correspondant; ainsi l'une ou l'autre des vitesses que tendent à imprimer les deux Forces séparément, est à la vitesse composée qui résulte de leur concours.

Il n'y a nulle Courbe possible dont la nature ne soit suffisamment déterminée par le rapport des différences des Ordonnées aux portions de l'axe correspondantes, & l'on peut concevoir l'essence des Courbes en général comme consistant dans ce rapport, variable en une infinité de manieres. Or ce même rapport sera toujours aussi celui des deux vitesses simples, dont le concours fera décrire une Courbe quelconque à un corps; & par conséquent l'essence de toutes les Courbes en général est la même chose que le concours ou la combinaison, variable à l'infini, de toutes les Forces qui, prises deux à deux, peuvent mouvoir un même corps: & voilà une Equation très-sim-

ple & très-générale de toutes les Courbes, & de toutes les viteſſes poſſibles.

Par le moyen de cette équation, dès que les deux viteſſes ſimples d'un corps ſont connues, M. Varignon détermine auſſi-tôt la Courbe qui en doit naître. Quelque variées que ſoient ces viteſſes, pourvû qu'elles ſuivent quelque progreſſion réglée, ce qui eſt toujours abſolument néceſſaire, elles ne ſont qu'introduire la même progreſſion dans les différences, ou dans les portions de l'axe qui leur répondent.

Si l'on veut qu'une des deux viteſſes ſimples ſoit uniforme & toujours égale; par exemple, la viteſſe horiſontale d'un boulet de canon, on verra les différences ou les portions de l'axe qui répondront à cette viteſſe, devenir égales; & comme dans le cas du boulet de canon, ou de tout autre corps peſant, la ſeconde Force ſimple dont il ſera pouſſé ſera ſa peſanteur, qui lui imprimera toujours une viteſſe variée, ſuivant les racines des hauteurs de la chute: on verra naître de cette combinaiſon une Parabole que le corps décrira. Dans cette Courbe, les portions de l'axe qui ſont entre des Ordonnées infiniment proches, étant priſes dans la proportion des racines des hauteurs de la chute du corps peſant, les différences des Ordonnées ſont toutes égales.

Il eſt à remarquer que par l'équation générale de M. Varignon la viteſſe uniforme, & la viteſſe variée, ſuivant les racines des hauteurs produiſent la Parabole, indépendamment de l'angle que font entr'elles les deux Forces ou projections qui impriment ces viteſſes, & que par conſéquent un boulet de canon tiré ſoit horiſontalement, ſoit obliquement à l'horiſon décrit toujours une Parabole, parce que dans ces deux cas la viteſſe qu'il tient de cette projection eſt toujours uniforme. D'habiles Géometres ont eu bien de la peine à prouver que les projections obliques formoient des Paraboles auſſi-bien que les horiſontales; & cela vient tout d'un coup, & de ſoi-même, par la méthode de M. Varignon.

En

En voici la raiſon eſſentielle & métaphyſique. La Courbe n'eſt que le mélange qui réſulte de deux Forces qui ont entr'elles un certain rapport de grandeur ou de quantité ; la Parabole, par exemple, eſt le mélange qui réſulte d'une viteſſe uniforme & d'une viteſſe variée qui ſuit les racines des hauteurs, & ce mélange eſt néceſſairement déterminé à être ce qu'il eſt par le rapport des deux viteſſes ſimples qui le forment. Si ces viteſſes ſimples, ſans changer de nature, devenoient ou plus grandes ou plus petites, il eſt clair que le mélange qui en réſulte, ne changeroit pas de nature, mais ſeulement de grandeur. Ainſi, qu'un boulet de canon tiré horiſontalement ſoit tiré avec une moindre charge de poudre, & même, ſi l'on veut qu'il tombe moins vîte, l'une des deux viteſſes ſimples ne laiſſera pas d'être toujours uniforme, & l'autre variée de la même maniere, & par conſéquent le boulet décrira toujours une Parabole, mais une Parabole plus petite. Maintenant, que le boulet ſoit tiré ſelon une ligne oblique à l'horiſon, & plus élevée que l'horiſontale, cette ligne oblique à l'horiſon ſera composée d'une parallele ou horiſontale, & d'une verticale. Entant qu'elle eſt horiſontale, elle imprimera toujours une viteſſe uniforme : entant qu'elle eſt verticale & plus élevée qu'une parallele à l'horiſon, elle agira contre la peſanteur du boulet, & en affoiblira l'action, mais ſans en changer la nature, & par conſéquent il ſe trouve toujours un mélange d'une viteſſe uniforme & d'une viteſſe qui ſuit les racines des hauteurs, ou, ce qui eſt la même choſe, une Parabole, quoique différente. Si la ligne de projection du boulet étoit au-deſſus d'une parallele à l'horiſon, l'action de la peſanteur ſeroit fortifiée, mais non pas changée. Donc quelque angle que faſſent entr'elles la ligne de projection du boulet, & l'action verticale de ſa peſanteur, ou, ce qui revient au même, les deux Forces ſimples dont il eſt pouſſé, l'eſpece de la Courbe ne change point, mais ſeulement la grandeur. Le même raiſonnement ſe peut appliquer à toutes les autres Courbes réſultantes du

mélange de deux Forces, & l'angle ou la position de ces Forces entr'elles est indifférente, quant à l'espece de la Courbe.

Un mélange de deux Forces déterminées ne peut donner qu'une certaine Courbe : mais une Courbe étant donnée, on peut imaginer une infinité de Forces différentes, prises deux à deux, dont le mélange aura pû la produire. C'est ainsi que dans les Nombres, le produit de 2. & de 30, par exemple, ne peut donner que 60, mais 60 peut être formé par la multiplication de plusieurs autres nombres entiers tels que 2, & 30, & par celle d'une infinité de nombres rompus. Et comme on peut prendre tel nombre qu'on voudra pour l'un des deux dont le produit doit former 60, après quoi le second, soit entier, soit rompu, viendra nécessairement, & sera déterminé : de même une Courbe étant donnée, on peut supposer telle vitesse qu'on voudra pour l'une des deux, dont le concours l'aura produite, mais ensuite l'autre vitesse simple sera nécessairement déterminée en conséquence de la supposition arbitraire. Si l'on veut qu'un boulet de canon tiré horisontalement ou obliquement à l'horison, ait décrit une Hyperbole, cette supposition enfermant une vitesse uniforme, on trouvera quelle aura dû être celle que la pesanteur aura causée, & certainement on ne la trouvera pas dans la proportion des racines des hauteurs. On saura donc quelle devra être l'action de la pesanteur, pour faire décrire aux corps jettés des Hyperboles, ou en général telles autres Courbes qu'on voudra.

Une Courbe étant donnée, ou, ce qui est la même chose, le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux différences correspondantes, on peut, sans changer la nature de cette Courbe, établir telle progression qu'on voudra, soit entre les portions de l'axe comparées seulement entr'elles, soit entre les différences prises de la même maniere : mais quand on a une fois reglé une progression pour les unes ou pour les autres de ces gran-

deurs, la ſeconde n'eſt plus libre, & elle ſuit néceſſairement du rapport qui doit être entre les unes & les autres, comparées enſemble. C'eſt là la raiſon eſſentielle qui fait que l'on peut imaginer une infinité de viteſſes différentes, priſes deux à deux, également propres à former une certaine Courbe, & que l'une des deux viteſſes étant déterminée arbitrairement, l'autre devient néceſſaire.

Des Géometres fameux avoient déja ſongé à la génération des Courbes par les mouvemens compoſés : mais ceux qui n'ont pas connu ou admis la Géométrie des Infiniment petits, ont dû être aſſez embarraſſés, ou du moins fort bornés dans cette recherche. Ce n'eſt qu'en conſidérant les Courbes comme des Poligones infinis, que l'on trouve que chaque côté infiniment petit eſt la diagonale que produit un mouvement compoſé, & cette idée ſi naturelle donne auſſitôt le dénoûment de tout.

De plus, il faut ſavoir qu'il y a deux eſpeces de Courbes, les *Géométriques*, & les *Méchaniques*. Les Courbes géométriques ſont celles dont on peut exprimer & déterminer la nature par le rapport des Ordonnées aux Abſciſſes, qui ſont les unes & les autres des grandeurs finies; les Méchaniques ſont celles dont on ne peut exprimer ainſi la nature, parce que les Ordonnées & les Abſciſſes n'ont point de rapport réglé. Les Sections Coniques ſont géométriques, la Cycloïde, la Ciſſoïde, la Conchoïde, &c. ſont méchaniques. Dans la Géométrie des Infiniment petits, la nature de toutes les Courbes, ſoit géométriques, ſoit méchaniques, peut également s'exprimer par le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux différences correſpondantes, ou premieres ou ſecondes, ou troiſiemes, &c. à l'infini. Toute la différence entre les Courbes géométriques & méchaniques, eſt que les méchaniques ne peuvent s'exprimer que par ce rapport; au lieu que les géométriques peuvent auſſi s'exprimer par le rapport des Ordonnées aux Abſciſſes; c'eſt-à-dire, que les méchaniques conduiſent plus néceſ-

ſairement que les autres à la conſidération de l'infini. Delà il ſuit, & que la Géométrie des Infiniment petits a une égale facilité dans les recherches qu'elle fait ſur ces deux eſpeces oppoſées de Courbes, & que toute autre méthode doit en avoir beaucoup moins, ſur-tout à l'égard des méchaniques. Il eſt viſible que la Théorie de M. Varignon fondée ſur les Infiniment petits, tant pour les viteſſes que pour la génération des Courbes, s'étend ſi naturellement tant aux Courbes géométriques qu'aux méchaniques, que l'on ne s'apperçoit pas en la ſuivant, qu'il y ait aucune différence de nature entre ces Courbes. Cependant il y a tout lieu de croire que l'on s'en appercevroit bien par d'autres voies.

SUR LA PLUS GRANDE PERFECTION POSSIBLE DES MACHINES, DONT UN FLUIDE EST LA FORCE MOUVANTE.

V. les M. p. 323.

JUſqu'ici l'on n'a ſû calculer les Machines, que pour l'état de l'équilibre. Une Machine étant conſtruite ou imaginée, on voit par les bras de levier, par les diſtances des points fixes aux directions des Forces, en un mot par les chemins que doivent parcourir en même temps le Poids d'un côté, & de l'autre la Puiſſance, quel doit être le rapport de la Puiſſance au Poids, afin que la Machine ſoit en équilibre, ou réciproquement par le rapport de la Puiſſance qu'on doit employer au Poids qu'il faut mouvoir, on trouve quels doivent être pour cet équilibre de la Machine, les chemins qu'ils parcourront l'un & l'autre, ou plutôt qu'ils ſeront diſpoſés à parcourir. Cet état d'équilibre trouvé, il eſt bien ſûr que la Machine ſera miſe en mouvement, & exécutera

l'effet qu'on lui demande, pour peu que l'on augmente ſoit la puiſſance, ſoit ſa viteſſe, ou que l'on diminue le poids ou ſa viteſſe. On ne conſidere point ici les Frotemens, & on ne les conſidérera point dans la ſuite de ce diſcours.

Quand, pour mettre la Machine en mouvement, on augmente ou l'on diminue quelqu'une des quantités qui formoient l'équilibre, on ne fait qu'au haſard cette augmentation ou cette diminution; c'eſt-à-dire, qu'on croit que la plus grande ſera toujours la meilleure, & que la Machine en ira d'autant mieux, ce qui eſt en effet une penſée fort naturelle. Mais plus elle l'eſt, plus on doit tenir compte à M. Parent d'en avoir reconnu l'erreur; il a découvert ce que perſonne n'avoit encore ſoupçonné, que pour mettre les Machines dans la plus grande perfection où elles pûſſent être, il falloit, après avoir trouvé leur état d'équilibre, faire une certaine augmentation ou diminution préciſe, ſoit ſur les forces, ſoit ſur les viteſſes, & que toute autre augmentation ou diminution rendroit les Machines moins parfaites. Il eſt aiſé de voir que cette nouvelle Théorie eſt en même temps une Regle par laquelle M. Parent peut déterminer ſi une Machine quelconque donnée eſt dans la plus grande perfection où elle puiſſe être, de combien de degrés elle en eſt éloignée, & quels changemens il faudroit faire pour l'y amener.

Il ne propoſe encore ſa découverte que ſur les Machines dont la Force mouvante eſt un fluide, telles que ſont les Moulins à vent ou les Moulins à eau. Il les ſuppoſe conſtruites comme elles le ſont, & comme elles doivent l'être, c'eſt-à-dire, de maniere que le poids qu'il faut mouvoir, ſoit appliqué à certains bras de levier, tandis que la Puiſſance eſt appliquée à d'autres, ou plus généralement que le poids ait en vertu de la diſpoſition de la Machine, une certaine viteſſe, & la puiſſance une autre, toujours plus grande dans la pratique que celle du poids,

puiſque ce n'eſt que par-là qu'on peut tirer avantage d'une Machine. Après cela, voici par quelle ſuite de réflexions & de raiſonnemens M. Parent arrive à ſon but.

Le plus grand effet que puiſſe jamais produire un Fluide qui coule avec une certaine viteſſe, c'eſt d'emporter avec cette même viteſſe entiere un certain poids, qu'on peut concevoir comme poſé dans une gondole. M. Parent appelle cet effet *naturel*, parce qu'il n'y entre aucune Machine. Il eſt viſible que c'eſt le produit de ce poids qui peut être emporté, & de la viteſſe du Fluide; & comme cet effet, outre qu'il eſt naturel, eſt conſtant & invariable, on peut le prendre pour une meſure fixe à laquelle on rapportera tous ceux qui ſe feront par des Machines, & qui varieront avec elles.

Dans toute Machine, dont un Fluide eſt la Force mouvante, il faut qu'il faſſe ſon effort ou ſon impreſſion ſur quelque ſurface, telle qu'une aile de Moulin, ou vanne, ou palette, &c. La grandeur de cet effort ou impreſſion dépend de la peſanteur & de la viteſſe du Fluide, & le Fluide étant toujours ſuppoſé le même, de ſa viteſſe ſeule. Si la viteſſe augmente, l'effort ou impreſſion augmente ſelon les quarrés de la viteſſe; parce que, quand un Fluide a 2 fois, 3 fois, &c. plus de viteſſe, non ſeulement il frappe une ſurface avec 2 fois, 3 fois plus de force, mais il la frappe avec 2 fois, 3 fois plus de parties en même temps, puiſqu'elles ſe meuvent plus vîte, & par conſéquent l'impreſſion du Fluide croît ſelon la raiſon doublée, ou ſelon les quarrés de la viteſſe. Si une ſurface frappée par un Fluide qui tend à la mouvoir ſelon ſon cours, eſt arrêtée par un poids qui ne ſoit préciſément que tel qu'il faut pour l'arrêter, il eſt clair que ce poids eſt égal à l'impreſſion ou effort du Fluide contre la ſurface: ſi la viteſſe du Fluide devenoit 2 fois, 3 fois, &c. plus grande, il faudroit que le poids fût 4 fois, 9 fois plus grand, ou, ce qui eſt la même choſe, l'effort du Fluide ſeroit 4 fois, 9 fois plus grand. Juſques-là, il n'y a encore nul effet de Machine.

Mais si l'on en faisoit une, quelle qu'elle pût être, où l'effort du Fluide agît par certains bras de levier, & un poids qu'il faudroit vaincre, fût appliqué à d'autres bras, il est constant que dans l'état d'équilibre il y auroit égalité entre l'effort du Fluide, ou le poids qui lui est égal, multiplié par les bras de levier où il est appliqué, & le poids à élever multiplié par les siens. Le produit de ce poids à vaincre, & des bras de levier par lesquels il agit, ou, ce qui est la même chose, le produit de ce poids par sa vitesse est tout l'effet de la Machine, ou, pour parler plus précisément, du Fluide agissant par une Machine.

Mais cet effet n'est celui de la Machine que dans l'état d'équilibre, & il deviendra nécessairement moindre dès qu'on la voudra mettre en mouvement; parce qu'il faudra pour cela diminuer le poids, ou faire quelque chose d'équivalent. Supposons que l'on s'en tienne à diminuer le poids, & laissons cette diminution indéterminée.

Une autre cause rend encore moindre l'effet de la Machine mise en mouvement. Dans l'état d'équilibre, le Fluide emploie toute sa Force contre l'aile ou vanne qu'il frappe, parce qu'elle est alors immobile : mais quand la Machine se meut, cette aile poussée par le Fluide fuit devant lui, pour ainsi dire, & en reçoit d'autant moins d'impression, qu'elle fuit plus vîte; de sorte que si elle avoit pris du Fluide toute la vitesse qu'il a, c'est-à-dire, qu'elle se mût d'une vitesse égale à la sienne, elle ne recevroit plus de lui aucune impression, & ne seroit frappée avec aucun effort. Mais la vanne ne prend jamais une vitesse égale à celle du Fluide, parce qu'elle est toujours retardée & appesantie par le poids qui doit être élevé, & auquel elle donne tout le mouvement qu'il a. Elle est d'autant plus retardée, que ce poids est plus grand, & moins diminué par rapport à celui que la Machine eût soutenu dans l'état d'équilibre. Quand la vanne a pris du Fluide la plus grande vitesse qu'elle puisse prendre, chargée de ce poids comme elle l'est, elle la conserve toujours, & par

conféquent fe meut d'une viteffe uniforme. L'excès de la viteffe du Fluide par-deffus cette viteffe uniforme de la vanne eft tout l'effort dont il frappe ; & cet effort, qui eft le principe du mouvement de toute la Machine, eft beaucoup plus foible que celui fur lequel on comptoit dans l'état d'équilibre.

La viteffe de la vanne dépend donc & de la viteffe du Fluide, & de la grandeur du *poids diminué* par rapport au *poids d'équilibre*, & M. Parent trouve une expreffion algébrique de cette viteffe de la vanne, où il n'entre que ces grandeurs. Il n'y a dans cette expreffion rien d'inconnu ou d'indéterminé, que la grandeur du poids diminué.

Voilà quelle eft la viteffe de la vanne indépendamment de la conftruction de la Machine & de la difpofition de fes parties : mais comme la vanne eft en même temps une partie de la Machine, à laquelle eft appliquée la Force mouvante, ou le Fluide, fa viteffe comparée à celle du poids qui doit être élevé, y a le même rapport qu'ont entr'eux les différens bras de levier,par lefquels agiffent la Force mouvante & le poids ; & ces bras étant fuppofés connus par la conftruction de la Machine, voilà encore une expreffion foit de la viteffe de la vanne comparée à celle du poids, foit de la viteffe du poids, dans laquelle tout eft connu & déterminé hormis la grandeur du poids diminué.

Dès que l'on a l'expreffion de la viteffe du poids diminué, il eft vifible que le produit de ce poids par fa viteffe eft tout l'effet que la Machine peut produire.

Il n'entre dans l'expreffion algébrique de cet effet de la Machine, que le poids diminué qu'on a laiffé indéterminé & inconnu, le poids d'équilibre, la viteffe du Fluide, & les bras de levier oppofés, toutes grandeurs que l'on fuppofe déterminées & connues. Par conféquent l'effet de la Machine variera à l'infini, & fera plus grand ou plus petit, felon que l'on fuppofera le poids diminué plus ou moins grand, tout le refte demeurant

le

le même. Or quand une grandeur eſt variable à l'infini, elle peut avoir un certain point d'accroiſſement qu'elle ne paſſera point, & après quoi elle ne fera que décroître. Telles ſont les Ordonnées d'un Cercle, d'une Ellipſe, &c. Quand on a l'expreſſion algébrique de la grandeur variable, on reconnoît très-facilement par la Géométrie des Infiniment petits, ſi elle a *un plus grand*, & en même-temps on le trouve & on le détermine. M. Parent employant cette méthode a vû que l'effet général & variable d'une Machine mue par un Fluide étoit capable *d'un plus grand*, & que *ce plus grand* arrivoit lorſque le poids diminué étoit les $\frac{4}{9}$ du poids de l'équilibre. Cette grande diminution vient de ce que le Fluide n'a de force pour mouvoir la Machine que l'excès de ſa viteſſe ſur celle de la vanne.

Lorſqu'un Fluide éleve par le moyen d'une Machine les $\frac{4}{9}$ du poids qu'il eût ſoutenu dans l'équilibre de la Machine, il fait donc le plus grand effet qu'il puiſſe jamais faire avec le ſecours d'une Machine; & cet effet comparé à celui que M. Parent appelle naturel, & qui conſiſte dans le produit de la viteſſe du Fluide par un poids qui en pourroit être emporté avec toute cette viteſſe, n'en eſt que les $\frac{4}{27}$.

Cela une fois trouvé, il eſt très-facile d'en conclurre que dans une Machine qui feroit les $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide, c'eſt-à-dire, dans une Machine parfaite, la viteſſe uniforme de la vanne ſeroit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide; & comme il y a entre cette viteſſe & celle du poids qui s'éleve, un rapport réglé, que nous avons marqué ici, on détermine auſſitôt quelle eſt cette viteſſe du poids dans l'état de perfection.

Toutes les conſéquences de cette nouvelle Théorie de M. Parent ſe préſentent d'elles-mêmes. On ſaura donc préſentement que quelque Machine qu'on faſſe, qui doive être mue par un Fluide, on n'en peut eſpérer un plus grand effet, que les $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide. On jugera ſûrement du degré de perfection de toute Machine donnée, il ne faudra que comparer ſon effet aux $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide, & voir combien il s'en éloigne. Quand

on aura à conſtruire une Machine, il la faudra conſtruire de ſorte que ſon effet aille juſqu'à ces $\frac{4}{17}$, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elle éleve un poids qui ſoit les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre, ou que la viteſſe de la vanne ſoit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide, & après cela on ſera ſûr d'avoir rendu la Machine parfaite, quelle que ſoit d'ailleurs ſa conſtruction, qui peut avec ces conditions varier encore en une infinité de manieres. Si l'on eſt aſſujetti à élever un certain poids, il faut conſtruire une Machine de ſorte que ſon poids d'équilibre ſoit à celui qu'on doit élever comme 9 à 4, & elle ſera la plus parfaite qu'il ſoit poſſible par rapport à l'élevation du poids donné. Si l'on eſt aſſujetti à ſe ſervir d'une certaine Machine, il faut lui donner à élever les $\frac{4}{9}$ de ſon poids d'équilibre, & elle fait le plus grand effet qu'elle puiſſe faire ; elle eſt même la plus parfaite qu'elle puiſſe être, ſi ſa conſtruction eſt telle qu'elle faſſe ſoutenir au Fluide le plus grand poids qu'il puiſſe ſoutenir avec une Machine, ou, ce qui revient au même, ſi les $\frac{4}{9}$ de ſon poids d'équilibre multipliés par la viteſſe qu'elle leur fait prendre ſont les $\frac{4}{17}$ de l'effet naturel du Fluide ; ſi cela n'eſt pas, on voit de combien la Machine eſt éloignée de la perfection.

Juſqu'ici, pour ne pas compliquer trop d'idées différentes, nous avons appellé effet naturel du Fluide, le produit de ſa viteſſe par un poids qu'il pourroit emporter avec toute cette viteſſe. Ce poids n'eſt que le Fluide même, qui, ſelon la méthode de M. de la Hire expliquée dans l'Hiſt. de 1702 *, eſt conſidéré comme un Solide, dont la hauteur eſt déterminée par la viteſſe du Fluide, dont la baſe eſt la vanne ou aile que le Fluide frappe, & dont on trouve le poids total par la peſanteur connue du Fluide, après qu'on a ainſi trouvé ſa grandeur ou ſes dimenſions. Il eſt viſible que ce Solide formé de cette maniere comprend & le poids & la viteſſe du Fluide, & par conſéquent repréſente ſon effet naturel. La grandeur de la vanne y entre néceſſairement : & ſi dans l'expreſſion algébrique que

* p. 126. & ſuiv.

M. Parent donne de l'effet général d'une Machine mue par un Fluide, on y substitue ce Solide à la place de l'effet naturel, la grandeur de la vanne s'y trouve avec toutes les autres grandeurs qui y étoient déja; & cette expression ou équation comprend tout ce qu'il est possible qu'elle comprenne, la vitesse du Fluide, sa pesanteur, la grandeur du poids que la Machine éleve, la vitesse qu'il prend, les bras de levier par lesquels agit la Force mouvante, ceux par lesquels agit le poids, & la grandeur de la vanne. Il est nécessaire de supposer la vitesse & la pesanteur du Fluide connues & déterminées: mais on peut laisser inconnues & indéterminées les 5 autres grandeurs qui appartiennent à la Machine, ou qui en dépendent; & après cela 4 de ces 5 grandeurs étant déterminées telles qu'on voudra, la 5e se détermine nécessairement en vertu de l'équation, ce qui donne une extreme facilité pour le calcul de toutes ces Machines.

MOnsieur des Billettes continuant l'Art de l'impression, a fait une Description de la Presse, & ensuite de l'impression particuliere des Livres d'Eglise, Ecriteaux, Sentences, &c.

Delà il a passé à l'Art de graver la Taille-douce.

M. Jaugeon a commencé la Description des Arts & Métiers qui concernent la Soie.



MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE EN MDCCIV.

I.

UNe Machine roulante inventée par le ſieur Deſteau, dont l'axe porte ſur chacune de ſes 4 faces une rangée de Mouſquets, qu'un homme ſeul peut tirer à la fois. Elle peut être utile en quelques occaſions. On en avoit déja propoſé une ſemblable à l'Académie.

II.

Un Fuſil briſé qui ſe charge par la culaſſe, inventé par M. de la Chaumette, exécuté d'une maniere particuliere, & fort ingénieuſe, & qui peut être d'un bon uſage entre les mains de perſonnes fort attentives.

III.

Un Deſſein d'une Digue avec ſes Portes, & toutes les autres choſes néceſſaires pour rendre la Riviere de la Rue près de Condat en Auvergne, capable de flotter des Mats de navire, le tout inventé par M. Bourgeois de Lyon. On y a trouvé beaucoup de nouveauté, d'eſprit, & de ſolidité, & l'Académie n'a cru y pouvoir ajoûter que quelque avis, dont il a paru que l'Inventeur vouloit bien profiter.

IV.

Un Niveau de M. Verjus, qui peut ſervir après avoir été rectifié, mais qui eſt difficile à rectifier à cauſe de ſa compoſition.

ELOGE DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

GUillaume François de l'Hôpital, Chevalier, Marquis de Sainte Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, le Bréau, & autres Lieux, nâquit en 1661. d'Anne de l'Hôpital, Lieutenant général des Armées du Roi, premier Ecuyer de feu S. A. R. Monsieur Gaston Duc d'Orleans, & d'Elisabeth Gobelin, fille de Claude Gobelin, Intendant des Armées du Roi, & Conseiller d'Etat Ordinaire.

La Maison de l'Hôpital a eu deux Branches; l'aînée dont étoit M. le Marquis de l'Hôpital, a joint au nom de l'Hôpital celui de Sainte Mesme; & la cadette, qui est présentement éteinte, a produit deux Maréchaux de France, & les Ducs de Vitri. Toutes deux avoient pour tige commune Adrien de l'Hôpital, Chambellan du Roi Charles VIII. Capitaine de Cent hommes d'armes, & Lieutenant général en Bretagne, qui commanda l'avant-garde de l'Armée Royale à la Bataille de S. Aubin en 1488.

M. le Marquis de l'Hôpital, que l'Académie des Sciences a perdu, étant encore enfant, eut un Précepteur, qui voulut apprendre les Mathématiques dans les heures de loisir que son emploi lui laissoit. Le jeune Ecolier qui avoit peu de goût, & même, à ce qu'il paroissoit, peu de disposition pour le Latin, eut à peine apperçu dans des Elemens de Géométrie des Cercles & des Triangles, que l'inclination naturelle, qui annonce presque toujours les grands talens, se déclara; il se mit à étudier avec passion ce qui auroit épouvanté tout autre que lui à la premiere vûe. Il eut ensuite un autre Précepteur, qui fut obligé par son exemple à se mettre dans la Géométrie: mais quoiqu'il fût homme d'esprit, & appliqué, son Eleve le

laiſſoit toujours bien loin derriere lui. Ce que l'on n'obtient que par le travail, n'égale point les ſaveurs gratuites de la nature.

Un jour M. le Marquis de l'Hôpital n'ayant encore que 15 ans, ſe trouva chez M. le Duc de Roannés, où d'habiles Géometres, & entr'autres M. Arnaud, parlerent d'un Probleme de M. Paſchal ſur la Roulette, qui paroiſſoit fort difficile. Le jeune Mathématicien dit qu'il ne deſeſpéroit pas de le pouvoir réſoudre. A peine trouva-t-on que cette préſomption & cette témérité puſſent être pardonnées à ſon âge. Cependant peu de jours après il leur envoya le Probleme réſolu.

Il entra dans le ſervice, mais ſans renoncer à ſa plus chere paſſion : il étudioit la Géométrie juſque dans ſa Tente, & ce n'étoit pas ſeulement pour étudier qu'il s'y retiroit, c'étoit auſſi pour cacher ſon application à l'étude. Car il faut avouer que la Nation Françoiſe auſſi polie qu'aucune autre Nation, eſt encore dans cette eſpece de barbarie, qu'elle doute ſi les Sciences pouſſées à une certaine perfection ne dérogent point, & s'il n'eſt point plus noble de ne rien ſavoir. Il eut ſi bien l'art de renfermer ſes talens, & d'être ignorant par bienſéance, que tant qu'il fut dans le métier de la guerre, les gens les plus pénétrans ſur les défauts d'autrui ne le ſoupçonnerent jamais d'être un grand Géometre ; & j'ai vû moi-même quelques-uns de ceux qui avoient ſervi en même-temps, fort étonnés de ce qu'un homme qui avoit vécu comme eux, & avec eux, ſe trouvoit être un des premiers Mathématiciens de l'Europe.

Il fut Capitaine de Cavalerie dans le Régiment Colonel général : mais la foibleſſe de ſa vûe qui étoit ſi courte qu'il ne voyoit pas à dix pas, lui cauſant dans le ſervice des inconvéniens perpétuels, qu'il avoit long temps, & inutilement tâché de ſurmonter, il fut enfin obligé de ſe rendre, & de quitter un métier où il pouvoit eſpérer d'égaler ſes Ancêtres.

Dès que la guerre ne le partagea plus, les Mathé-

matiques en profiterent. Il jugea par le Livre de la Recherche de la Vérité que son Auteur devoit être un excellent Guide dans les Sciences: il prit ses conseils, s'en servit utilement, & se lia avec lui d'une amitié qui a duré jusqu'à la mort. Bien-tôt son savoir vint au point de ne pouvoir plus être caché; il n'avoit que 32 ans, lorsque des Problemes, tirés de la plus sublime Géométrie, choisis avec grand soin pour leur difficulté, & proposés à tous les Géometres dans les Actes de Leipsic, lui arracherent son secret, & le forcerent d'avouer au Public qu'il étoit capable de les résoudre.

Le premier fut celui-ci proposé en 1693. par M. Bernoulli Professeur en Mathématique à Groningue. *Trouver une Courbe telle que toutes ses Tangentes terminées à l'Axe, soient toujours en raison donnée avec les parties de l'axe interceptées entre la Courbe & ces Tangentes.* Il ne fut résolu que par M. Leibnits en Allemagne, par M. Bernoulli en Suisse, frere de celui qui l'avoit proposé, par M. Huguens en Hollande, & par M. de l'Hôpital en France.

M. Huguens avoue dans les Actes de Leipsic, que la difficulté du Probleme l'avoit fait d'abord résoudre à n'y point penser; mais qu'une Question si nouvelle avoit troublé son repos malgré lui, l'avoit persécuté sans relâche, & qu'enfin il n'avoit pû y résister. On jugera aisément de quel genre pouvoit être en matiere de Géométrie, ce qui paroissoit si difficile à M. Huguens.

Tous ceux qui savent au moins les Nouvelles des Sciences, ont entendu parler du célebre Probleme de *la plus vîte Descente*. M. Bernoulli de Groningue avoit demandé dans les Actes de Leipsic, *supposé qu'un corps pesant tombât obliquement à l'Horison, quelle étoit la ligne Courbe qu'il devoit décrire pour tomber le plus vîte qu'il fût possible?* Car, comme il a été dit dans l'Histoire de l'Académie des Sciences de 1699 *, ce Paradoxe assez étonnant étoit démontré, Que la ligne droite, quoique la plus courte de toutes les lignes qui pouvoient être tirées entre les deux points donnés, n'étoit point le chemin que le

* pag. 67.

Corps devoit tenir pour tomber en moins de temps. Il étoit certain d'ailleurs que la Courbe en question n'étoit point un Cercle, comme Galilée l'avoit cru, & la méprise d'un si grand homme peut servir à faire sentir la difficulté du Probleme. M. Bernoulli proposa cette Enigme au mois de Juin 1696, & donna à tous les Mathématiciens de l'Europe le reste de l'année pour y penser. Il vit que ces six mois n'étoient pas suffisans, il accorda encore les quatre premiers de 1697, & dans ces dix mois, il ne parut que quatre Solutions. Elles étoient de M. Neuton, de M. Leibnits, de M. Bernoulli de Bâle, & de M. le M. de l'Hôpital. L'Angleterre, l'Allemagne, la Suisse, & la France fournirent chacune un Géometre pour ce Probleme.

On retrouve ces mêmes noms à la tête de quelques solutions semblables dans les Actes de Leipsic, & ils y semblent être en possession des connoissances les plus rares, & les plus élevées.

*pag. 78. On a même rapporté dans l'Hist. de 1700. * un Probleme proposé, comme presque tous les autres, par M. Bernoulli de Groningue, & qui n'a été résolu que par M. de l'Hôpital. Il s'agissoit de *Trouver dans un plan vertical une Courbe telle qu'un Corps qui la décriroit, descendant librement, & par son propre poids, la pressât toujours dans chacun de ses points avec une force égale à sa pesanteur absolue.* On a tâché de faire sentir alors les différens embarras de ce Probleme, c'est-à-dire, sa beauté. Les Géometres d'aujourd'hui ne sont pas aisés à contenter sur les difficutés; & ce qui a fait sortir Archiméde du Bain pour crier par les rues de Siracuse, *Je l'ai trouvé*, ne seroit pas pour eux une découverte bien glorieuse.

* pag. 95. L'Hist. de l'Académie de 1699. * a parlé encore d'une Solution de M. le Marquis de l'Hôpital, où peu d'autres auroient pû atteindre : M. Neuton dans son excellent Livre des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, a donné la *figure du Solide qui fendroit l'eau, ou tout autre liquide avec le moins de difficulté qu'il fût possible.*

Mais

Mais il n'a point laiſſé voir par quel art ni par quelle route il eſt arrivé à déterminer cette figure. Son ſecret lui a paru digne d'être caché au Public. M. Fatio, Géometre fameux, ſe piqua de le découvrir, & il en envoya à M. de l'Hôpital une Analyſe imprimée. Elle contenoit 5 grandes pages in-4° preſque toutes de calcul. M. de l'Hôpital effrayé de la longueur & pareſſeux d'une maniere nouvelle, crut qu'il auroit plutôt fait de chercher lui-même cette ſolution. Il l'eut effectivement trouvée au bout de deux jours, & elle étoit ſimple & naturelle. C'étoit là un de ſes grands talens. Il n'alloit pas ſeulement à la Vérité, quelque cachée qu'elle fût, il y alloit par le chemin le plus court. Une eſpece de fatalité veut qu'en tout genre les méthodes ou les idées les plus naturelles, ne ſoient pas celles qui ſe préſentent le plus naturellement. On ſe met preſque toujours en trop grands frais pour les recherches qu'on a entrepriſes, & il y a peu de génies, heureuſement avares, qui n'y faſſent que la dépenſe abſolument néceſſaire. Ce n'eſt pas qu'il ne faille de la richeſſe & de l'abondance pour fournir aux dépenſes inutiles: mais il y a plus d'art à les éviter, & même plus de véritable richeſſe.

Il ſeroit trop long de rapporter ici tous les Chef-d'œuvres de Géométrie dont M. de l'Hôpital, & le petit nombre de ſes pareils ont embelli les Journaux ou d'Allemagne, ou de France. On ſoupçonnera ſans doute que pour entrer dans ces Queſtions qui leur étoient réſervées, ils devoient avoir, outre leur génie naturel, quelque Clef particuliere, qui ne fût qu'entre leurs mains. Ils en avoient une en effet, & c'étoit la Géométrie des Infiniment petits, ou du Calcul Différentiel, inventée par M. Leibnits, & en même-temps auſſi par M. Neuton, & toujours enſuite perfectionnée & par eux, & par Mrs Bernoulli, & par M. de l'Hôpital.

L'illuſtre M. Huguens qui n'étoit point l'inventeur du Calcul différentiel, comme M. Leibnits, qui ne l'avoit

point employé dans toutes ses études géométriques, comme M. de l'Hôpital, & Mrs Bernoulli, qui étoit parvenu sans ce secours à des Théories très-élevées, & s'étoit fait une réputation des plus brillantes, qui pouvoit, à la maniere des autres hommes, & peut-être plus légitimement, mépriser ce qu'il ne connoissoit point, & traiter d'inutile ce qui ne lui avoit pas été nécessaire pour ses grands Ouvrages, avoit jugé cependant & par le mérite de ceux qui employoient cette Méthode, & par les miracles qu'il en voyoit sortir, qu'elle étoit digne qu'il l'étudiât; il avoit été assez grand homme pour avouer qu'il pouvoit encore apprendre quelque chose en Géométrie; il s'étoit adressé à M. de l'Hôpital qui avoit presque la moitié moins d'âge que lui, pour s'instruire du Calcul différentiel; & sans doute ce trait de la Vie de M. de l'Hôpital est encore plus glorieux à M. Huguens qu'à lui.

Ce n'est pas que M. Huguens ne connût déja par lui-même le Pays de l'Infini, où l'on est conduit à chaque moment par le Calcul différentiel, il avoit été obligé de pénétrer jusque-là dans quelques-unes de ses plus subtiles recherches, sur-tout dans celles qu'il avoit faites pour l'invention immortelle de la Pendule: car la fine Géométrie ne peut aller loin sans percer dans l'Infini. Mais il y a bien de la différence entre savoir en général la Carte d'un Pays, ou en connoître en particulier toutes les routes, & jusqu'à ces petits sentiers, qui épargnent tant de peine aux Voyageurs.

M. Huguens étoit alors en Hollande, où il s'étoit retiré après avoir quitté Paris, & l'Académie des Sciences, dont il étoit un des principaux ornemens. Il paroît par beaucoup de lettres de lui qu'on a trouvées dans les papiers de M. de l'Hôpital, & sur-tout par celles qui sont des années 1692 & 1693, qu'il consultoit à M. de l'Hôpital ses difficultés sur le Calcul différentiel; que quand quelque chose l'arrêtoit, il ne s'en prenoit pas à la Méthode, mais à ce qu'il ne la possédoit pas assez; *qu'il voyoit avec surprise & avec admiration l'étendue & la fécondité de cet Art, que de quelque côté*

qu'il tournât sa vûe, il en découvroit de nouveaux usages; qu'enfin, ce sont ses termes, *il y concevoit un progrès & une spéculation infinie.* Il a même déclaré publiquement dans les Actes de Leipsic, que sans une *Equation différentielle* il ne seroit pas venu à bout de trouver la Courbe dont les Tangentes, & les parties de l'axe sont toujours en raison donnée. *Et même*, ajoûte-t-il dans les mêmes Actes, *il faut remarquer dans ce Probleme une Analyse nouvelle & singuliere qui ouvre le chemin à quantité de choses sur la Théorie des Tangentes, comme l'a très-bien observé l'illustre inventeur d'un Calcul, sans lequel nous aurions bien de la peine à être admis dans une si profonde Géométrie.* Il écrivit en même temps à M. de l'Hôpital qu'il devoit à ses *enseignemens* cette Equation différentielle qui lui avoit donné le dénoûment du Probleme.

Jusque-là, la Géométrie des Infiniment petits n'étoit encore qu'une espece de Mystere, &, pour ainsi-dire, une Science Cabalistique renfermée entre cinq, ou six personnes. Souvent on donnoit dans les Journaux les Solutions sans laisser paroître la Méthode qui les avoit produites, & lors même qu'on la découvroit, ce n'étoient que quelques foibles rayons de cette Science qui s'échappoient, & les nuages se renfermoient aussi-tôt. Le Public, ou, pour mieux dire, le petit nombre de ceux qui aspiroient à la haute Géométrie, étoient frappés d'une admiration inutile qui ne les éclairoit point, & l'on trouvoit moyen de s'attirer leurs applaudissemens, en retenant l'instruction dont on auroit dû les payer.

M. de l'Hôpital résolut de communiquer sans réserve les trésors cachés de la nouvelle Géométrie, & il le fit dans le fameux Livre de l'*Analyse des Infiniment petits*, qu'il publia en 1696. Là, furent dévoilés tous les secrets de l'Infini Géométrique, & de l'Infini de l'Infini; en un mot, de tous ces différens ordres d'Infinis, qui s'élevent les uns au-dessus des autres, & forment l'Edifice le plus étonnant & le plus hardi que l'Esprit humain ait jamais osé imaginer.

Comme il y a des rapports déterminés entre les grandeurs finies, qui sont l'unique objet des recherches Mathématiques, & les grandeurs de ces différens ordres d'infinis, on parvient par la voie de l'infini à des connoissances sur le fini, où ne pourroit jamais atteindre toute autre Méthode, qui n'auroit pas l'audace, & en même temps l'adresse de manier l'infini. Le Livre des Infiniment petits fut donc tout brillant de vérités inconnues à la Géométrie ancienne, & non-seulement inconnues, mais souvent inaccessibles à cette Géométrie Les anciennes vérités s'y trouvoient comme perdues dans la foule des nouvelles, & la facilité avec laquelle on les voyoit naître, faisoit regretter les efforts qu'elles avoient autrefois coûtés à leurs inventeurs. Des Démonstrations, qui par d'autres Méthodes auroient demandé un circuit immense, en cas qu'elles eussent été possibles, ou qui même entre les mains d'un autre Géometre instruit de la même Méthode, auroient encore été longues & embarrassées, étoient d'une simplicité & d'une brieveté, qui les rendoient presque suspectes.

Tel est l'effet des Méthodes générales : quand on a une fois sû les découvrir, on est à la source, & on n'a plus qu'à se laisser aller au cours paisible des conséquences. Une seule Regle du Livre de M. de l'Hôpital donne les Tangentes de toutes les Courbes imaginables ; une autre, toutes les plus grandes, ou plus petites Appliquées, ou tous les points d'Inflexion, & de Rebroussement, ou toutes les Développées, ou toute la Catoptrique à la fois, ou toute la Dioptrique ; des Traités entiers faits par de grands Auteurs se réduisent quelquefois à quelques Corollaires, que l'on rencontre en chemin, & qu'on distingue à peine dans la multitude ; tout se rapporte à des especes de Sistemes que M. de l'Hôpital a commencé de mettre dans la Géométrie, & qui vont y répandre un nouveau jour.

Il y a, sur-tout en Mathématique, plus de bons Livres, qu'il n'y en a de bien faits ; c'est-à-dire, qu'on en voit assez

qui peuvent inſtruire, & peu qui inſtruiſent avec une certaine méthode, &, pour ainſi dire, avec un certain agrément. C'eſt bien aſſez d'avoir une bonne matiere entre les mains, on ſe néglige ſur la forme. M. de l'Hôpital a donné un Livre auſſi bien fait que bon ; il a eu l'art de ne faire d'une infinité de choſes qu'un aſſez petit Volume ; il y a mis cette brieveté & cette netteté ſi délicieuſes pour l'eſprit ; l'ordre & la préciſion des idées l'ont preſque diſpenſé d'employer des paroles ; il n'a voulu que faire penſer, plus ſoigneux d'exciter les découvertes d'autrui, que jaloux d'étaler les ſiennes.

Auſſi cet Ouvrage a-t-il été reçu avec un applaudiſſement univerſel : car l'applaudiſſement eſt univerſel, quand on peut très-facilement compter dans toute l'Europe les ſuffrages qui manquent, & il doit toujours en manquer quelques-uns aux choſes nouvelles & originales, ſur-tout quand elles demandent à être bien entendues. Ceux qui remarquent les évenemens de l'Hiſtoire des Sciences, ſavent avec quelle avidité l'Analyſe des Infiniment petits a été ſaiſie par tous les Géometres naiſſans, à qui l'ancienne & la nouvelle méthode ſont indifférentes, & qui n'ont d'autre intérêt que celui d'être inſtruits. Comme le deſſein de l'Auteur avoit été principalement de faire des Mathématiciens, & de jetter dans les eſprits les ſemences de la haute Géométrie, il a eu le plaiſir de voir qu'elles y fructifioient tous les jours, & que des Problemes réſervés autrefois à ceux qui avoient vieilli dans les épines des Mathématiques, devenoient des coups d'eſſai de jeunes gens. Apparemment la révolution deviendra encore plus grande, & il ſe feroit trouvé avec le temps autant de Diſciples qu'il y eût eu de Mathématiciens.

Après avoir vû l'utilité dont étoit ſon Livre des Infiniment petits, il s'étoit engagé dans un autre travail auſſi propre à faire des Géometres. Il embraſſoit dans ce deſſein les Sections Coniques, les Lieux Géométriques, la Conſtruction des Equations, & une Théorie des Cour-

bes Méchaniques. C'étoit proprement le plan de la Géométrie de M. Descartes, mais plus étendu, & plus complet. Il ne prétendoit pas que cet ouvrage fût aussi original, ni aussi sublime que le premier; il auroit pû tourner ses recherches du côté du Calcul Intégral, qui suit & qui suppose le Différentiel, qui a de plus grandes difficultés, & jusqu'à présent insurmontables, & qui par là occupe aujourd'hui les plus grands Géometres, & est devenu l'objet de leur ambition : mais il avoit préféré une entreprise dont le Public devoit tirer une instruction plus générale, & plus nécessaire, & le zele de la Géométrie l'avoit emporté sur l'intérêt de sa gloire. Cependant je suis témoin qu'il ne pouvoit s'empêcher de regretter le Calcul Intégral.

Cet ouvrage étoit presque fini, lors qu'au commencement de 1704. il fut attaqué d'une fievre qui ne paroissoit d'abord aucunement dangereuse : mais comme on vit qu'elles résistoit à tous les différens remedes qu'on employoit, on commença à craindre, & le Malade n'attendit pas un plus grand péril pour songer à la mort. Il s'y disposa d'une maniere très-édifiante; & enfin il tomba dans une apoplexie dont il mourut le lendemain 2 Février, âgé de 43 ans.

Quelques-uns ont attribué sa mort aux excès qu'il avoit faits dans les Mathématiques; &, ce qui pourroit le confirmer, j'ai sû de lui-même que souvent des matinées qu'il avoit destinées à cette étude étoient devenues des journées entieres sans qu'il s'en apperçût. Il avoit voulu y renoncer par le soin de sa santé : mais il n'avoit jamais pu soutenir cette privation plus de 4 jours. De plus, il sera assez naturel de croire qu'il avoit dû faire de grands efforts d'esprits, quand on songera à quel point il étoit parvenu à l'âge de 43 ans, & combien de temps dans une vie si courte avoit été perdu pour les Mathématiques. Il avoit servi; il étoit d'une naissance qui l'engageoit à un grand nombre de devoirs; il avoit une Famille, des soins

domeſtiques, un bien très-conſidérable à conduire, & par conſéquent beaucoup d'affaires; il étoit dans le commerce du monde, & il y vivoit à peu près comme ceux dont cette occupation oiſive eſt la ſeule occupation; il n'étoit pas même ennemi des plaiſirs : voilà bien des diſtractions, & quelque rare talent qu'on lui ſuppoſe pour les Mathématiques, il eſt impoſſible qu'une prodigieuſe application n'ait ſuppléé au peu de temps. Cependant il n'a jamais paru que l'étude ait altéré ſa ſanté, il avoit l'air de la meilleure & de la plus ferme conſtitution qu'on puiſſe deſirer. Il n'étoit nullement ſombre, ni réveur; au contraire, aſſez porté à la joie, & il ſembloit n'avoir payé par rien ce grand génie mathématique.

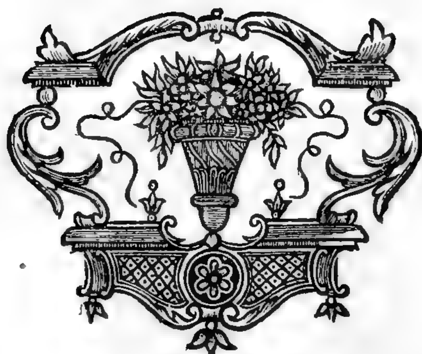
On ſentoit dans ſes diſcours les plus ordinaires la juſteſſe, la ſolidité; en un mot, la Géométrie de ſon eſprit: il étoit d'un commerce facile, & d'une probité parfaite, ouvert & ſincere, convenant de ce qu'il étoit, parce qu'il l'étoit, & n'en tirant nul avantage, véritable modeſtie d'un grand homme; prompt à déclarer qu'il ignoroit, & à recevoir des inſtructions, même en matiere de Géométrie, s'il lui étoit poſſible d'en recevoir; nullement jaloux, non par la connoiſſance de ſa ſupériorité, mais par équité naturelle : car ſans cette équité, ceux qui ſe croient, & qui ſont même les plus ſupérieurs aux autres, ſont encore jaloux.

Il avoit épouſé Marie Charlotte de Romilley de la Cheſnelaye, Demoiſelle d'une ancienne nobleſſe de Bretagne, & dont il a eu de grands biens. Leur union a été juſqu'au point qu'il lui a fait part de ſon génie pour les Mathématiques. Il en a laiſſé un fils, & trois filles.

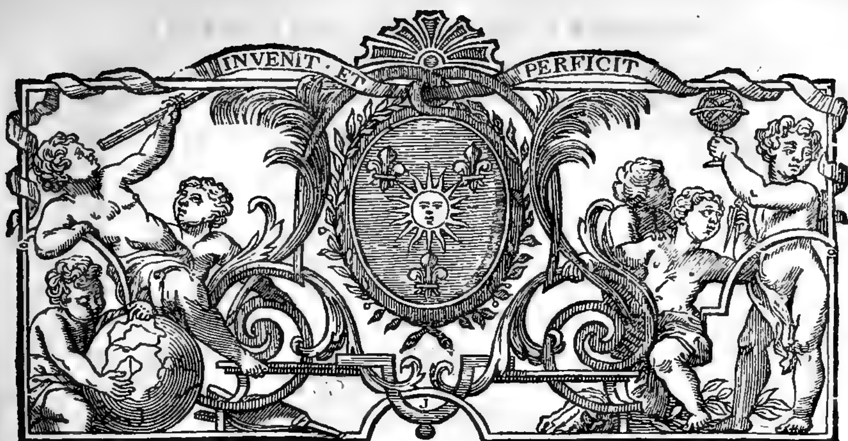
Sa place d'Académicien Honoraire a été remplie par M. le Marquis de Dangeau, Gouverneur de Touraine, Conſeiller d'Etat ordinaire, & Grand Maître des Ordres Royaux & Militaires de Notre-Dame du Mont-Carmel,

& de S. Lazare de Jérusalem, Chevalier des Ordres du Roi, Chevalier d'Honneur de Madame la Duchesse de Bourgogne, l'un des Quarante de l'Académie Françoise.

FIN.



MEMOIRES



MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIRE'S DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.
De l'Année M. DCCIV.

OBSERVATION
De la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire, avec les hauteurs du Thermometre & du Barometre pendant l'année 1703.

PAR M. DE LA HIRE.



LORSQUE j'entrepris de faire des observations exactes sur la quantité d'eau de pluie qui tomboit à l'Observatoire pendant le cours d'une année, je n'avois point d'autre vûe que d'en tirer quelques connoissances pour l'origine des Fontaines, surquoi j'ai fait plusieurs remarques, & dont j'ai tiré 1704 9. Janvier.

une utilité très-considérable pour la construction des Citernes, comme je l'ai rapporté dans le Mémoire que j'ai lu à l'Assemblée publique de l'Académie le 18 Avril 1703. Mais comme on est persuadé par la plus grande partie des observations qu'il ne pleut ordinairement que lorsque l'air devient plus leger, ce qu'on connoît par la descente du mercure dans le tuyau du Barometre, j'ai cru que je devois joindre aux observations de la pluie, celles du Barometre, & rapporter en même temps les hauteurs du Thermometre, pour connoître quel a été le degré de chaleur ou de froid lorsque la pluie a été plus ou moins abondante. J'ai comparé ces hauteurs différentes du Thermometre, à celles où il demeure toujours dans le fond des Carrieres de l'Observatoire, laquelle je considere comme la chaleur moyenne & l'état moyen du Thermométre rempli d'esprit de vin dont je me sers : & cette hauteur est de 48 degrés.

Voici la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant chaque mois de l'année 1703, laquelle est mesurée par la hauteur qu'elle auroit, si rien ne s'étoit dissipé ou évaporé. J'ai déja rapporté dans d'autres Mémoires semblables à celui-ci, la maniere dont je fais ces observations; c'est pourquoi je ne le répeterai pas ici. Et quoique ces observations aient été faites jour par jour, j'ai cru qu'il suffiroit d'en donner le résultat de chaque mois, avec quelques remarques à ce sujet, & principalement des vents qui ont regné.

En Janvier la hauteur de l'eau de pluie a été de 9 lignes $\frac{1}{2}$, qui est presque toute tombée vers le commencement du mois, avec un vent du côté de l'Ouest, tirant tantôt au Sud & tantôt au Nord. Dans la fin du mois le vent a presque toujours été du côté du Nord & sans pluie.

En Février il y a eu 14 lignes & $\frac{3}{4}$ d'eau. Le vent a été assez inconstant : mais la plus grande partie du mois il a été vers le Sud.

En Mars il n'a plû que 4 lignes, quoique le vent ait

presque toujours été vers l'Ouest entre le Nord & le Sud.

En Avril il est tombé 16 lignes & $\frac{1}{4}$ d'eau distribuée assez également dans tout le mois, le vent étant presque toujours au Sud en tirant vers l'Ouest, & rarement vers le Nord.

En Mai j'ai trouvé 34 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau. Le vent dominant a été l'Ouest, qui s'est tourné quelquefois au Sud, mais le plus souvent au Nord.

En Juin il n'est tombé que 23 lignes d'eau, le vent étant presque toujours à l'Ouest.

En Juillet il a plû 28 lignes $\frac{1}{4}$, qui sont tombées au commencement, au milieu & à la fin du mois. Dans le temps de pluie le vent étoit presque toujours à l'Ouest tirant au Sud & au Nord, & dans les intervalles il a été assez souvent au Nord & un peu à l'Est.

En Août la pluie a fourni 23 lignes $\frac{1}{2}$, dont il en est tombé 13 lignes $\frac{1}{2}$ le 12 du mois, avec un peu d'orage au commencement, le vent étant Est Sud-Est. Le vent a presque toujours été au Nord, & tirant quelquefois à l'Est & à l'Ouest.

En Septembre toute la hauteur de l'eau de la pluie est montée à 20 lignes $\frac{3}{4}$, qui a été distribuée dans tout le mois. Le vent dominant a été le Sud-Ouest.

En Octobre j'ai recueilli 17 lignes d'eau, qui est tombée en petite quantité à chaque fois pendant le cours du mois. Le vent a presque toujours été à l'Ouest tirant au Sud, & rarement au Nord & à l'Est.

En Novembre je n'ai ramassé que 13 lignes d'eau, qui est tombée au commencement & vers la fin du mois avec un vent de Sud. Depuis le 4 du mois jusqu'au 19 il n'a point plû, le vent étant toujours à l'Est, & quelquefois au Nord.

En Décembre il n'est tombé que 3 lignes & $\frac{3}{4}$ d'eau: mais il y a eu beaucoup de brouillards. Dans les deux tiers du mois vers la fin il n'a point plû, quoique le vent ait été assez souvent vers l'Ouest, hormis dans les derniers jours, où il étoit aux environs de l'Est.

La somme de l'eau de la pluie de toute l'année a été de 208 lignes $\frac{1}{4}$, ou bien 17 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$, ce qui est un peu moins qu'à l'ordinaire qui est de 19 pouces; ensorte que l'on peut dire que cette année est une des plus seches de ces pays-ci.

Les quatre mois de Mai, Juin, Juillet & Août, ont plus donné d'eau que les huit autres ensemble, ce qui arrive ordinairement, quoiqu'il n'ait pas fait d'orages considérables.

Le peu de neige qui est tombée dans le commencement de cette année, ne mérite pas qu'on y ait quelque égard. On voit par-là que ce n'est pas la grande quantité de neige qui rend la terre plus fertile, comme on le croit communément, puisque cette année a donné beaucoup de grains & de fruits. Il est vrai que la neige demeurant long-tems sur la surface de la terre, y peut retenir les sels qui s'en élevent continuellement, & qui rentrant dans la terre lorsque la neige se fond, peuvent la rendre plus fertile: mais aussi il peut y avoir des pluies qui feront le même effet, si elles se trouvent imprégnées des mêmes sels.

Le froid n'a pas été considérable dans tout le mois de Janvier & de Février, où il est ordinairement le plus grand, puisque mon Thermometre n'est pas descendu jusqu'à 26 degrés; & j'ai remarqué qu'il ne commence à geler que quand ce Thermometre est à 32 degrés; d'où l'on peut voir aussi qu'il n'y a pas eu de gelée considérable. Dans les derniers mois de cette année, le froid n'a pas été si grand qu'au commencement.

Si le froid n'a pas été considérable pendant toute cette année, la chaleur n'a été aussi que médiocre & de peu de durée; & je trouve que les jours les plus chauds ont été le 27 Mai, les derniers jours de Juillet & les premiers d'Août, où le Thermometre étoit vers 60 degrés. Le jour le plus chaud a été le 12 Août, où le Thermometre est monté à 64 degrés. Ces observations sont toujours faites vers le lever du Soleil, qui est le tems où l'air est le plus froid; & entre deux & trois heures après midi, la

chaleur eſt la plus grande de la journée. Pendant l'Eté j'ai remarqué qu'entre deux & trois heures après midi, le Thermometre s'éleve de 10 ou 12 degrés plus qu'il n'eſt le matin au lever du Soleil, quoique ce Thermometre ſoit toujours à l'ombre.

Le 28 jour d'Avril, le Thermometre ayant été le matin à 42 degrés, & le Barometre à 27 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$, il y eut un orage & un tonnerre aſſez fort; & l'on m'a dit que vers Villeneuve S. Georges, il étoit tombé ſur la terre une très-grande flamme qui avoit épouvanté ceux qui étoient aux environs, & qui n'avoit fait aucun mal à ceux qui étoient à l'endroit où elle tomba.

Pour le Barometre, il a été au plus haut le 10 Décembre au ſoir à 28 pouces 4 lignes & $\frac{1}{6}$ à la hauteur de la grande ſalle de l'Obſervatoire, & dans tout le mois de Décembre, le Barometre s'eſt toujours maintenu très-haut : auſſi il n'a plû que 3 lignes $\frac{1}{4}$, & c'eſt ce qui confirme ce qu'on remarque ordinairement, qu'il ne pleut que très-rarement quand le Barometre eſt plus élevé que ſon état moyen. Il eſt auſſi arrivé à peu près la même choſe dans le mois de Mars, où il n'a plû que 4 lignes : mais le Barometre n'a pas été tout à fait ſi haut que dans le mois de Décembre.

Le 3 Janvier le Barometre étoit au plus bas de l'année, à 26 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$ avec un peu de pluie, & ſans orage, comme il arrive aſſez ſouvent quand il eſt fort bas. Ainſi la différence entre la plus grande & la moindre hauteur du Barometre, a été cette année de 1 pouce 9 lignes $\frac{1}{2}$, qui eſt un peu plus que l'ordinaire qui ne va qu'à 1 pouce 6 lignes.

J'ai obſervé le 18 Décembre la déclinaiſon de l'aiguille aimantée de 9° 6' du Nord vers l'Oueſt avec une aiguille de 8 pouces de longueur. Cette aiguille eſt très-bien faite, & elle eſt renfermée dans une boîte de bois de figure quarrée; & pour faire l'obſervation, je place toujours le côté de cette boîte, au même endroit d'un pilier de la terraſſe baſſe de l'Obſervatoire, dont je ſuis aſſuré de ſa

position dans la ligne méridienne, par des observations très-exactes du passage du centre du Soleil dans le méridien.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 23 Décembre 1703 à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 9. Janvier. LE Ciel a été entierement couvert pendant la durée de cette Eclipse, hormis à $5^h\ 3'\ 22''$ que la Lune parut assez claire entre des nuages, & j'observai avec le Micrometre que la partie éclairée du diametre de la Lune étoit de $17'\ 30''$, & par la grandeur du diametre de la Lune à la hauteur où elle étoit, l'Eclipse auroit dû être alors de 4 doigts 56 minutes : mais à la vûe simple elle ne paroissoit que de 4 doigts. L'ombre de la terre sur le disque de la Lune ne paroissoit pas aussi bien terminée qu'on la voit ordinairement : c'est pourquoi on ne doit pas trop s'assurer sur cette observation qui n'a été faite que fort à la hâte; car les nuages couvrirent aussi-tôt la Lune qui ne parut plus ensuite.

OBSERVATION

SUR UNE HYDROPISIE DE CERVEAU.

PAR M. DU VERNEY le jeune.

1704. 19. Janvier. AU mois de Mai de l'année 1701 je fus appellé pour voir une jeune Demoiselle qui n'avoit qu'environ quatre à cinq ans. Elle étoit tombée depuis quelque temps

dans une langueur causée par une fievre lente qui la minoit peu à peu, & qui ne parut d'abord qu'un rhume.

Le poulx de la malade battoit tantôt vîte, & tantôt lentement : de plus il étoit intermittent; & enfin il s'y faisoit de temps en temps une espece de suspension; ce qui fit craindre qu'elle n'eût un polype dans le cœur. Cependant la respiration ne laissoit pas d'être libre, malgré le rhume qui avoit toujours continué, & qui étoit devenu très-grand.

Elle avoit le sommeil assez bon : mais les quinze derniers jours de sa maladie, elle tomba dans un très-grand abattement & une grande pesanteur de tête, malgré l'usage des remedes spiritueux & évacuatifs qu'on lui donnoit. Environ huit jours avant son décès, la bouche lui devint mousseuse, & le poulx toujours vîte & très-pressé. J'ai observé la même chose en plusieurs personnes attaquées de la même maladie, où l'on croyoit cependant que le cerveau n'étoit nullement intéressé.

Les trois derniers jours il survint à la malade une boursouflure qui commença à la joue droite : elle se répandit ensuite peu à peu tout autour du corps, & descendit jusqu'aux aînes; ensorte que les bras, les jambes & les cuisses n'en étoient point attaqués. On voyoit augmenter cette boursouflure par ondes; & dans les endroits où on la pressoit, on sentoit sous les doigts comme de l'air s'échapper, & faire une espece de crépitation. Enfin cette jeune Demoiselle mourut le 26 Juin de la même année 1701. Le lendemain j'en fis l'ouverture. Je commençai par le crane; ce qui ne diminua en rien la boursouflure. Quoique les vaisseaux de la dure-mere parussent fort remplis, il ne s'y trouva que fort peu de sang. Ayant séparé la faux, & pénétré dans les ventricules, il en sortit environ un grand verre de sérosité claire & transparente; & il y a certainement dequoi s'étonner de ce que le crane & la dure-mere ayant été levés, & la tête ayant demeuré en cet état, & même panchée pendant plus de deux heures, parce qu'on attendoit des parens, il ne se

fit durant tout ce temps-là, aucun épanchement de cette liqueur.

Le lacis choroïde étoit extremement lavé & même usé, à peu près comme l'étoit l'épiploon, ainsi qu'on le dira dans la suite.

Je n'eus pas plutôt appliqué le scalpel à la peau du ventre, que toute la boursouflure dont j'ai parlé, disparut, exhalant une odeur cadavereuse & insupportable. Je dirai ici en passant, au sujet de cette boursouflure, qu'il est assez étonnant que cette raréfaction, qui ne gonfle & ne bouffit les animaux qu'après la mort (ce qui fait que les noyés reviennent sur l'eau) ait ici paru dans le sujet vivant.

L'épiploon étoit fondu tel qu'on le voit ordinairement aux ascitiques; ce qui doit faire juger que ce n'est pas toujours la présence & l'impression des eaux contenues dans le bas ventre, qui cause la fonte de la graisse de cette partie, & l'altération des autres.

Les intestins se trouverent fort remplis d'air. Le pancreas étoit pareillement fondu; mais de telle maniere qu'il n'en restoit aucun vestige: cependant toutes les glandes du mesentere étoient endurcies, & la plûpart remplies d'une matiere à peu près semblable à du vieux suif. Le foie parut assez beau. La ratte étoit petite & squirreuse. La vésicule du fiel étoit fort remplie d'une liqueur visqueuse, qui avoit teint les parties voisines d'un rouge brun. Les autres parties du bas ventre étoient dans leur disposition naturelle.

Le sternum ayant été levé, les poûmons parurent remplis d'air, grenelés & adhérans du côté gauche.

Le pericarde ayant été ouvert, on apperçut une tumeur à la base du cœur du côté gauche sur l'artere du poumon. Cette tumeur étoit de la grosseur d'une noix, & dure & squirreuse: ses racines, qui étoient grenelées, passoient entre les vaisseaux, & elle venoit s'attacher à l'épine. Il ne se trouva rien de particulier au cœur.

OBSERVATION

OBSERVATION

D'une Tache qui a paru dans le Soleil au mois de Janvier 1704. à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

CEtte Tache a paru tout d'un coup sur le disque apparent du Soleil, comme il arrive à toutes les Taches : car le jour précédent à celui où je l'ai découverte, il n'y paroissoit rien, quoiqu'elle eût dû être déja assez avancée. Je la vis le 7. de Janvier à midi, qui passa au méridien 7″ ½ avant le dernier bord du Soleil. Sa hauteur méridienne apparente étoit de 18° 42′ 20″, & celle du bord supérieur du Soleil, de 19° 0′ 20″. 1704. 19. Janvier.

Le 8. je ne pus observer que sa hauteur méridienne apparente, qui étoit de 18° 49′ 25″.

Le 10. sa hauteur méridienne apparente étoit de 19° 7′ 0″. Celle du bord supérieur du Soleil de 19° 24′ 30″. Elle passa au méridien avant le dernier bord du Soleil 42″ ½.

Le 11. sa hauteur méridienne apparente étoit de 19° 16′ 0″, & celle du bord supérieur du Soleil de 19° 33′ 30″. Elle passa au méridien 13″. après le centre du Soleil.

Les jours suivans ayant été toujours couverts, je n'ai pu observer le Soleil que le 16, où la hauteur méridienne apparente de la Tache étoit de 20° 0′ 5″, & celle du bord supérieur du Soleil de 20° 24′ 50″. Elle passa au méridien 15″ ½ après le premier bord du Soleil.

Le 17. la hauteur méridienne apparente de la Tache étoit de 20° 16′ 25″, & celle du bord supérieur du Soleil de 20° 36′ 0″. Elle passa au méridien 7″ après le premier bord du Soleil.

Le 18. à 11h du matin, j'observai encore la Tache proche du bord Occidental du Soleil avec une Lunette de

16 pieds: car je ne pouvois pas la diſtinguer dans la Lunette du quart de cercle de 3 pieds;& ayant appliqué le Micrometre à cette Lunette de 16 pieds, je trouvai qu'elle n'étoit alors éloignée du bord du Soleil que de 6′ de degré.

Je ne donne point ici les figures différentes ſous leſquelles cette Tache a paru, car elle étoit petite, & elle n'étoit compoſée que de deux ou trois Taches jointes enſemble, & enveloppées dans un même nuage à l'ordinaire, avec quelques autres petites Taches qui étoient aux environs: car il me ſemble qu'on ne peut pas tirer d'utilité de ces ſortes de figures qui changent continuellement. Je remarquerai ſeulement, comme j'ai déja fait dans quelques obſervations ſemblables, qu'il me paroiſſoit diſtinctement un eſpace plus clair que le reſte du Soleil, qui environnoit le nuage où les Taches obſcures étoient renfermées, ce qui pourroit avoir quelque rapport aux facules qu'on remarque quelquefois dans l'endroit du Soleil où les Taches ont diſparu.

OBSERVATION

DE DEUX TACHES DANS LE SOLEIL.

PAR M. MARALDI.

1704. 9. Janvier.

ON voit préſentement deux amas de Taches dans le Soleil, dont l'un eſt proche de ſon bord Oriental, l'autre du bord Occidental près de diſparoître. Il y a longtemps qu'on n'a point vû dans le Soleil en même temps des Taches ſi éloignées les unes des autres, car pour l'ordinaire on n'en voit qu'à un endroit.

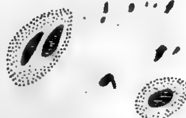
Nous les apperçumes le 7. de Janvier 1704. le Soleil ayant paru au travers des nuages, & nous déterminâmes le même jour, auſſi-bien que le ſuivant, leur ſituation par rapport aux cercles de la Sphere. La Tache Occidentale eſt compoſée d'un amas de pluſieurs petites Taches, qui

Septentrion

Ianv 7. 8.

8.

fig. 1.re



midy

3.

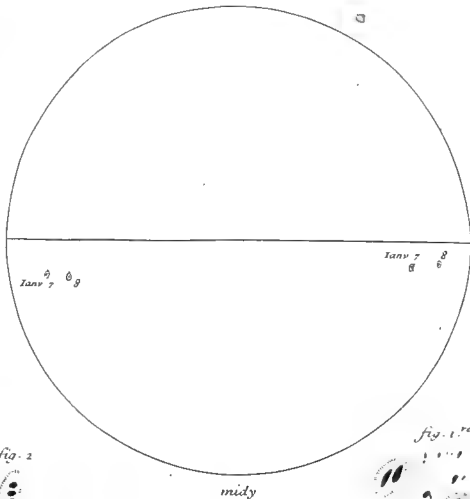
fig. 4.



fig. 5.



Septentrion



midy

fig. 1re



fig. 2



fig. 3.



fig. 4.



fig. 5.



toutes ensemble occupent dans le Soleil environ la vingt-cinquieme partie de son diametre. Deux de ces Taches principales étoient environnées d'une nébulosité, comme sont ordinairement les Taches du Soleil, & toute la Tache, vûe avec une Lunette de 18 pieds parut de la maniere qui est représentée dans la Figure I.

Il y a apparence que cette Tache s'est formée dans le disque apparent du Soleil depuis peu de jours : car le 4. de Janvier le Soleil étant clair il ne parut aucune Tache, quoique j'y fisse attention : je n'en apperçus pas non plus le 5, ayant aussi observé le Soleil. Le 6. le Ciel fut couvert : cependant si elle eût été formée, elle auroit pû être visible dès le 27 Décembre dernier.

La Tache qui est près du bord Oriental du Soleil paroît longue & étroite, & le 8. elle parut un peu plus large que le jour précédent, comme il doit arriver par raison d'Optique. Cette Tache vûe avec une Lunette de 18 pieds, paroissoit comme dans la II. Figure.

Ces deux Taches sont situées dans la partie australe du Globe du Soleil, comme toutes celles qui ont paru depuis long-temps dans cet astre. L'Occidentale a une latitude australe de 7 degrés, & elle est environ de deux degrés & demi plus Septentrionale que l'Orientale, qui est située à 9d & demi de latitude australe. Cette latitude est la même que celle de la Tache qui parut au mois de Novembre 1700. Lorsqu'elle sera arrivée au milieu du Soleil, nous les comparerons ensemble pour voir si elle a aussi la même longitude.



SUITE DES OBSERVATIONS. DES TACHES

PAR M. MARALDI.

1704. 19. Janvier. DE deux amas de Taches que nous avons obſervés dans le Soleil le 7. & le 8. de Janvier, le 10. du même mois, après un jour de temps couvert, on n'en apperçut plus que celui qui étoit dans la partie Orientale : les autres Taches qui étoient dans la partie Occidentale, avec une latitude méridionale de 7 degrés, étoient diſparues, ayant paſſé de l'hémiſphere apparent du Soleil à l'hémiſphere ſupérieur occulte. La Tache qui reſtoit dans le Soleil, de mince & longue qu'elle étoit du commencement, étoit devenue plus grande & plus ronde, s'étant approchée du milieu de ſon diſque, enſorte que le 11. de ce mois à midi elle n'en étoit éloignée que de 9 degrés de la circonférence du Soleil; d'où nous avons calculé qu'elle a dû être au milieu de cet aſtre le 12. à 5 heures du matin.

Le 16 de Janvier, après quatre jours de temps couvert, nous déterminâmes la ſituation de la Tache dans le Soleil, comme les jours précédens, & elle s'étoit approchée de ſon bord Occidental. La figure de la Tache avoit un peu changé : car de trois Taches dont elle étoit composée auparavant, on n'en voyoit plus que deux dans une ſituation un peu différente, enfermées dans une nébuloſité, comme on voit dans la IV. Figure.

Le 17. elle paroiſſoit de la même longueur que les jours précédens : mais elle étoit rétrécie comme dans la Figure V.

Le 18. Janvier elle paroiſſoit fort près du bord du Soleil, & elle s'étoit rétrécie de ſorte, qu'on ne la pouvoit plus voir qu'avec de grandes Lunettes, avec leſquelles

elle paroiſſoit comme un trait obſcur de la même longueur qu'auparavant, ce qui fait connoître qu'elle n'eſt diminuée qu'en apparence, comme il doit arriver par raiſon d'Optique.

Nous avions remarqué par les premieres obſervations que cette Tache avoit une latitude méridionale de 9 degrés & demi, ce qui a été confirmé par la ſuite des obſervations. Parmi les Taches obſervées les années précédentes, nous en trouvons pluſieurs qui avoient la même latitude méridionale que la derniere de cette année : ce ſont celles qui ont paru au mois de Novembre 1700, celle du mois de Mai de 1695, & celle du mois de Juin 1688.

M. Caſſini ayant comparé la Tache du mois de Mai de l'an 1688. avec pluſieurs autres qui avoient paru auparavant, trouve entre ces apparitions un nombre de révolutions de 27 jours 12^h 20 minutes, ce qui lui fit conjecturer que c'étoit le même lieu du Soleil dans lequel ces Taches s'étoient formées. Ayant comparé le temps que la Tache de cette année eſt arrivée au milieu du Soleil avec le temps que la Tache de 1688. y arriva, & ſuppoſant la même révolution de 27. jours 12^h 20 minutes, nous trouvons dans ces deux intervalles 194 révolutions du Soleil, moins deux jours; enſorte que ſi la Tache de cette année eût été la même que celle de l'an 1688, elle n'auroit dû paſſer que deux jours plus tard au milieu du Soleil; ce qui fait connoître que ſi ces deux lieux ne ſont pas les mêmes, ils ſont au moins fort proches. Ayant fait la même comparaiſon de cette Tache avec celle du mois de Novembre de 1700, nous trouvons que celle de l'an 1700. étoit 60 degrés de la circonférence du Soleil plus à l'Orient que celle de cette année.



EXTRAIT DES OBSERVATIONS DE L'ECLIPSE DE LUNE,

Du 23 Décembre 1703, faites à Dunkerque par M. Chazelles, à Montpellier par Messieurs de Plantade & Clapier, à Arles par M. Davizard, à Avignon par le R. P. Bonfa, & à Marseille par le R. P. de Laval Professeur d'Hydrographie.

PAR M. CASSINI le fils.

1704. 23. Janvier. A Paris, le Ciel fut couvert de nuages pendant le temps de l'Eclipse, & on ne l'apperçut entre les nuages qu'à $5^h\ 4'$ qu'elle parut éclipsée à la vûe simple d'environ 5 doigts.

La Lune fut couverte à Dunkerque de foibles nuages, qui empêcherent de déterminer le commencement de l'Eclipse.

4	47'	30"	A Montpellier, commencement de l'Eclipse.
4	55	0	A Arles.
4	53	48	A Avignon, commencement de l'Eclipse douteux.
4	54	30	A Marseille.
	7	30	Différence entre Montpellier & Arles.
	6	18	Différence entre Montpellier & Avignon.
	7	0	Différence entre Montpellier & Marseille.
4	50	56	A Montpellier, Grimaldi dans l'ombre.
	57	40	A Marseille, Grimaldi tout dans l'ombre.
	6	44	Différence entre Montpellier & Marseille.
4	45	20	A Dunkerque, Aristarque sur le bord de l'ombre.

	55′	10″	A Montpellier, l'ombre touche Ariſtarque.
	9	50	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
4	47	20	A Dunkerque, Ariſtarque dans l'ombre.
	57	21	A Montpellier, Ariſtarque eſt tout dans l'ombre.
5	1	0	A Arles, Ariſtarque couvert.
5	0	23	A Avignon, Ariſtarque.
	10	1	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
	13	40	Entre Dunkerque & Arles.
	13	3	Entre Dunkerque & Avignon.
4	58	22	A Montpellier, Kepler au bord de l'ombre.
5	1	46	A Marſeille, Kepler le bord à l'ombre.
	3	24	Différence entre Montpellier & Marſeille.
4	49	30	A Dunkerque, Gaſſendi.
4	59	34	A Montpellier, Gaſſendi eſt au bord de l'ombre.
5	2	36	A Marſeile, Gaſſendi entre dans l'ombre.
	10	4	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
	13	6	Entre Dunkerque & Marſeille.
5	0	23	A Montpellier, l'ombre touche la mer des humeurs.
5	5	0	A Arles, commencement de la mer des humeurs.
5	5	22	A Marſeille, le bord de la mer des humeurs ſur le bord de l'ombre.
	4	37	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	59	Entre Montpellier & Marſeille.
4	56	0	A Dunkerque, Heraclides ſur le bord de l'ombre.
5	5	27	A Montpellier, Heraclides touche l'ombre.

	9′	27″	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
5	6	37	A Montpellier, le bord de Copernic.
5	10	0	A Arles, un bord de Copernic.
5	11	35	A Avignon, l'ombre rase Copernic.
5	12	14	A Marseille, Copernic entre dans l'ombre.
	3	23	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	58	Entre Montpellier & Avignon.
	5	37	Entre Montpellier & Marseille.
5	8	21	A Montpellier, le milieu de Copernic.
	11	30	A Arles, le milieu de Copernic.
	3	9	Différence entre Montpellier & Arles.
5	10	46	A Montpellier, Helicon dans l'ombre.
	13	14	A Avignon, Helicon.
	2	28	Différence entre Montpellier & Avignon.
5	11	56	A Montpellier, Eratosthene.
	16	15	A Marseille, Eratosthene entre dans l'ombre.
	4	19	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	15	14	A Montpellier, l'ombre à Pitatus.
	19	56	A Marseille, Pitatus sur le bord de l'ombre.
	4	42	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	16	24	A Montpellier, Archimede au bord de l'ombre.
	23	0	A Marseille, Archimede entre dans l'ombre.
	6	36	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	16	57	A Montpellier, Platon au bord de l'ombre.
	20	0	A Arles, premier bord de Platon.
	20	14	A Avignon, l'ombre rase Platon.

	3'	3"	Différence entre Montpellier & Arles.
	3	17	Différence entre Montpellier & Avignon.
5	18	9	A Montpellier Platon tout dans l'ombre.
	22	0	A Arles Platon tout couvert.
	3	51	Différence entre Montpellier & Arles.
5	10	15	A Dunkerque, Tycho sur le bord de l'ombre.
5	19	32	A Montpellier, l'ombre au bord de Tycho.
5	22	30	A Arles, commencement de Tycho.
5	25	40	A Marseille, Tycho sur le bord de l'ombre.
	9	17	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
	12	15	Entre Dunkerque & Arles.
	15	25	Entre Dunkerque & Marseille.
5	12	15	A Dunkerque, le milieu de Tycho.
5	20	5	A Montpellier, le milieu de Tycho dans l'ombre.
5	23	20	A Arles, le milieu de Tycho.
	7	50	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
	11	5	Différence entre Dunkerque & Arles.

La Lune se couvre ensuite entierement de nuages à Dunkerque.

5	21	0	A Montpellier, Tycho dans l'ombre.
	25	0	A Arles, Tycho dans l'ombre.
	27	22	A Marseille, Tycho tout dans l'ombre.
	4	0	Différence entre Montpellier & Arles.
	6	22	Entre Montpellier & Marseille.
5	22	36	A Montpellier, le bord de la mer de sérénité.
	26	30	A Arles, un bord de la mer de sérénité.
	3	54	Différence entre Montpellier & Arles.

5	24′	1″	A Montpellier, Manilius dans l'ombre.
	28	30	A Arles, Manilius.
	26	55	A Avignon, Manilius.
	29	48	A Marseille, Manilius tout dans l'ombre.
	4	29	Différence entre Montpellier & Arles.
	2	54	Entre Montpellier & Avignon.
	5	47	Entre Montpellier & Marseille.
5	27	16	A Montpellier, Ménélaus au bord de l'ombre.
	32	30	A Marseille, Ménélaus sur le bord de l'ombre.
	5	14	Différence entre Montpellier & Marselle.
5	28	40	Ménélaus, dans l'ombre à Montpellier.
	30	11	A Avignon, Ménélaus.
	33	36	A Marseille, Ménélaus tout dans l'ombre.
	1	31	Différence entre Montpellier & Avignon.
	4	55	Entre Montpellier & Marseille.
5	31	46	A Montpellier, Pline entierement dans l'ombre.
	33	56	A Avignon, Pline.
	2	10	Différence entre Montpellier & Avignon.
5	35	11	A Montpellier, sainte Catherine dans l'ombre.
	40	14	A Marseille, sainte Catherine.
	5	3	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	35	58	A Montpellier, le bord de la mer du Nectar.
	39	45	A Arles, commencement de la mer du Nectar.
	3	47	Différence entre Montpellier & Arles.
5	38	57	A Avignon, *Promontorium acutum.*
	42	18	A Marseille, *Promontorium acutum* entre dans l'ombre.
	3	21	Différence entre Avignon & Marseille.

à 5	37′	7″	A Montpellier, l'ombre raſe Fracaſtor.
	43	34	A Marſeille, Fracaſtor entre dans l'ombre.
	6	27	Différence entre Montpellier & Marſeille.
à 5	39	24	A Montpellier, le Promontoire du ſonge.
	41	49	A Avignon, le Promontoire du ſonge.
	2	25	Différence entre Montpellier & Avignon.
à 5	42	42	A Montpellier, le bord de Taruntius touche l'ombre.
	44	30	A Arles, Taruntius.
	47	34	A Marſeille, Taruntius entre dans l'ombre.
	1	48	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	52	Entre Montpellier & Marſeille.
à 5	42	45	A Montpellier, l'ombre au bord de Proclus.
	45	37	A Avignon, Proclus.
	2	52	Différence entre Montpellier & Avignon.
à 5	43	39	A Montpellier, Snellius.
	46	45	A Arles, Snellius.
	51	0	A Marſeille, Snellius.
	3	6	Différence entre Montpellier & Arles.
	7	21	Entre Montpellier & Marſeille.
à 5	43	48	A Montpellier, l'ombre au bord de la mer Caſpienne.
	47	30	A Arles, un bord de la mer Caſpienne.
	48	21	A Avignon, l'ombre raſe la mer Caſpienne.
	49	8	A Marſeille, un bord de la mer Caſpienne.
	3	42	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	33	Entre Montpellier & Avignon.
	5	20	Entre Montpellier & Marſeille.

à 5	44′	48″	A Montpellier, Furnerius au bord de l'ombre.
	46	45	A Arles, Furnerius.
	48	46	A Avignon, Furnerius.
	51	0	A Marſeille, Furnerius ſur le bord de l'ombre.
	1	57	Différence entre Montpellier & Arles.
	3	58	Entre Montpellier & Avignon.
	6	12	Entre Montpellier & Marſeille.
à 5	47	8	A Montpellier, l'ombre à Petavius.
	58	0	A Arles, Petavius.
	2	52	Différence entre Montpellier & Arles.
à 5	47	40	A Montpellier, Langrenus au bord de l'ombre
	50	41	A Avignon, Langrenus.
	53	0	A Marſeille, Langrenus entre dans l'ombre.
	3	1	Différence entre Montpellier & Avignon.
	6	20	Entre Montpellier & Marſeille.
à 5	49	50	A Montpellier, la mer Caſpienne dans l'ombre.
	52	0	A Arles, fin de la mer Caſpienne.
	53	42	A Marſeille, fin de la mer Caſpienne.
	2	10	Différence entre Montpellier & Arles.
	3	52	Différence entre Montpellier & Marſeille.
à 5	53	7	A Montpellier, Immerſion totale.
	57	0	A Arles.
	57	45	A Avignon.
	58	15	A Marſeille.
	3	53	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	38	Entre Montpellier & Avignon.
	5	8	Entre Montpellier & Marſeille.

Donc	1^h	5′	37″	Durée totale à Montpellier.
	1	2	0	Durée totale à Arles.
	1	3	57	Durée totale à Avignon.
	1	3	45	Durée totale à Marseille.
Et à	5	20	18	Milieu de l'Eclipse à Montpellier.
	5	26	0	Milieu à Arles.
	5	25	46	Milieu à Avignon.
	5	26	22	Milieu à Marseille,
Donc		5	42	Différence entre Montpellier & Arles, tirée du milieu de l'Eclipse.
		5	28	Différence entre Montpellier & Avignon.
		6	4	Entre Montpellier & Marseille.

En prenant un milieu entre les différences qui résultent de l'Immersion des Taches dans l'ombre, l'on trouve la différence des méridiens entre Dunkerque & Montpellier de 9′ 25″, dont Montpellier est plus Oriental que Dunkerque : mais l'on a déterminé par les Eclipses des Satellites de Jupiter la différence entre Paris & Dunkerque de 3 secondes de temps ; dont Dunkerque est plus Oriental que Paris. L'on aura donc la différence des méridiens entre Paris & Montpellier de 9′ 28″. Cette différence est beaucoup plus grande que celle que l'on a déterminée par les observations des Satellites de Jupiter de 6′ 10″, & que celle qui résulte des triangles de la méridienne que l'on a trouvés de 6 8 ′; de sorte qu'il est nécessaire d'attribuer cette différence, au moins en partie, à la difficulté que l'on a eue de régler la pendule de Dunkerque, à cause du mauvais temps qu'il y a fait plusieurs jours auparavant. En comparant les observations des Taches qui ont été faites en même temps à Montpellier & à Arles, & prenant un milieu l'on trouve la différence des méridiens entre ces deux Villes de 3′ 20″ de temps, dont Arles est plus Oriental que Montpellier, peu différente de celle qui est marquée dans la Carte que l'on a dressée sur les triangles de la méridienne, où on l'a déterminée de 49′ de degré, ou de 3′ 16″ de temps.

Les obſervations des Taches qui ont été faites à Montpellier & à Avignon donnent la différence entre ces deux Villes de 3′ 6″ plus petite que celle qui réſulte des triangles de la méridienne, où on l'a déterminée de 3′ 52″.

La différence des méridiens de Montpellier & Marſeille, qui réſulte des obſervations des Taches faites dans ces deux Villes, eſt de 5′ 24″, qui étant ajoûtées à la différence entre Paris & Montpellier de 6′. 8″, donnent la différence des méridiens entre Paris & Marſeille de 11′ 31″.

L'obſervation de Montpellier a été faite avec une Lunette de 15 pieds. L'on remarqua à 5^h 38′ que l'ombre qui avoit paru mal terminée & ambigue depuis le commencement de l'Eclipſe juſqu'à cette heure, paroiſſoit alors un peu plus nette & mieux tranchée ; ce qui doit rendre les obſervations ſuivantes plus exactes que les précédentes. L'Immerſion totale ſe fit entre Langrenus & une Tache obſcure à pluſieurs rameaux qui eſt au-deſſus de la mer des Criſes. Cet endroit du diſque eſt preſque diamétralement oppoſé à celui où commença l'Eclipſe, d'où l'on conclut que le centre de la Lune paſſa fort près du centre de l'ombre. Après l'Immerſion totale, la Lune parut d'abord d'une couleur griſe & plombée, & ſi ſombre qu'on avoit bien de la peine à y diſtinguer les Taches. Quelque temps après, elle commença à rougir autour de ſa circonférence, & vers les 6 heures & un quart, on y voyoit une diſque entier d'ombre aſſez bien terminé qui occupoit environ la moitié du diametre de la Lune. On fut fort ſurpris lorſqu'en retournant à l'obſervation vers les 6 heures & demie, on ne vit plus la Lune dans le ciel, qui étoit pourtant très-clair & très-ſerein : cette nuit ayant été la plus favorable & la plus belle qu'on eût pu ſouhaiter. Ils remarquerent que quoique le crépuſcule qui étoit déja aſſez fort parût être une des principales cauſes d'un Phénomene ſi extraordinaire, on ne pourroit pourtant la lui attribuer entierement, puiſque l'on diſtinguoit encore pluſieurs étoiles vers l'Orient & vers l'Occident.

A Arles le diſque de la Lune parut toujours après ſa totale Immerſion d'un rouge obſcur ou brun ; & pendant le

paſſage de l'ombre ſur le corps de la Lune, cette ombre parut notablement dentelée en pluſieurs endroits, comme ſi c'eût été l'ombre de quelques montagnes de la terre, & particulierement lorſque le diſque de la Lune étoit couvert environ la moitié.

A Avignon le peu d'obſcurité qu'avoit l'ombre de la terre, n'a point permis de bien diſtinguer le commencement de l'Eclipſe. La Lune parut pendant tout le temps de l'Eclipſe extraordinairement éclairée & d'un rouge fort clair, ſi bien qu'on auroit jugé qu'elle étoit tranſparente, que le Soleil étoit derriere ſon globe, & que ſes rayons paſſoient à travers, de la même maniere qu'ils ſont à travers certaines pierres qui ſont un peu diaphanes. On vit auſſi une eſpece de couronne lumineuſe, parallele à la circonférence de la Lune; mais il fut impoſſible d'en bien déterminer la grandeur, quoique le reſte du corps de la Lune fut ſenſiblement plus obſcur.

L'obſervation a été faite à Marſeille avec une très-bonne Lunette de 3 pieds, excepté quelques Taches du milieu qui ont été obſervées avec une bonne Lunette de 13 pieds. A 6^h 15″ on voyoit encore les mers qui étoient au Nord-Oueſt de la Lune, & qui étoient entrées les dernieres dans l'ombre. La Lune étoit rougeâtre au Nord-Oueſt; mais au Sud-Eſt elle étoit fort obſcure. A 6^h 30′, la Lune a commencé à diſparoître, ſoit à cauſe du crépuſcule qui commençoit à être aſſez grand, ſoit à cauſe des vapeurs qui étoient voiſines de l'horiſon. A 6^h 50′, on vit encore la Lune avec beaucoup de peine: mais elle ne paroiſſoit pas devoir ſortir bientôt de l'ombre.

On n'a pu voir depuis ce temps-là le commencement de l'Emerſion, ni même la Lune. Cependant le temps étoit fort ſerein, le Ciel fort net, le vent de Nord ayant fraîchi dès le commencement de l'Eclipſe, & augmenté au lever du Soleil. En comparant cette Eclipſe avec celle du 20. Juin paſſé, on voit que la Lune eſt entrée plus directement & plus profondément dans l'ombre de l'atmoſphere de la terre: car on n'a point vu ce Croiſſant de la maniere qu'on remarqua dans l'autre Eclipſe.

MANIERE GÉNÉRALE

De déterminer géométriquement le foyer d'une Lentille, formée par deux Courbes quelconques, de même ou de différente nature, telle que puisse être la raison de la réfraction, & de quelque maniere que puissent tomber les rayons de lumiere sur une des faces de cette Lentille; c'est-à-dire, soit qu'ils y tombent divergens, paralleles, ou convergens.

PAR M. GUISNE'E.

PROBLEME I.

1704. 9. Fevrier. FIGURE I. I. SOit *KBLEK* la section d'une Lentille convexe des deux côtés, formée par deux Courbes *KBL*, *KEL*, dont *BE* perpendiculaire aux deux Courbes, & indéfiniment prolongée de part & d'autre, est l'axe commun, & celui de la Lentille.

1. Il est démontré dans la 5me sect. du Livre des Infiniment petits, qu'il y a une infinité de Courbes dont l'axe touche la développée à une certaine distance de son sommet. Soit donc *c* le point où l'axe *BE* de la Courbe *KBL* touche la développée de cette Courbe; *C* le point où l'axe *EB* de la Courbe *KEL* touche la développée de cette derniere Courbe; c'est-à-dire, que *Bc*, & *EC* soient deux rayons des développées de ces deux Courbes, ensorte que les quatre points *c*, *E*, *B*, *C*, soient sur l'axe de la Lentille *BE*. Cela posé,

Soit *A* un point lumineux sur l'axe de la Lentille; *AD*, un rayon incident infiniment proche de *AB*, & par conséquent égal à *AB*; *DF*, le rayon rompu de l'incident *AD*; *AR*, un autre rayon incident infiniment proche de *AD*; *RF*, son rayon rompu.

3. Il

3. Il eſt clair par ce qui eſt démontré dans la 7ᵐᵉ ſect. de l'Analyſe des Infiniment petits, que le point *F* où concourent les rayons rompus *DF*, *RF*, eſt l'endroit où la Cauſtique par réfraction de la Courbe *KBL* touche l'axe *cC* de la Lentille, puiſque l'on ſuppoſe que le point *D* eſt infiniment proche de *B*. D'où il ſuit qu'aucun rayon rompu ne coupe cet axe au-deſſous de *F* par rapport à la Lentille, & que le même point *F* eſt l'endroit où il ſe réunit un plus grand nombre de rayons venant du point lumineux *A*, & rompus à la rencontre de la face *KBL* de la Lentille ; c'eſt pourquoi le point *F* eſt le foyer cauſé par cette face.

4. Si l'on regarde préſentement les deux rayons rompus *DF*, *RF*, des incidens *AD*, *AR*, comme incidens & tombant ſur le côté concave de la Courbe *KEL* aux points *H* & *I*; leurs rayons rompus *Hf*, *If*, ſe rencontreront en un point *f* de l'axe *cC* où la Cauſtique par réfraction de la Courbe *KEL* le touche, puiſque le point *H* eſt infiniment proche de *E*, & le point *f* ſera par conſéquent le foyer de la face *KEL*, ou de la Lentille *KBLEK* qu'il s'agit de déterminer. Ce foyer *f* ſera poſitif, lorſqu'il tombera du côté de *F* par rapport à la Lentille; négatif lorſqu'il tombera du côté de *A*; infini lorſque les rayons ſeront paralleles après avoir traverſé la Lentille, & ſouffert les deux réfractions qui ſe font ſur ſes deux faces.

5. Il eſt clair par la 5ᵐᵉ ſect. de l'Analyſe des Infiniment petits, que les perpendiculaires *Dc* & *HC* aux Courbes *KBL* & *KEL*, menées par les points *D* & *H*, toucheront les développées de ces Courbes aux points *c* & *C*, où leurs axes *Bc* & *EC* les touchent, puiſque par l'hypotheſe les points *D* & *H* ſont infiniment proches de *B* & de *E*, & partant que $Dc = Bc$ & $HC = EC$.

6. Ayant décrit des centres *A* & *F* les petits arcs *DT*, *DS*, mené du point *c* ſur les rayons incidens *AD*, *AR* prolongés, les perpendiculaires *cP*, *cp*, & ſur les rayons rompus *DF*, *RF* les perpendiculaires *cQ*, *cq*; *cP* ſera le ſinus de l'angle d'incidence *cDP*, *rp*, ſa différence; *cQ* le ſinus de l'angle rompu *cDQ*, & *ſq* ſa différence.

7. Ayant nommé AD, ou AB, y; cD, ou cB, a; DP ou Dr, g; DQ, ou Df, h; cP, r; DF, x; QF, ou fF sera $x-h$; AP, ou Ar, $y+g$; & TR, dy.

8. Les triangles rectangles cPD, RTD, étant semblables, puisque leurs angles PDc, TDR sont tous deux le complément de l'angle PDR, l'on aura cP (r). PD (g) :: RT (dy). $DT = \frac{gdy}{r}$.

9. Les petits secteurs ou triangles semblables ADT, Arp donnent AD (y). AP ou AR $(y+g)$ :: $DT\left(\frac{gdy}{r}\right)$. $rp = \frac{gydy + ggdy}{ry}$.

10. En supposant que cP, sinus de l'angle d'incidence cDP, soit à cQ, sinus de l'angle rompu cdQ, comme m à n : & puisque cP. cQ :: rp. fq, l'on aura m. n. :: rp $\left(\frac{gydy + ggdy}{ry}\right)$. $fq = \frac{ngydy + nggdy}{mry}$.

11. Les triangles rectangles cQD, RSD, dont les angles cDQ, RDS sont tous deux le complément de l'angle QDR, sont semblables, comme aussi (*num.* 8.) les triangles cPD, RTD; c'est pourquoi l'on aura à cause des hypotenuses communes, DP (g). DQ (h) :: DT $\left(\frac{gdy}{r}\right)$. $DS = \frac{hdy}{r}$.

12. A cause des triangles ou secteurs semblables FDS, Ffq, l'on a $\frac{hdy}{r}$ (DS). $\frac{ngydy + nggdy}{mry}$ (fq) :: x (DF). $x-h$ $(fF$, ou $QF)$, d'où l'on tire $x = \frac{mhhy}{mhy - ngy - ngg} = DF$.

13. Mais parce que l'on suppose que le rayon incident AD est infiniment proche de AB, il passera aussi-bien que son rompu DF infiniment proche du point c; c'est pourquoi les perpendiculaires cP, cQ pourront être considérées comme nulles, ou $= o$; & alors $DP = g$, & $DQ = h$ deviendront $= Bc = a$, & $DF = x$ sera égale à BF. Mettant donc a en la place de g, & de h dans l'équation précédente, l'on aura $x = \frac{may}{my - ny - na}$ ou $x = \frac{may}{py - na}$ $= BF$, en mettant p pour $m-n$.

14. De même ayant décrit des centres F & f les petits arcs Hi, Ho, tiré du point C, où l'axe de la Courbe EL touche la développée de cette Courbe, ſur les prolongemens des rayons FD, FR, les perpendiculaires CM, Cm: & ſur les prolongemens des rayons rompus fH, fI, les perpendiculaires CN, Cn, & mené HC, qui ſera le rayon de la développée au point H, puiſque H eſt infiniment proche de E, & par conſéquent perpendiculaire à la Courbe EL, & égale à EC; c'eſt pourquoi CM ſera le ſinus de l'angle d'incidence CHM; um, ſa différence; CN, le ſinus de l'angle rompu CHN; & tn, ſa différence.

15. Nommant donc CH, ou CE, b; HM, k; HN, ou Ht, l; CM, t; FH, u; fH, z; HD, $ſ$; FM, ou Fu ſera $u+k$; fN, ou ft, $z+l$; & Ii, du.

16. Les triangles rectangles CMH, IiH, qui ſont ſemblables, puiſque leurs angles CHM, IHi ſont tous deux le complément de l'angle MHI, donneront CM (t). MH (k) :: Ii (du) $Hi = \frac{kdu}{t}$.

17. A cauſe des triangles ou ſecteurs ſemblables FHi, Fum, l'on a FH (u). FM, ou Fu $(u+k)$ :: Hi $\left(\frac{kdu}{t}\right)$. $um = \frac{ukdu+kkdu}{tu}$.

18. Puiſque (*num.* 10.) la raiſon de la réfraction eſt comme m à n, & qu'en ce cas le ſinus CM de l'angle d'incidence CHM, eſt au ſinus CN de l'angle rompu CHN comme n à m, & qu'outre cela CM. CN :: um. tn, l'on aura nm :: um $\left(\frac{ukdu+kkdu}{tu}\right)$. $tn = \frac{mukdu+mkkdu}{ntu}$.

19. Les triangles rectangles CNH, IOH qui ſont ſemblables, puiſque leurs angles NHC, OHI ſont tous deux le complément de l'angle NHI: comme auſſi les triangles rectangles CMH, IiH, donneront à cauſe des hypotenuſes communes, MH (k). NH (l) :: iH $\left(\frac{kdu}{t}\right)$. $OH = \frac{ldu}{t}$.

20. Enfin à cauſe des triangles ou ſecteurs ſemblables

ftn, fHO, l'on aura $z + l$ (fN, ou ft). z (fH) :: $\frac{mukdu + mkkdu}{ntu}$ (tn). $\frac{ldu}{t}$ (HO), d'où l'on tire $u = \frac{mkkz}{nll + nlz - mkz}$.

21. Mais parce que le rayon incident DF, auſſi-bien que ſon rompu Hf ſont infiniment proches de l'axe AE, ils paſſeront infiniment proche du point C; c'eſt pourquoi les perpendiculaires CM, CN peuvent être regardées comme nulles, ou égales à zero; & alors HM & HN ſe confondront avec $EC = b$, & $HD = ſ$, avec EB. Mettant donc b en la place de k & de l dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci : $u = \frac{mbz}{nb + nz - mz}$, ou $u = \frac{mbz}{nb - pz}$, en mettant p pour $m - n$. Or FH, ou $FE = FB - BE = x - ſ = u$; donc $x - ſ = \frac{mbz}{nb - pz}$. Mais (*num.* 13.) $x = \frac{may}{py - na}$; donc $\frac{may}{py - na} - ſ = \frac{mbz}{nb - pz}$, d'où l'on tire,

$$z = \frac{mnaby - npbſy + nnabſ}{mpay + mpby - ppſy + npaſ - mnab} = Ef.$$

22. Si l'on veut négliger l'épaiſſeur de la Lentille où l'on n'a très-ſouvent point d'égard, il n'y a qu'à faire $ſ = o$, ce qui détruira tous les termes où elle ſe rencontre, & l'on aura,

$$z = \frac{naby}{pay + pby - nab} = Ef.$$

AUTRE SOLUTION plus ſimple que la précédente.

II. Les choſes demeurant toujours dans le même état,
FIG. II. excepté que l'on ne ſuppoſe ici qu'un ſeul rayon incident AD, & qu'outre cela l'on mene les petites droites DI & HG perpendiculaires à BE.

Il eſt clair que les petites droites DI, HG ſeront auſſi perpendiculaires aux rayons AD, DF & Hf à cauſe du point D infiniment proche de B.

Nommant donc comme auparavant AD, ou AB, ou AI, y; Bc, a, EC, b; BE, $ſ$; DF, ou BF, x; HF, ou EF, ou GF, u; Hf, ou Ef, ou Gf, z; cP, r; CM, t; Ac ſera $y+a$; FC, $u+b$. Fc, $x-a$, & la raiſon de la réfraction $\frac{m}{n}$.

1. Les triangles ſemblables AcP, AID donneront Ac $(y+a)$. AI (y) :: cP (r) $ID = \frac{ry}{y+a}$.

2. L'on a à cauſe de la réfraction $m.\ n$ :: cP (r). $cQ = \frac{nr}{m}$

3. Les triangles ſemblables FID, FcQ, donnent x (FI). $x-a$ (Fc) :: $\frac{ry}{y+a}$ (ID). $\frac{nr}{m}$ (cQ), d'où l'on tire $x = \frac{may}{my-ny-na} = BF$, ou $x = \frac{may}{py-na}$, en mettant p pour $m-n$.

4. Les triangles ſemblables FCM, FGH donnent FC $(u+b)$. FG (u) :: CM (t). $GH = \frac{tu}{u+b}$.

5. A cauſe de la réfraction, l'on a $n.\ m$ :: CM (t). $CN = \frac{mt}{n}$

6. Enfin les triangles ſemblables fCN, FGH donnent $z+b$ (fC). z (fG) :: $\frac{mt}{n}$ (CN). $\frac{tu}{u+b}$ (GH), d'où l'on tire $u = \frac{mby}{nb+nz-mz} = Ef$, ou $u = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant p pour $m-n$, ou $x-ſ = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant pour u ſa valeur $x-ſ$. Si l'on met préſentement dans cette derniere équation en la place de x ſa valeur priſe dans l'équation précédente $x = \frac{may}{py-na}$, l'on aura la ſuivante, où l'on a égard à l'épaiſſeur du verre.

$$z = \frac{mnaby-npbſy+nnabſ}{mpay+mpby-ppſy+npaſ-mnab} = Ef, \text{ ou}$$

$$z = \frac{naby}{pay+pby-nab} = Ef,$$ où l'on néglige l'épaiſſeur du verre. Ces deux équations ſont celles de l'art. 1. n. 21. & 22.

III. Comme l'on n'emploie dans les inſtrumens de Diop-

trique que des Lentilles de verre, où la réfraction se fait à peu près dans la raison de 3 à 2; si l'on fait $m=3$, $n=2$, p sera $=1$, & les deux équations précédentes se changeront en les deux qui suivent, qui serviront de regles générales pour les verres convexes des deux côtés, tels qu'on les a supposés en faisant le calcul. Et parce qu'on a supposé le point A peu éloigné du verre, les rayons tomberont divergens sur la face KBL.

Regles pour les verres convexes des deux côtés.

$$1.\quad z=\frac{6aby-2bfy+4abf}{3ay+3by-fy+2af-6ab}=Ef.$$

$$2.\quad z=\frac{2aby}{ay+by-2ab}=Ef.$$

Si les Courbes KBL, KEL sont des cercles, Bc & EC en seront les demi-diametres: si les Courbes sont des sections Coniques, Bc & EC seront la moitié de leurs parametres. On déterminera par la 5me section de l'Analyse des Infiniment petits la grandeur de Bc & de EC dans les autres Courbes. Et l'on prendra pour des lignes droites les Courbes KBL, KEL, lorsque les mêmes rayons Bc, EC seront infinis.

IV. Si dans les deux équations précédentes $a=\infty$, KBL deviendra une ligne droite, & le verre sera par conséquent *plan convexe*, & son côté plat sera tourné vers le point lumineux A. Et ayant effacé tous les termes où a ne se rencontre point, parce qu'alors ils sont nuls par rapport à ceux où a se trouve, l'on aura

Regles pour les verres plans convexes.

$$3.\quad z=\frac{6by+4bf}{3y+2f-6b}.$$

$$4.\quad z=\frac{2by}{y-2b}.$$

V. Si dans les deux mêmes équations $b=\infty$, KEL deviendra une ligne droite; le verre sera *convexe plan*: son côté convexe sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres convexes plans.

$$5.\quad z=\frac{6ay-2fy+4af}{3y-6a}.$$

$$6.\quad z=\frac{2ay}{y-2a}.$$

VI. Si $a=\infty$, & qu'on change les signes des termes où

b ſe rencontre, la Courbe KBL deviendra une ligne droite, & KEL tournera ſa convexité vers B; c'eſt pourquoi le verre ſera *plan concave*, dont le côté plat ſera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres plans concaves.

$$7.\quad z = \frac{-6by - 4bf}{3y + 2f + 6ab}.$$

$$8.\quad z = \frac{-2by}{y + 2b}.$$

VII. Si $b = \infty$, & qu'on change les ſignes des termes où a ſe rencontre, le verre ſera *concave plan*: ſon côté concave ſera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres concaves plans.

$$9.\quad z = \frac{-6ay - 2fy - 4af}{3y + 6a}.$$

$$10.\quad z = \frac{-2ay}{y + 2a}.$$

VIII. Si l'on change les ſignes des termes où b ſe rencontre, le verre ſera *convexo-concave*: le côté convexe regardera le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres convexo-concaves.

$$11.\quad z = \frac{-6aby + 2bfy - 4abf}{3ay - 3by - fy + 2af + 6ab}.$$

$$12.\quad z = \frac{-2aby}{ay - by + 2ab}.$$

IX. Si l'on change les ſignes des termes où a ſe rencontre, le verre ſera *concavo-convexe*: le côté concave ſera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres concavo-convexes.

$$13.\quad z = \frac{-6aby - 2bfy - 4abf}{-3ay + 3by - fy - 2af + 6ab}.$$

$$14.\quad z = \frac{-aby}{-ay + by + 2ab}.$$

X. Si l'on change les ſignes des termes où a & b ne ſe rencontrent point enſemble, ſans changer ceux des termes où elles ne ſe trouvent ni l'une ni l'autre, le verre ſera concavo-concave, & l'on aura

Regles pour les verres concavo-concaves.

$$15.\quad z = \frac{6aby + 2bfy + 4abf}{-3ay - 3by - fy - 2af - 6ab}.$$

$$16.\quad z = \frac{2aby}{-ay - by - 2ab}.$$

XI. Si a & $b = \infty$, le verre ſera plat des deux côtés, & l'on aura

Regles pour les verres plans des deux côtés.

$$17.\quad z = -y - \tfrac{2}{3}f.$$

$$18.\quad z = -y.$$

XII. Si $a=o$. Ce qui se rencontre dans plusieurs Courbes, l'on aura

19. $$z = \frac{-2bf}{3b-f}.$$

20. $$z = \frac{o}{by} = o.$$

XIII. Si $b=o$, l'on aura

21. $$z = \frac{o}{3ay - fy + 2af} = o.$$

22. $$z = \frac{o}{ay} = o.$$

XIV. Si a & $b=o$, l'on aura

23. $$z = \frac{o}{-fy} = o.$$

24. $$z = o.$$

L'on a supposé en faisant le calcul que le point lumineux A étoit peu éloigné du verre; c'est pourquoi toutes les regles précédentes se rapportent au cas où les rayons tombent divergens sur la face KBL qui regarde le point lumineux.

Pour les rayons paralleles.

XV. Si l'on fait y infinie dans toutes les regles précédentes, en effaçant tous les termes où elle ne se rencontre point, l'on aura autant d'autres regles qui se rapporteront au cas où les rayons tombent paralleles sur la face KBL, puisque le point A en sera alors infiniment éloigné.

Pour les rayons convergens.

XVI. Si l'on change les signes des termes où y se rencontre dans les regles précédentes, elles renfermeront le cas où les rayons tombent convergens sur la face KBL, puisque le point lumineux A se trouvera alors du côté de F.

CONCLUSION.

XVII. Il est clair que toutes les quantités renfermées dans toutes les équations précédentes étant données, à la réserve de $z = Ef$; cette quantité z sera aussi déterminée, *Ce qui étoit proposé.*

COROLLAIRES

COROLLAIRES
tirés de la premiere équation.

$$z = \frac{6aby - 2bsy + 4abs}{3ay + 3by - sy + 2as - 6ab}.$$

XVIII. 1. Il eſt clair que le foyer Ef ſera poſitif, lorſque $6aby + 4abs > 2bsy$, & $3ay + 3by + 2as > sy + 6ab$, & au contraire; négatif, lorſque $6aby + 4abs > 2bsy$, & $3ay + 3by + 2as < sy + 6ab$, & au contraire; infini, lorſque $3ay + 3by + 2as = sy + 6ab$, & $6aby + 4abs >$ ou $< 2bsy$; $= 0$, lorſque $6aby + 4abs = 2bsy$, c'eſt-à-dire, qu'en ce cas le point f tombera en E.

Cas des rayons divergens.

2. Si $y = b$, l'on aura $z = \frac{6abb - 2bbs + 4abs}{3bb - bs + 2as - 3ab}$. Et le foyer ſera poſitif, lorſque $6abb + 4abs > 2bbs$, & $3bb + 2as > bs + 3ab$, & au contraire; négatif, lorſque $6abb + 4abs > 2bbs$, & $3bb + 2as < bs + 3ab$, & au contraire; infini, lorſque $3bb + 2as = bs + 3ab$, & $6abb + 4abs >$ ou $< 2bbs$; $= 0$, lorſque $6abb + 4abs = 2bbs$.

3. Si $y = a$, l'équation deviendra $z = \frac{6aab + 2abs}{3aa + as - 3ab}$, & le foyer ſera poſitif ſi $3aa + as > 3ab$; négatif, ſi $3aa + as < 3ab$; infini, ſi $3aa + as = 3ab$. Il ne peut en ce cas être $= 0$.

4. Si $a = b$, l'on aura $z = \frac{6aay - 2asy + 4aas}{6ay - sy + 2as - 6aa}$, & le foyer ſera poſitif, lorſque $6aay + 4aas > 2asy$, & $6ay + 2as > sy + 6aa$, & au contraire; négatif, lorſque $6aay + 4aas > 2asy$, & $6ay + 2as < sy + 6aa$, & au contraire; infini, lorſque $6ay + 2as = sy + 6aa$, & $6aay + 4aas >$ ou $< 2asy$; $= 0$, lorſque $6aay + 4aas = 2asy$.

5. Si $a = b = y$, l'on aura $z = \frac{6aa + 2as}{s}$, & le foyer ſera toujours poſitif.

6. Si $a=b$, $f=2a$, & que les Courbes *KBL*, *KEL* ſoient des cercles ; le verre ſera une ſphere, & l'on aura $z=\frac{ay+4aa}{2y-a}$, qui montre que le foyer ſera poſitif lorſque $2y>a$; négatif, lorſque $2y<a$; infini, lorſque $y=\frac{1}{2}a$.

Cas des rayons paralleles.

7. Si l'on fait $y=\infty$, l'on aura $z=\frac{6ab-2bf}{3a+3b-f}$, d'où l'on voit que le foyer qui en ce cas eſt appellé foyer *abſolu*, ou foyer *principal*, ſera poſitif, lorſque $6ab>2bf$, & $3a+3b>f$, & au contraire ; négatif, lorſque $6ab>2bf$, & $3a+3b<f$, & au contraire ; infini, lorſque $3a+3b=f$, & $6ab>$ ou $<2bf$; $=0$, lorſque $6ab=2bf$.

8. Si $a=b$, l'on aura $z=\frac{6aa-2af}{6a-f}$; d'où il ſuit que le foyer ſera poſitif lorſque $6aa>2af$ & $6a>f$, & au contraire ; négatif, lorſque $6aa>2af$ & $6a<f$, & au contraire ; infini, lorſque $6a=f$ & $6aa>$ ou $<2af$; $=0$, lorſque $6aa=2af$.

9. Si $b=a$, $f=2a$, & que les Courbes *KBL*, *KEL* ſoient des cercles, le verre ſera une ſphere, & l'on aura $z=\frac{1}{2}a$.

Cas des rayons convergens.

10. En changeant les ſignes des termes où y ſe rencontre, l'on aura $z\frac{-6aby+2bfy+4abf}{-3ay-3by+fy+2af-6ab}$, d'où l'on tirera des Corollaires comme l'on a fait dans les 2 cas précédens.

COROLLAIRES
tirés de la ſeconde équation.

$$z=\frac{2aby}{ay+by-2ab}.$$

XIX. 1. Il eſt clair que le foyer ſera poſitif, lorſque $ay+by>2ab$; négatif, lorſque $ay+by<2ab$; infini, lorſque $ay+by=2ab$.

Cas des rayons divergens.

2. Si $y=b$, l'on aura $z=\frac{2ab}{b-a}$, qui fait voir que le foyer ſera poſitif, lorſque $b>a$; négatif, lorſque $b<a$; infini, lorſque $b=a$.

3. Si $y=a$, l'on aura $z=\frac{2ab}{a-b}$, qui montre que le foyer sera positif, lorsque $a>b$; négatif, lorsque $a<b$; infini, lorsque $a=b$.

4. Si $b=a$, l'on aura $z=\frac{ay}{y-a}$, & le foyer sera positif lorsque $y>a$; négatif, lorsque $y<a$; infini, lorsque $y=a$.

5. Si $y=a=b$, l'on aura $z=\infty$.

6. Si $y=\infty$, l'on aura $z=\frac{2ab}{a+b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif. Cas des rayons paralleles.

7. Si $a=b$, l'on aura $z=a$.

8. Si l'on change les signes des termes où y se trouve, l'on aura $z=\frac{-2aby}{-ay-by-2ab}=\frac{2aby}{ay+by+2ab}$, qui montre que le foyer sera toujours positif, quelque supposition que l'on y fasse. Cas des rayons convergens.

COROLLAIRES
tirés de la troisieme équation.

$$z=\frac{6by+4bf}{3y+2f-6b}.$$

XX. 1. Elle fait voir que le foyer sera positif, lorsque $3y+2f>6b$; négatif, lorsque $3y+2f<6b$; infini, lorsque $3y+2f=6b$. Cas des rayons divergens.

2 Si $y=b$, l'on aura $z=\frac{6bb+4bf}{2f-3b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif, lorsque $2f>3b$; négatif, lorsque $2f<3b$; infini, lorsque $2f=3b$.

3. Si $f=b$, & que la Courbe *KEL* soit un cercle, le verre sera une demi-sphere, & l'on aura $z=\frac{6by+4bb}{3y-4b}$, d'où il suit que le foyer sera positif, lorsque $3y>4b$; négatif, lorsque $3y<4b$; infini, lorsque $3y=4b$.

4. En faisant $y=\infty$, l'on aura $z=2b$. Cas des rayons paralleles.

On tirera des Corollaires des autres formules comme

l'on a fait des précédentes, & les uns & les autres pourront souvent être réduits à des expressions plus simples.

COROLLAIRES GENERAUX.

XXI. Il est clair que des six choses renfermées dans les équations précédentes, (qui sont la distance BA du verre au point lumineux; celle du foyer Bf, les deux rayons Bc, EC, l'épaisseur du verre BE, & la raison de la réfraction $\frac{m}{n}$) cinq étant données, la sixième le sera aussi.

1. Soit, par exemple, l'équation $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$ qui est celle du premier article *num.* 22. si l'on suppose que tout soit donné excepté la raison de la réfraction $\frac{m}{n}$, ayant remis en la place de p sa valeur (*art.* 1 *num.* 13.) $m - n$, l'on tirera de cette équation $\frac{m}{n} = \frac{aby + azy + bzy + abz}{azy + bzy}$ $= y + \frac{aby + abz}{azy + bzy}$. C'est pourquoi en assignant à n une valeur arbitraire telle que l'on voudra, l'on aura celle de m, & par conséquent le rapport de m à n sera donné.

2. Si dans la même équation tout est connu excepté a, l'on en tirera $a = \frac{pbyz}{nby + nbz - pyz}$.

3. Si tout est connu à la réserve de y, l'on en tirera $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$. Où l'on remarquera que si le foyer devenoit le point lumineux, le point lumineux deviendroit le foyer, puisque ces deux équations $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$ & $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$ ne different qu'en ce que z est en la place de y, & y en la place de z, ce qui est une des principales propriétés de la réfraction; savoir, que si un rayon de lumiere, après avoir souffert tant de réfraction qu'on voudra, retournoit sur ses pas, il repasseroit par le même chemin.

PROBLEME II.

XXII. *Un verre quelconque* KL *étant donné, & son foyer F, formé par les rayons qui partent d'un point lumineux* A *pris sur l'axe* BE *du verre, étant déterminé par quelqu'une des regles & dans quelqu'une des hypotheses précédentes; déterminer le nouveau foyer qui résultera de la position d'un autre verre quelconque* MN, *aussi donné, au-dessous du premier* KL, *ayant tous deux un même axe* ABD, *quelque distance qu'il y ait entre l'un & l'autre verre.* FIG. III.

1. En supposant, 1° que le verre *MN* soit convexe des deux côtés. 2° Que le foyer du verre *KL* soit positif en *F*. 3° Que le verre *MN* soit placé entre le verre *KL* & son foyer *F*. 4° Que le foyer du verre *MN* soit positif en *I*; l'on prendra le foyer *F* du verre *KL* par le point lumineux, & les rayons tomberont par conséquent convergens sur la face *MCN* du verre *MN*; & nommant le rayon de la développée de la Courbe *MCM* au point *C*, *c*, celui de la Courbe *MDN* au point *D*, *d*, la distance *DI* du verre *MN* à son foyer *I*, *f*, l'épaisseur *CD*, *r*, la distance *CF* du verre *MN* au foyer *F* du verre *KL*, *x*; l'on aura article 16, en ayant égard à l'épaisseur du verre.

$$1.\quad f = \frac{-6cdx + 2drx + 4cdr}{-3cx - 3dx + rx + 2cr - 6cd} = DI, \text{ ou}$$

$$2.\quad f = \frac{-2cdx}{-cxax - 2cd} = \frac{2cdx}{cx + dx + 2cd} = DI, \text{ en}$$

négligeant l'épaisseur du verre. Mais par l'hypothese *EF* est donnée; c'est pourquoi la distance *CE* des deux verres étant donnée, *FC* $= x$ le sera aussi, & par conséquent $DI = f$. *Ce qu'il falloit trouver.*

2. Si le foyer *F* du verre *KL* étoit négatif, ou si le verre *MN* étoit placé au-dessous de *F* en *mn*, les rayons partant de *F* tomberoient divergens sur la face *mcn* du verre *mn*, & *FC* $= x$ deviendroit négative de positive qu'elle étoit; c'est pourquoi en changeant les signes des termes où x se trouve, l'on auroit

$$3.\quad f = \frac{6cdx - 2drx + 4cdr}{3cx + 3dx - rx + 2cr - 6cd}.$$

4. $f = \frac{2cdx}{cx + dx - 2cd}$.

3. Si le foyer F du verre KL étoit infini, $FC = x$ qui ne differe de FE que de la grandeur finie CE, le seroit aussi; c'est pourquoi les termes où x ne se rencontre point étant nuls ou $= o$ par rapport à ceux où elles se rencontrent dans la 3e & 4e équation, l'on auroit

5. $f = \frac{6cd - 2dr}{3c + 3d - r}$.

6. $f = \frac{2cd}{c + d}$.

4. Il est aisé d'appliquer ces équations à tel verre qu'on voudra, comme l'on a fait dans les regles précédentes, & d'en tirer des Corollaires, pourvu qu'on observe que $x = FC$ ne peut point recevoir d'autres variations que celles que le verre KL, qui peut être aussi tel qu'on voudra, lui donne.

5. On trouvera de même le foyer qui résulte de la position de plusieurs verres placés sur un même axe, en prenant toujours le foyer du dernier pour le point lumineux.

6. S'il y a un ou plusieurs verres KL, MN placés sur un même axe AF, & dont le foyer soit I, on pourra encore par le moyen des regles précédentes placer un nouveau verre donné PQ sur le même axe AF, ensorte que les rayons venant du point I, soient paralleles après avoir traversé le nouveau verre PQ: car il n'y a pour cela qu'à prendre celles des équations précédentes qui lui convient dans le cas des rayons divergens, & ayant fait z ou $f = \infty$, on en tirera une valeur de y ou de x qui sera la distance cherchée IR. Soit, par exemple, le verre donné PRQ convexe des deux côtés, & dont on ne considere point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est la seconde de l'article 4. page 30. qui est $z = \frac{2aby}{ay + by - 2ab}$; & en supposant z infini, l'on aura $ay + by - 2ab = o$, d'où l'on tire $y = \frac{2ab}{a+b}$; ayant donc placé le verre PRQ de ma-

maniere que $IR = \frac{a+b}{2ab}$, les rayons venant du point I feront paralleles après l'avoir traversé.

Soit encore le verre prq concavo-concave dont on ne considere point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est la 16e. $z = \frac{2aby}{-ay-by-2ab}$, où ayant fait $z = \infty$, l'on aura $-ay-by-2ab=0$, d'où l'on tire $y = \frac{-2ab}{a+b}$. Et parce que cette valeur de y est négative, il faudra prendre $Ir = \frac{2ab}{a+b}$ de l'autre côté de I par rapport à R, & placer en r le verre prq, d'ou les rayons qui alloient se réunir au point I, après avoir traversé le verre MN, sortiront paralleles.

7. Si au lieu de déterminer la position du verre MN sur l'axe AF, comme l'on a fait *num.* 1. pour avoir celle de son foyer I, l'on déterminoit la position du foyer I pour trouver celle du verre MN; la distance FI qui se trouve entre le foyer F du verre KL, & le foyer I seroit donnée, & $FC=x$, & $ID=f$ seroient inconnues. Ainsi ayant nommé FI, g, l'on auroit $x=g+f+r$, ou, en négligeant l'épaisseur du verre MN, $x=g+f$, & ayant substitué les valeurs de x dans la premiere & seconde équation, l'on en tireroit des valeurs de $f=ID$, qui détermineroient la position du verre MN. Par exemple, en substituant $g+f$, seconde valeur de x, dans la seconde équation $f = \frac{2cdx}{cx+dx+2cd}$, l'on en tireroit $ff = -gf + \frac{2cdg}{c+d}$ & partant $f = -\frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg + \frac{2cdg}{c+d}} = ID$.



RETOUR DES TACHES

Observées dans le Soleil au commencement de Janvier.

PAR M. MARALDI.

1704. 9. Fevrier. NOus attendions le 24. Janvier de cette année 1704. de voir de nouveau la Tache que nous avions observée le 7. & le 8. de Janvier près du bord Occidental du Soleil, après avoir parcouru son hémisphere supérieur. Par le calcul que nous fimes elle devoit avoir disparu au bord Occidental le 10. de Janvier, & après avoir été cachée un peu plus de la moitié de sa révolution qui est de 14. jours, elle devoit retourner au bord Oriental du Soleil le 24. du même mois. Mais ce jour là & le suivant le Ciel ayant été entierement couvert à Paris, nous ne pûmes l'observer. Elle fut cependant apperçue à Montpellier le 25. par M. de Plantade Conseiller, qui la trouva éloignée d'une minute du bord Oriental du Soleil.

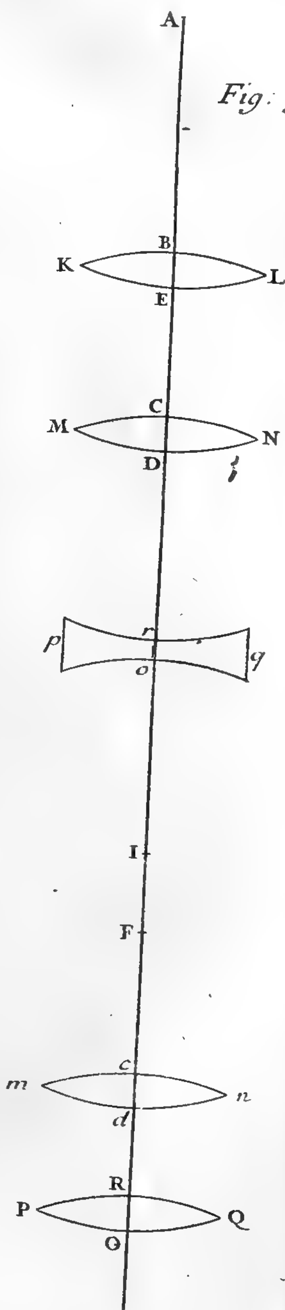
Le 26 Janvier à $8^h \frac{1}{2}$ le soleil ayant paru pendant quelques minutes au travers des nuages, nous apperçûmes avec une Lunette de 3. piés la Tache assez grande près du bord Oriental; mais nous n'eûmes pas le temps de déterminer sa situation, ni de la voir par de grandes Lunettes à cause des nuages.

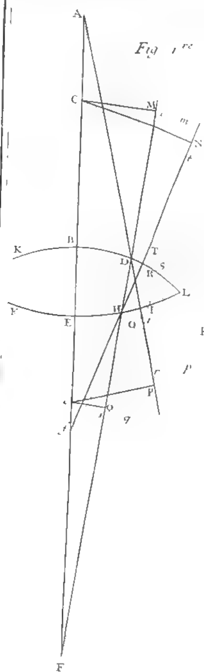
Le 27 Janvier à $2^h \frac{1}{2}$ après midi, le Soleil s'étant un peu découvert, nous déterminâmes la situation par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45° au foyer de la Lunette. Elle étoit éloignée environ de 20″ de temps en ascension droite du bord Oriental, & d'environ 60 des mêmes parties en déclinaison du bord Méridional du Soleil. Avec la Lunette de 17. piés on voyoit que la Tache étoit composée de deux Taches obscures & longues jointes par une extrémité, & enfermées dans une nébulosité assez irréguliere,

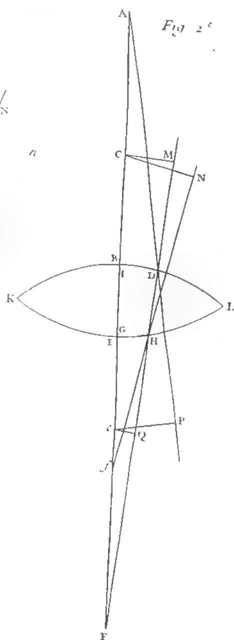
1.re

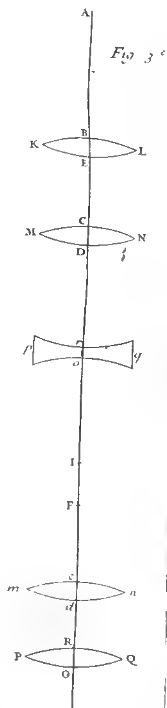
Fig 2.e

A C M N B I D K L G E H P c Q f F




Fig. 1re
A
C
M
m
N
n
K
B
T
D
S
R
L
F
E
H
I
O
r
p
P
Q
q
f
F


Fig. 2e
A
C
M
N
B
I
D
K
L
G
E
H
P
c
Q
f
F


Fig. 3e
A
B
K
L
E
C
M
N
D
p
q
o
I
F
c
m
n
d
R
P
Q
O

guliere, comme on peut voir dans la premiere Figure.

Le 28. à 10 heures du matin, la différence d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental du Soleil étoit de 30 secondes de temps, & la différence de déclinaison à l'égard du bord Septentrional du Soleil, étoit de 60 des mêmes parties.

Le 29. à 8 heures & demie, la différence d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental étoit de 40 secondes de temps, & la différence de déclinaison entre la Tache & le bord Septentrional du Soleil, étoit une minute & 10 secondes de temps.

Le 30. à 9 heures, la Tache passoit par un cercle horaire 1 minute & 21 secondes de temps après le bord Occidental du Soleil, & sa différence de déclinaison Septentrionale à l'égard de son bord Méridional, étoit d'une minute & 6 secondes de temps.

Par cette observation nous avons calculé que la Tache arriva au milieu du Soleil le 31 à une heure du matin. Le 31. les nuages nous ont empêché de déterminer la situation de la Tache, & nous n'eûmes que le temps de faire sa figure.

Le premier de Fevrier à 8 heures & demie, la Tache étoit éloignée en ascension droite du bord Occidental du Soleil de 50 secondes, & d'une minute de temps en déclinaison à l'égard du bord Méridional.

Le 2 Fevrier à 9 heures, la Tache passoit par un cercle horaire 36 secondes après le bord Occidental du Soleil, & sa différence de déclinaison à l'égard du bord Méridional étoit de 56 secondes des mêmes parties.

Le même jour on voyoit avec la Lunette de 17 pieds près du bord Oriental du Soleil une grande quantité de facules, qui étoient à l'endroit où devoit être la Tache suivante qui parut le 7. Janvier près du bord Oriental.

On continua de voir ces facules le 3 en plus grande quantité, & plus grandes que le jour précédent: mais on n'y voyoit point de Taches.

Le 3 Fevrier à 8 heures & demie, la grande Tache qui

étoit près du bord Occidental du Soleil, étoit éloignée en ascension droite de 25 secondes de temps, & sa différence de déclinaison à l'égard du bord Méridional, étoit de 53 des mêmes parties.

Le 4 Fevrier à 9 heures, la même Tache passoit par un cercle horaire 15 secondes après le bord Occidental, & elle étoit plus Septentrionale en déclinaison que le bord Méridional du Soleil, de 30 des mêmes parties.

Le même jour, avec la Lunette de 17 pieds on voyoit dans la partie Orientale du Soleil les facules plus avancées vers le milieu de son disque, & entre ces facules on y distinguoit six petites Taches qu'on n'avoit point vûes les deux jours précédens. Parmi ces Taches il y en avoit une plus grande que les autres.

Le 5 Fevrier à 8 heures & trois quarts, la Tache précédente passoit 10 secondes après le premier bord, & elle étoit plus Septentrionale de 45 secondes de temps du bord Méridional du Soleil. On voyoit aussi proche de cette Tache une grande quantité de facules.

La Tache suivante, qui étoit au milieu de plusieurs facules, étoit augmentée en sorte, que nous la vîmes distinctement avec des petites Lunettes, pour en déterminer sa situation par le moyen des fils qui se croisent au foyer de la Lunette. Elle passoit par un cercle horaire 22 secondes de temps avant le bord Oriental, & étoit plus Méridionale de 60 de ces parties que le bord Septentrional.

Le 6 Fevrier, le Ciel fut couvert. Le 7 le Soleil ayant paru à midy, la Tache ne se voyoit plus. La Tache suivante paroissoit encore augmentée. Elle étoit éloignée de 49 secondes de temps du bord Oriental du Soleil, & d'une minute & 6 secondes de temps du bord Septentrional.

On a remarqué tous les jours quelque changement dans la grande Tache. Le 27 Janvier elle étoit composée de deux Taches obscures jointes ensemble par une extrémité. Le 28. la Tache étoit séparée en deux. Le 29. elle étoit séparée en trois parties presqu'égales. Le 31. ces parties

s'étoient éloignées considérablement l'une de l'autre : mais elles étoient enfermées dans une même nébulosité. Le 1 Fevrier ces trois Taches s'étoient encore plus éloignées l'une de l'autre, & avoient chacune à part sa nébulosité. La Tache Occidentale étoit beaucoup plus grande que les autres : elle étoit environnée d'une plus grande nébulosité, & c'est la Tache qui est restée jusqu'à la fin. Les autres deux Taches, après avoir diminué, se sont dissipées. Du commencement il y avoit proche de cette Tache quelques facules qui ont été en plus grande quantité vers la fin à mesure que les Taches se dissipoient.

Par l'observation du 4 de Fevrier, la Tache précédente fut à pareille distance du bord Occidental du Soleil à minuit, entre le 3 & le 4 qu'elle avoit été au 7 de Janvier à midi Entre le midi du 7 de Janvier & le minuit du 3 de Fevrier, il y a 27 jours & demi, qui est la révolution ordinaire des Taches, comme on la trouve par quantité d'autres observations. Cependant ayant posé sa situation dans un cercle qui représente le disque du Soleil, & à l'aide de la Théorie de M. Cassini, ayant décrit les Poles & l'Equinoctial du globe du Soleil, nous trouvons que cette Tache n'a pas précisément la même situation à l'égard de l'Equinoctial, qu'elle avoit eu le mois passé ; mais qu'elle est plus Méridionale que dans la révolution précédente d'environ deux degrés de la circonférence du Soleil. Cela n'empêche pas que nous ne la supposions la même : car comme nous avons observé que la même Tache se divise en plusieurs parties, dont les unes s'éloignent des autres, on peut supposer aussi que la même Tache se soit éloignée de l'Equinoctial.

Par l'observation du 7 Fevrier, la Tache suivante s'est trouvée à minuit au même endroit du Soleil où elle avoit été le 11 de Janvier à 10 heures environ ; ce qui donne la révolution de la Tache de 27 jours & 14 heures environ. Ayant aussi comparé la distance qu'elle avoit à l'Equinoxial du Soleil le mois passé avec la distance qu'elle a présentement, elle ne s'est pas trouvée précisément la même : mais

dans cette derniere révolution, la Tache étoit plus proche de l'Equinoctial qu'elle n'étoit dans la précédente; tout au contraire de ce qui est arrivé dans l'autre Tache, laquelle s'en est éloignée davantage. Ces deux Taches étoient éloignées l'une de l'autre environ 60 degrés de circonférence du Soleil.

OBSERVATIONS

Du retour d'une des Taches qui parut le 7. de Janvier vers le bord Occidental du Soleil.

PAR M. DE LA HIRE.

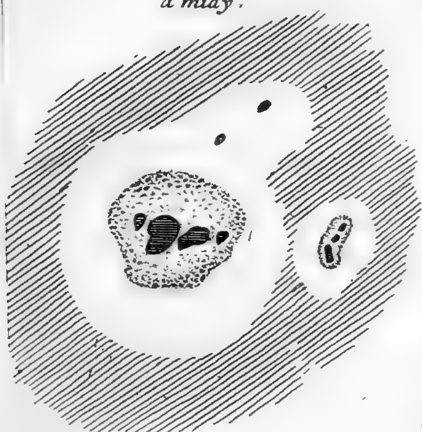
1704. *9. Fevrier.* LA Tache qui avoit paru sur le bord Occidental du Soleil vers le commencement de ce mois, a commencé à reparoître vers la fin de ce même mois, après avoir parcouru l'hémisphere du Soleil qui ne nous est pas visible. Nous ne l'observâmes que le 28, les jours précédens ayant été couverts. Elle passa au Méridien plutôt que le bord Oriental du Soleil, de 30″.

Le 29. elle passa au Méridien 44″ ½ plutôt que le bord Oriental ou le dernier bord du Soleil. Sa hauteur Méridienne apparente étoit alors de 23° 5′ 20″, & celle du bord supérieur du Soleil étoit de 23° 21′ 30″.

Le 2 Fevrier, la Tache passa au Méridien 34″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de 24° 8′ 30″, & celle du bord Supérieur du Soleil, de 24° 28′ 10″.

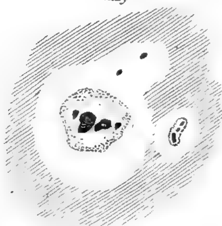
Le 3 Fevrier, la Tache passa au Méridien 23″ après le premier bord du Soleil. Sa hauteur Méridienne apparente étoit de 24° 25′ 10″, & celle du bord supérieur du Soleil, de 24° 45′ 30″.

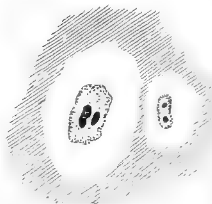
Le 4 Fevrier, la Tache passa au Méridien 14″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de 24° 41′ 40″: mais celle du bord supérieur du Soleil étoit de 25° 3′ 10″.


2. fevrier 1704.
à midy.


4. fevrier 1704.
à midy


29 Ianvier 1704.
à midy.


2 fevrier 1704
à midy


4 fevrier 1704.
à midy

Le 5. La Tache passa au Méridien 8″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de 24° 59′ 0″. Celle du bord supérieur du Soleil 25° 21′ 0″.

J'observai dans ce même temps la distance de la Tache au bord le plus proche du Soleil, & je la trouvai de 5° 1″ avec le Micrometre qui étoit appliqué à une Lunette de 16 piés.

Le 6. le Ciel fut entierement couvert, & le 7. au matin il ne paroissoit plus rien sur la surface du Soleil.

Il est arrivé à cette Tache ce qui arrive à toutes les autres, qui est un changement continuel dans leur figure, comme on le peut voir dans les Figures que j'en donne ici. Je remarquerai seulement que l'espace clair qui environne toutes les Taches, & qui est beaucoup plus clair que le reste de la surface du Soleil, paroît bien plus distinctement avec une Lunette de 5 ou 6 piés, qu'avec une plus grande, & encore plus quand le verre n'est pas bien net, ou que le Ciel est un peu couvert.

NOUVELLES REMARQUES SUR LES INSECTES DES ORANGERS.

PAR M. DE LA HIRE.

DAns les Mémoires de l'Académie imprimés en 1692. je donnai une description des Insectes qui s'attachent aux Orangers, & que l'on appelle communément *Punaises*, où je remarquai tout ce que j'en avois pû reconnoître jusqu'alors, tant de leur accroissement extraordinaire, étant toujours attachés au même endroit de la tige de l'arbre ou de la feuille, que de la ponte des œufs. Mais je ne voyois point de quelle maniere, ni quand ces Insectes pouvoient s'accoupler pour rendre leurs œufs féconds, puisqu'il étoit

1704. 8. Mars.

très-évident qu'ils ne changeoient point de place dans tout le temps quon les voyoit croitre. Je conjecturois bien que lorsqu ils étoient éclos, ils se dispersoient dans tout l'arbre, & même qu'ils se communiquoient à d'autres arbres, comme aux Myrtes, Citroniers, &c. Mais je n avois pû encore les observer dans l'état où ils étoient après qu'ils étoient éclos.

J'avois examiné autrefois ce qu'on appelle la graine de Cochenille, & j'en avois donné un Mémoire à l Académie, dans lequel je rapportois au long tout ce que j'en avois pû découvrir par leur figure en les faisant tremper; & entr'autres choses j'avois remarqué que c'étoit un petit Insecte dont il n'y avoit que la partie du ventre couverte d écailles qui étoit restée toute entiere: mais on n'y voyoit rien de la partie du corps qui est vers la téte, ni aucunes pattes, que je jugeois avoir été desséchées & réduites en poussiere

Il me vint alors en pensée, si les petits Insectes des Orangers n'étoient point les mêmes que les Cochenilles: car la figure du ventre me paroissoit assez semblable, & ces Insectes se nourrissant du suc des fruits rouges d'Opuntia où l'on recueille la Cochenille, pouvoit leur donner la couleur rouge & la forte teinture dont ils sont remplis.

J'avois souvent observé que lorsqu'on écrase entre les doigts les Insectes des Orangers, ils demeurent teints d'une couleur roussâtre qui tient assez fort à la peau, quoique ces animaux ne se nourrissent que du suc des feuilles vertes & des tiges de l'arbre; & c'est ce qui me persuadoit qu'il y avoit de la vrai-semblance à ce que je conjecturois, que si ces Insectes se nourrissoient du suc des fruits rouges de l'Opuntia, ils pourroient donner une teinture rouge très-forte; ce qui étoit encore confirmé parce que je savois que ceux qui ont mangé de ces fruits, rendent une urine aussi rouge que du sang.

Pour venir à bout de mon dessein, comme j'avois quelques plantes d'Opuntia qui étoient chargées de fruits fort

rouges, je les plaçai au-deſſous & fort proche de quelques Orangers où il y avoit beaucoup d Inſectes, qui n'étoient point encore éclos. Je rompis même pluſieurs des coques qui renferment les œufs, & j'en répandis une grande quantité ſur tout l'Opuntia, eſpérant qu'il pourroit y avoir quelques-uns de ces animaux qui s'y attacheroient.

J'obſervois tous les jours avec grand ſoin, tant les feuilles que les fruits de l'Opuntia; & enfin j'apperçus un jour une très-grande quantité de petits Inſectes blancs qui courroient d'une très grande viteſſe ſur l'Opuntia. Je conſidérai auſſi les Orangers, & j'y en trouvai de même à proportion. Je ne fis alors aucun doute que tous ces petits Inſectes ne fuſſent ceux des œufs qui étoient éclos. Peu de temps après tous ces Inſectes s'attacherent ſur les Orangers autour des branches & ſous les feuilles, & ils abandonnerent l'Opuntia où il n'en reſta aucun, ni ſur ſes feuilles ni ſur ſes fruits.

Ainſi je conclus que ces Inſectes des Orangers, quoiqu'aſſez ſemblables en apparence aux Cochenilles, n'avoient pas trouvé ſur l'Opuntia une nourriture qui leur fût convenable comme ſur pluſieurs autres plantes, & que ce n'étoit pas les mêmes.

Cependant ma recherche ne me fut pas tout-à-fait inutile: car je connus alors que les Inſectes des Orangers, depuis qu'ils ſont éclos juſqu'à une certaine grandeur où ils parviennent en peu de temps avant que de s'attacher, peuvent s'accoupler & ſe trouver en état de pondre des œufs féconds dans un temps fort éloigné de celui de leur accouplement, car il ſe paſſe environ 8 mois. Et ce qu'il y a encore de plus extraordinaire, c'eſt le grand accroiſſement de ces Inſectes depuis qu ils ſont attachés & arrêtés, juſqu'au temps de la ponte: car ils deviennent 2 ou 30 fois plus grands qu'ils n'étoient auparavant, & leur figure extérieure étant changée, ils ne paroiſſent plus que comme une écaille de Tortue aſſez longue.

Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût tranſporter quelques ſemences des Cochenilles dans les parties Méridionales de

l'Europe, comme dans la Sicile & dans l'Espagne où l'Opuntia vient très-facilement : car je ne fais pas de doute que la Cochenille ne pût y être assez bien cultivée pour en connoître parfaitement la nature, sans être obligé de s'en rapporter à des relations de gens grossiers & d'esclaves, qui ne regardent les productions de la nature que par le profit qui leur en revient.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M. SARRASIN

Médecin du Roy en Canada, touchant l'Anatomie du Castor, lûe à l'Académie

PAR M. PITTON TOURNEFORT.

De Quebec, le 25. Octobre 1700.

LEs plus gros Castors ont 3 ou 4 pieds de long sur 12 ou 15 pouces de large au milieu de la poitrine & d'une hanche à l'autre. Ils pesent ordinairement depuis 40 jusqu'à 60 livres. A l'égard de leur vie, on ne croit pas qu'elle soit de plus de 15 ou 20 ans. Ces animaux sont ordinairement fort noirs dans le Nord le plus reculé, on y en trouve aussi de blancs. Ceux de Canada sont la plûpart bruns : mais cette couleur s'éclaircit à mesure que les pays sont plus tempérés, car ils sont fauves, & même ils approchent de la couleur de paille chez les Ilinois & chez les Chaouanons.

Le Castor dont on donne ici la description, étoit assez noir, quoique pris sur le bord d'un petit lac à douze ou quinze lieues de Quebec. Il ne pesoit que cinquante livres.

Cet animal est par tout revêtu de deux sortes de poil, excepté aux pattes, qui sont couvertes d'un poil très-court. Le poil de la premiere espece est long de 8 ou 10 lignes jusqu'à deux pouces, & diminue en approchant de la tête &

& de la queue. C'eſt le plus gros, le plus rude, le plus luiſant, & il donne la principale couleur au Caſtor. Si on conſidere ce poil avec un Microſcope, on remarque dans ſon milieu une ligne beaucoup moins opaque que les côtés, ce qui fait conjecturer qu'il eſt creux.

L'autre eſpece de poil eſt un duvet très-fin & très-ſerré, long d'environ un pouce, qui garantit le Caſtor du froid, & qui ſert à faire des chapeaux & des étoffes. Les peaux qui ont ſervi d'habit ou de couverture de lit aux Sauvages, ſont les plus recherchées d'autant qu'elles ont perdu leur grand poil, & que le duvet qui reſte étant devenu gras par la matiere de la tranſpiration, eſt plus propre aux ouvrages, & ſe foule beaucoup mieux. Ce duvet, quand l'animal eſt en vie & qu'il travaille, eſt conſervé & garanti de la boue par le poil le plus rude & le plus long.

Il eſt d'abord aſſez difficile de connoître ſi le Caſtor eſt mâle ou femelle. On ne voit qu'une ſeule ouverture ſous la queue, & cette ouverture eſt deſtinée pour la ſortie de leurs différens excrémens. Les parties qui diſtinguent le ſexe, ſont cachées ſous les muſcles. Pour ne pas s'y tromper, il faut pincer plus que la peau qui eſt entre l'os pubis & cette ouverture. On y ſent la verge qui eſt dure, groſſe & longue comme le doigt.

On trouve ſous la peau un lit de graiſſe épais ordinairement de 8 ou 10 lignes ſous le ventre, & qui s'étend depuis les machoires juſqu'à la queue : mais il diminue peu à peu en approchant du dos où il n'y en a point du tout. On découvre un ſecond lit de graiſſe entre les deux muſcles obliques du ventre : mais cette graiſſe n'a que 2 ou 3 lignes d'épais. Les viſceres en ſont preſque dépourvus. L'épiploon, quoiqu'auſſi grand que dans les autres animaux, ne peſe que 3 ou 4 onces.

Tous les muſcles du Caſtor ſont extremement forts, & ſemblent plus gros qu'ils ne doivent être par rapport à la grandeur de l'animal. Les fibres du muſcle peaucier ont des directions fort différentes. Celles qui couvrent le dos

depuis les cuiſſes juſqu'au col, ſont droites & ſi groſſes que ce muſcle a dans cet endroit là près d'un pouce d'épaiſſeur. Les fibres qui ſont ſituées à côté de celles-ci, s'en écartent peu à peu, & font un volume bien plus petit. Elles décrivent preſque des demi-cercles, leſquels deſcendans ſur les muſcles pectoraux, ſur le ſternum & tout le long des muſcles droits, ſe réuniſſent par une aponevroſe, de telle ſorte qu'elles enveloppent tout l'animal. Une partie de ces fibres vient embraſſer les cuiſſes, après quoi elles ſe croiſent ſur l'os pubis, d'où elles deſcendent & forment un tiſſu en maniere de natte. Ce tiſſu couvre non-ſeulement un paquet de fibres très-conſidérable, mais auſſi le ſphincter de l'anus.

De la ſurface interne de la natte dont on vient de parler, environ 12 ou 15 lignes au deſſous de l'os pubis, ſortent deux trouſſeaux de fibres charnues, gros comme le doigt, leſquels remontent à l'inſertion des muſcles droits & s'y attachent. De la partie de ce muſcle qui couvre le dos, & dont les fibres ſont droites, il ſe forme du côté de la queue une aponevroſe très-forte qui enveloppe tout ce qui eſt au deſſous des cuiſſes. Elle eſt attachée aux apophyſes épineuſes des vertebres qui ſont vers la queue, & de diſtance en diſtance elle tient aux membranes des muſcles qui la font mouvoir.

Le même plan de fibres étant parvenu aux premieres vertebres du dos, ſe diviſe d'abord en deux parties qui forment pluſieurs têtes, & qui par différens principes s'inſerent en différens endroits. Il y en a une large d'environ 2 pouces, qui monte juſqu'à la troiſieme vertebre du col, & qui eſt attachée ſur le rhomboïde. Une autre s'attache ſur la crête de l'omoplate, une troiſieme ſur la partie poſtérieure & intérieure du bras, ſur le coude & ſur la partie poſtérieure & ſupérieure de l'avant-bras. Enfin la quatrieme fait un même tendon avec celui du très-large, & de celle-ci il s'en fait une cinquieme, qui s'inſere ſur la partie moyenne & inférieure de l'avant-bras.

Il n'y a rien de particulier dans les muſcles du ventre, ſi ce

n'eſt que le petit oblique & le tranſverſal ſont inſéparables.

Le foie du Caſtor eſt rouge brun, diviſé en ſept lobes qui occupent également les deux hypochondres, enſorte qu'ils couvrent l'eſtomac de tous les côtés. La veſſie du fiel eſt attachée au plus gros de ces lobes, & ſe vuide ordinairement dans le duodenum. M. Sarraſin en a trouvé une qui ſe dégorgeoit dans le jejunum.

La ratte eſt ronde, & n'a guere que 4 lignes de diametre ſur environ 3 pouces de long. Elle eſt plus ferme que celle des autres animaux. Cinq ou ſix vaiſſeaux fort courts l'attachent au fond de l'eſtomac. Elle tient auſſi par quelques membranes aux reins, au pancreas & au colon. On s'apperçoit de quelques glandes conglobées, groſſes comme des pois, ſituées vers ſon extrémité, qui regarde l'eſtomac, & qui eſt un peu plus groſſe que l'autre.

Les reins ont demi-pouce d'épais ſur deux pouces de long, & ſur preſque autant de large. Les glandes rénales ſont longues de 4 ou 5 lignes.

Le Pancreas a du moins deux pieds de long. Il forme un angle dont la pointe eſt attachée au gros lobe du foie par quelques petits filets. Ce pancreas eſt diviſé en deux parties : l'une paſſe ſous l'eſtomac & vient s'attacher à la ratte & au rein gauche : l'autre deſcend le long du duodenum & du jejunum, dans leſquels il s'ouvre par pluſieurs petits conduits.

L'éſophage eſt intérieurement revêtu d'une membrane blanche, qui eſt comme une eſpece de doublure que l'on détache aiſément du canal ſans la déchirer.

Le ventricule du Caſtor eſt une des parties des plus ſingulieres de cet animal. Ce ventricule a 12 ou 13 pouces de long, ſur environ 4 de large du côté de la ratte. Il diminue peu à peu; enſorte qu'après les deux tiers, il eſt rétréci de moitié par une ſaillie de plus d'un pouce qui avance dans ſa capacité. Après quoi il s'élargit d'environ 3 pouces vers le pylore qui eſt conſidérablement relevé, arrondi & avancé vers la ratte par une membrane attachée à l'é-

ſophage par ſon autre bout. L'évaſement dont on vient de parler, ſemble faire un ſecond ventricule : mais il ne ſert proprement qu'à retenir plus long-temps les alimens, & ſurtout les plus ſolides, comme le bois, dont il ne s'y fait qu'un extrait fort leger ; car il paſſe preſque comme il a été avalé, au lieu que les herbes, les fruits, les racines ſe diſſolvent parfaitement.

Les membranes du ventricule ſont ſi minces, que cette partie ſe déchire pour peu qu'on la gonfle. Il n'y a que la membrane charnue qui s'épaiſſit du côté du pylore & le fortifie. On ne trouve aucunes glandes diſperſées dans ce ventricule : mais en récompenſe il eſt garni d'environ 100 veſſies de deux ou trois lignes de long, leſquelles ſe rétréciſſent du côté du ventricule, comme le font les grains de raiſin qui ſont un peu trop preſſés. Cette couche de veſſies eſt attachée ſur la membrane nerveuſe, & recouverte de la charnue. A l'égard de ſa ſituation, elle ſe trouve entre la partie droite du ventricule & l'éſophage. Toutes ces veſſies font une eſpece de corps demi ſphérique haut de 7 ou 8 lignes, & large d'environ 3 pouces à ſa baſe. L'intérieur de chaque veſſie paroît glanduleux : mais elles ſont ſi délicates, qu'elles crevent pour peu qu'on les preſſe. Quoique toutes ces veſſies aient chacune leurs iſſues, elles répondent néantmoins à 12 petits orifices larges d'environ 2 lignes, rangés ſur 4 colonnes qui s'ouvrent dans le ventricule. Après la mort de l'animal, ces veſſies contiennent une matiere blanche preſque ſans odeur & de conſiſtance de bouillie : mais il y a beaucoup d'apparence qu'elle eſt fluide lorſque l'animal eſt en vie. Cette matiere eſt ſans doute le diſſolvant des alimens, qui, dans les pays froids & pendant l'hiver, ne ſont que de bois d'Aune, de Platane, d'Orme, de Frêne & de différentes eſpeces de Peuplier. Pendant l'été les Caſtors vivent de toutes ſortes d'herbes, de fruits ; de racines, ſurtout de celles de différentes eſpeces de Nymphea.

Les inteſtins de cet animal ſont très-délicats, & ont en-

viron 20 pieds de long. Le cæcum a la figure d'une faux : il eſt tenu dans cet état par deux ligamens qui rampent l'un le long de ſa partie cave, & l'autre ſur la partie convexe. Meſuré par la partie cave, il a 18 pouces de long, & plus de 30 par la convexe. Sa largeur eſt de 4 pouces dans ſon gros bout, & peut contenir 5 ou 6 livres d'eau. Le colon a 4 pieds de long, & le rectum environ 15 pouces.

La veſſie eſt ſemblable à celle des chiens. Si l'on continue d'ouvrir cet animal juſqu'à la racine de la queue, on découvre fort aiſément ſes teſticules & le paquet dont on a parlé dans la deſcription du muſcle peaucier. Ce paquet eſt un muſcle creux, qui renferme la verge & les bourſes.

Les teſticules ſont ſitués dans les aînes, appuyés par leur baſe ſur les parties latérales de l'os pubis, & engagés dans la graiſſe. Ils ſont enveloppés de pluſieurs membranes que le péritoine & les muſcles du bas ventre leur fourniſſent, ſurtout le muſcle cremaſtere dont les fibres qui ſont circulaires, leur donnent la figure d'un cone. Ils reſſemblent tout à fait à ceux des chiens lorſqu'ils ſont développés.

Les vaiſſeaux déférens groſſiſſent conſidérablement derriere le col de la veſſie : mais ils diminuent avant que d'entrer dans l'uretre, où ils ont leurs iſſues ſéparées l'une de l'autre.

Les véſicules ſéminales ſont tellement engagées ſous l'os pubis, qu'on ne peut les voir ſans les ſéparer. Elles ont ordinairement deux pouces de long ſur un pouce de large vers le milieu ; car elles ſont pointues par les deux bouts. Leurs conduits s'ouvrent auſſi ſéparément dans l'uretre, & vont aboutir ainſi que ceux des vaiſſeaux déferens à une éminence charnue qui eſt groſſe comme un pois, & qui eſt une eſpece de *veru montanum.* On voit à côté de cette éminence pluſieurs petits orifices des conduits excrétoires de quelques glandes ſituées autour du col de la veſſie, leſquelles font la fonction des proſtates, & ſont remplies d'une liqueur blanche & huileuſe.

Le muſcle creux eſt ſitué entre l'os pubis & l'ouverture des excrémens. Il reſſemble en quelque maniere à ces an-

ciennes gibecieres larges & arrondies par le bas & rétrécies vers le haut. Un corps tendineux large d'environ un pouce, tient ce muſcle attaché à la levre inférieure & moyenne de l'os pubis d'où il deſcend, en s'évaſant juſqu'à l'ouverture commune dont on va parler.

En ouvrant cette eſpece de gibeciere de haut en bas, on découvre vers ſon milieu la verge depuis la racine juſqu'au *balanus*. Elle partage cette capacité en deux cavités, après quoi le muſcle creux ſe repliant d'une certaine maniere, forme encore deux cavités ſituées ſous les premieres à côté du *balanus* : c'eſt dans ces quatre cavités que ſont renfermées les bourſes qui contiennent le Caſtoreum : mais avant que de paſſer outre, il eſt bon de parler de l'ouverture commune. C'eſt une capacité d'environ deux pouces en tout ſens, lorſqu'elle eſt bien gonflée, dans laquelle aboutiſſent les bourſes du Caſtoreum, l'uretre, l'anus & le vagin dans les femelles. Elle eſt éloignée d'environ 3 pouces de la racine de la queue, & de 4 pouces de l'os pubis, noirâtre & bordée d'un poil aſſez fin qui ne reſſemble point à celui du reſte du corps.

La verge tient par ſa racine à la levre inférieure de l'os pubis. Delà elle perce la membrane de la cloaque dans l'endroit où les bourſes ſupérieures communiquent. Cette membrane eſt collée circulairement à l'inſertion du *balanus*, comme le diaphragme l'eſt à l'éſophage. La partie inférieure de la verge qui eſt longue d'environ deux pouces & demi, eſt contenue dans la cavité ſupérieure du muſcle creux dans l'endroit où il ſe ſépare en deux cavités ; de ſorte que le *balanus* qui eſt long de près d'un pouce & demi, ſe trouve tout à fait dans le cloaque ſitué entre les iſſues des bourſes tant ſupérieures qu'inférieures. Le Caſtor approche de la femelle par devant, tant à cauſe de la ſituation de l'ouverture commune, qu'à cauſe de la longueur & de l'infléxibilité de la queue. Un Chaſſeur a aſſuré M. Sarraſin qu'il avoit tué d'un coup de fuſil un Caſtor mâle & une femelle accouplés dans cette ſituation.

Le *balanus*, qui eſt tout à fait ſemblable à celui des chiens, eſt couvert d'une peau chagrinée. On découvre dans le corps de la verge un os de figure piramidale, dont la baſe eſt attachée au corps caverneux, & qui eſt long d'environ [illegible] lignes.

Sous l'origine de la verge ſe trouvent deux corps gros comme une noix attachés au corps caverneux. Ces deux corps ſont composés de véſicules fort délicates qui ſe gonflent dans le temps de la copulation par le moyen de pluſieurs vaiſſeaux ſanguins qui forment une eſpece de capſule à l'uretre.

On trouve au même endroit deux glandes ovales, longues d'environ 10 lignes ſur trois ou quatre lignes d'épais. Leurs vaiſſeaux excrétoires qui ſont gros comme un ſtylet ordinaire, & longs de plus de 12 ou 15 lignes, s'ouvrent dans l'uretre environ un pouce avant dans la verge. La ſubſtance de ces glandes eſt ferme, & contient une liqueur huileuſe & griſâtre, qui peut-être ſert à défendre le canal de l'uretre de l'acreté des urines. Les rats en ont de pareilles, excepté qu'elles ſont rondes.

Les parties de la génération de la femelle du Caſtor ſont ſemblables à celles des femelles des lapins, des lievres, des rats. Le vagin de celles de Caſtor a cinq pouces de long. Il n'eſt pas renfermé non plus que l'uretre dans la cavité ſupérieure du muſcle creux comme l'eſt la verge du mâle : mais ce vagin a ſon ouverture dans la cloaque.

On aſſure que les femelles portent 4 mois, & qu'elles font juſqu'à 5, 6 & 8 petits : cependant on ne leur en trouve jamais plus de 4. M. Sarraſin l'a vérifié dans celles qu'il a ouvertes.

Les Caſtors femelles ont 4 mammelles, deux ſituées ſur le grand pectoral, ainſi que celles des femmes entre la 2 & la 3 de vraies côtes, & les deux autres au col, environ 4 doigts plus haut que les premieres.

Les Anciens qui ne diſſéquoient pas avec beaucoup de ſoin, ne s'appercevoient pas des teſticules du Caſtor, parce qu'ils ſont fort petits, & qu'ils ſont ſitués dans les aines.

La grosseur, la situation & la figure des bourses leur imposoit. Messieurs de l'Académie Royale des Sciences ont les premiers démêlé ces parties avec exactitude.

Les bourses qui sont contenues dans les cavités supérieures du muscle creux, & que l'on appellera dans la suite bourses supérieures, contiennent une matiere résineuse : mais celles qui sont dans les cavités inférieures, & que l'on nommera pour cela bourses inférieures, y sont assemblées par paquets, renfermées sous une membrane commune, & remplies d'une matiere huileuse. Les supérieures sont doubles, & ressemblent assez bien à une besace, dont chaque poche qui est d'environ trois pouces de long sur un pouce & demi de large dans le fond, se trouve placée l'une à droite & l'autre à gauche de la verge. Ces bourses décrivent un demi-cercle en approchant de la verge, & se rétrécissent peu à peu jusqu'à leurs ouvertures, lesquelles sont d'environ un pouce, & répondent dans la cloaque.

On remarque trois membranes dans la tissure de ces bourses; la premiere est simple, mais très-ferme : la seconde est beaucoup plus épaisse, moeleuse & fort garnie de vaisseaux; la troisieme est particuliere au Castor; elle est seche comme un vieux parchemin, elle en a l'épaisseur & se déchire de même : mais elle est tellement repliée sur elle-même, qu'elle acquiert, quand on la développe, trois fois plus de volume qu'elle n'avoit auparavant. Cette membrane est fort lisse en dehors, gris de perle, marquetée assez souvent de taches brunes, quelquefois rougeâtres. Elle est inégale en dedans, garnie de petits filets auxquels la matiere résineuse est fort adhérente.

Il semble que la premiere membrane ne sert qu'à contenir les bourses dans leur juste grandeur. Les vaisseaux dont la seconde est tapissée, fournissent la matiere résineuse mêlée avec le sang. Cette membrane s'insere dans tous les replis de la troisieme, comme la pie-mere entre dans les anfractuosités du cerveau. Pour la troisieme, il y auroit beaucoup d'apparence qu'elle dût servir à filtrer la matiere

tiere résineuse, si l'on pouvoit y découvrir des glandes. Il faut les supposer très-petites, & peut-être que les filets dont on vient de parler en sont les conduits excrétoires.

Cette matiere filtrée s'épaissit peu à peu dans les bourses, & y acquiert la consistence d'une résine échauffée entre les doigts. On l'appelle communément *Castoreum*. Elle conserve sa mollesse plus d'un mois après avoir été séparée de l'animal, & sent mauvais dans ce temps-là, étant grisâtre en dehors & jaunâtre en dedans : ensuite elle perd son odeur, elle se durcit, & devient friable comme les autres résines : mais il est à remarquer qu'elle est combustible en tout temps. Les bourses les plus grosses ne pesent qu'environ deux onces.

Les bourses inférieures paroissent d'abord doubles : l'une est à droit, & l'autre à gauche de la cloaque : mais lorsqu'on a découvert la membrane qui les enveloppe, on en trouve quelquefois 2 ou 3 ensemble. Chaque paquet de ces bourses est long de deux pouces & demi sur environ 14 ou 15 lignes de diametre. Les bourses sont arrondies par le fond, & diminuent insensiblement en approchant de la cloaque. La plus grande de ces bourses occupe toute la longueur du paquet : mais elle n'a qu'environ 8 ou 10 lignes de diametre. La seconde, qui n'est pas toujours plus grande que la troisieme, n'a pas ordinairement la moitié du volume de la premiere. Pour la troisieme elle est le plus souvent moindre que les autres.

Ces bourses, outre leur membrane commune, en ont chacune 3 propres. La 1 qui est d'un tissu fort délicat, est parsemée de beaucoup de vaisseaux. La 2 est non seulement plus épaisse; mais elle est revêtue & comme encroûtée de glandes qui paroissent conglomerées, & ces glandes se répandent par paquets de différentes grosseurs sur la surface extérieure de cette membrane. On s'apperçoit au milieu de ces paquets de certaines capacités qui s'ouvrent les unes dans les autres; savoir, les plus grandes dans les plus petites, & enfin celles-ci dans la bourse même par des ouvertures d'une ou 2 lignes.

La 3 membrane eſt blanche, & ſi délicate qu'elle ſe déchire comme ſi ce n'étoit qu'une crême épaiſſie ſur la ſurface intérieure de la ſeconde. Elle eſt percée aux mêmes endroits que celle-ci, afin de donner paſſage à la liqueur filtrée dans les glandes.

La 1 membrane ſoutient les vaiſſeaux ſanguins qui fourniſſent la liqueur propre à être filtrée. La 2 & la 3 ſervent à la filtration. Les glandes piquées, quoique très-légerement, laiſſent échapper une liqueur huileuſe, & même celle qui eſt dans la bourſe, ſe vuide facilement par cette ouverture pour peu qu'on preſſe la bourſe. Cette liqueur eſt jaune, pâle, pleine de petits corps ronds ſemblables à ceux que l'on voit dans l'huile d'olive lorſqu'elle commence à ſe figer. Celle du Caſtor dans la ſuite devient parfaitement liquide & de couleur d'ambre.

On ne ſauroit aſſez admirer l'induſtrie de la nature, qui pour empêcher que les petits conduits des bourſes (leſquels ſe dégorgent dans la cloaque à côté du *balanus*) ne ſe bouchent par l'épaiſſiſſement de la liqueur, ou ne ſe deſſechent par l'action de l'air, les a tous garnis d'un poil long d'environ demi-pouce. Il eſt attaché par ſa racine dans la bourſe même un peu au-delà du conduit; enſuite il en enfile la longueur, & s'avance un peu dans la cloaque.

Toutes ces bourſes tant ſupérieures qu'inférieures ne communiquent point entr'elles. Leurs conduits, comme l'on vient de dire, aboutiſſent dans la cloaque. On ignore l'uſage de ces liqueurs par rapport aux Caſtors. Il n'eſt pas vrai qu'ils s'en ſervent pour exciter leur appetit, lorſqu'il eſt languiſſant. M. Sarraſin a nourri un de ces animaux pendant deux ans; mais il n'en a ſû découvrir l'uſage. Il eſt faux que les Chaſſeurs s'en ſervent d'appas pour attirer les Caſtors dans les pieges. On graiſſe avec la liqueur huileuſe les pieges que l'on dreſſe aux animaux carnaſſiers, & qui font la guerre aux Caſtors, comme les Martes, les Renards, les Ours, & ſur-tout les Carcajoux. Ces derniers vont attaquer pendant l'hiver les Caſtors dans leurs loges, qu'ils briſent bien ſouvent.

Parmi les Sauvages, les femmes graiſſent leurs cheveux avec l'huile des bourſes de Caſtor : mais elle ſent mauvais, & ne peut être qu'un appas pour des Sauvages.

Du bas-ventre il faut paſſer à la poitrine des Caſtors. Cette partie eſt longue d'environ 5 pouces, fort étroite par enhaut, beaucoup plus large vers le bas, fermée par 14 côtes, ſavoir 7 vraies qui ſont fort courtes, & 7 fauſſes qui non ſeulement ſont beaucoup plus larges ; mais qui par devant laiſſent entr'elles une grande diſtance. C'eſt ce qui facilite au Caſtor le moyen de ſe rétrécir aiſément : car elles ſe peuvent rapprocher par la contraction des fibres circulaires du premier muſcle.

Le ſternum eſt compoſé de 5 os aſſez étroits. Le cartilage xiphoïde, qui eſt large d'un pouce, eſt rond & fort flexible. Les poumons ont ſix lobes, trois à droit, deux à gauche, & un autre fort petit qui eſt enfermé dans le médiaſtin. Les cartilages annulaires de la trachée artere ſont chacun d'une ſeule piece.

Le cœur eſt long d'environ 2 pouces. Sa baſe a un peu plus d'un pouce & demi de diametre. Les ventricules en ſont égaux ; mais l'oreillette droite eſt beaucoup plus petite que la gauche : cependant je ne crois pas pour cela que la quantité de ſang qui tombe dans ce ventricule, ſoit moins proportionnée à ſa grandeur : car la veine-cave inférieure eſt dans cet endroit conſidérablement évaſée, & forme une eſpece de ſac entouré de fibres charnues long & large d'environ un pouce & demi de diametre. Ce ſac agit de concert avec l'oreillette droite pour remplir le ventricule droit. Le même ſac eſt plus étroit du côté du foie, où il eſt fermé par 3 valvules ſemblables aux ſigmoïdes qui permettent bien au ſang de pourſuivre ſa route ordinaire, mais qui s'oppoſent à ſon reflux, lequel ſeroit à craindre, puiſque la veine-cave ſupérieure, au lieu de s'ouvrir dans l'oreillette, paſſe par derriere & ſe dégorge dans le ſac ; de ſorte que le confluant de ces deux colonnes de ſang ſe rencontre dans un ſens tout-à-fait oppoſé, & que la ſous-

claviere gauche, au lieu de finir sa route dans la veine-cave supérieure, descend (en passant sur la branche inférieure de l'aorte) sous la base du cœur, & va s'ouvrir dans le sac dont on a parlé.

Voici ce que M. Sarrasin remarqua de plus singulier dans la tête du Castor.

1. L'os occipital est posé sur le derriere de la tête comme une plaque.

2. Il n'y a point de sinus intérieur dans la faux de la duremere. Cette membrane divise légerement le grand cerveau, soutenue dans sa situation par des osselets insérés dans sa propre substance, dont les uns ne sont que des lames osseuses très-solides quoique minces, & les autres qui sont ronds, ont une ligne de diametre sur deux ou trois lignes de long.

3. Le cerveau n'a aucunes anfractuosités sensibles. On en separe la pie-mere, comme si elle étoit simplement couchée sur un corps uni.

4. Le cervelet est relevé de plusieurs tubérosités de différentes figures, qui sont séparées les unes des autres par la pie-mere. Il y en a deux qui sortent des côtés, & qui ont 4 lignes en tout sens.

5. Les yeux sont fort petits, l'ouverture des paupieres n'ayant qu'environ quatre lignes. La cornée est ronde, & l'Iris d'un bleu foncé.

6. M. Sarrasin a remarqué comme une troisieme paupiére située dans le grand angle de l'œil. C'est comme un rideau qui couvre la cornée, ou qui la découvre au gré de l'animal.

7. Les deux machoires qui sont très-fortes & presque égales, sont garnies chacune de 10 dents, deux incisives & huit molaires. Les incisives sont situées au bout du museau : celles d'enhaut sont longues d'environ 8 lignes, & celles d'enbas ont environ un pouce de long. Les racines des supérieures ont deux pouces & demi de longueur : celles des inférieures en ont plus de trois & suivent la courbure des machoires, ce qui leur donne une force prodigieuse; aussi les Castors abbattent à belles dents de grands arbres.

8. Comme ces animaux vivent le plus ſouvent d'alimens fort ſecs, la nature leur a donné des glandes ſalivales d'une grandeur prodigieuſe. Elles occupent tout le deſſous de la machoire inférieure, le devant du col, & deſcendent juſques ſur les clavicules. Ces glandes ſont couvertes d'un muſcle adhérent à la peau, composé de deux plans de fibres charnues attachées à la 2, 3, & 4 vertebre du col par un principe charnu, large de 4 doigts. L'un & l'autre de ces plans prenant des routes oppoſées, embraſſent le col vers la trachée artere, ſur laquelle ils croiſent leurs fibres en forme de natte. Celui qui vient du côté droit va vers le gauche s'inſérer par ſon aponevroſe au bras, au plis du coude & à l'avant-bras. L'autre plan va par une route oppoſée s'inſérer de même dans l'autre bras. Ce muſcle tient par enhaut à toute la machoire inférieure, & par enbas il eſt appuyé ſur de la graiſſe, & deſcend juſques ſur les clavicules. Son uſage eſt de preſſer les glandes en abaiſſant la machoire, & en approchant les bras de l'animal en même temps qu'il tient entre ſes mains les alimens dont il ſe nourrit.

La queue du Caſtor n'a aucun rapport avec le reſte du corps. Elle paroît approcher de la nature des poiſſons : car elle eſt couverte d'une peau écailleuſe, ſous laquelle on trouve une graiſſe ferme qui reſſemble aſſez à la chair du Marſoin, ce qui pourroit ſans doute avoir le plus contribué à faire paſſer le Caſtor pour un amphibie. Les écailles ſont exagones, épaiſſes de demi-ligne ſur environ trois ou quatre lignes de long, couchées les unes ſur les autres, jointes enſemble par une pellicule fort délicate, enchaſſées dans la peau dont elles ſe ſéparent aiſément après la mort de l'animal. Il ſort d'entre chaque écaille trois ou quatre poils longs d'environ 2 lignes, qui ſont plus fréquens dans les côtés de la queue qu'ailleurs.

Cette queue eſt mûe par un grand nombre de muſcles dont les uns ſont grands & les autres petits. Les plus grands ſont appuyés ſur les apophyſes tranſverſes de l'os ſacrum : leurs tendons ſont diſtribués par paquets de 4

ou de 6 enfermés dans des gaines qui les conduisent le long des vertebres de la queue. Les petits muscles ont leurs tendons collés & confondus avec ceux des premiers.

Le Castor étant destiné à des ouvrages de maçonnerie, coupe le bois avec ses dents, amollit & gache la terre glaise avec ses pieds. Sa queue ne lui sert pas seulement de truelle, mais d'auge pour porter le mortier; ainsi il étoit necessaire qu'elle fût écailleuse, garnie de graisse & de plusieurs muscles.

Les pieds de devant sont semblables aux pieds des animaux qui comme lui aiment à ronger, & qui tiennent ce qu'ils mangent entre leurs pattes, comme les rats, les écureuils. Les pieds de derriere n'y ont aucun rapport, & ressemblent à ceux des oiseaux de riviere, qui sont garnis de membranes entre les doigts, comme sont ceux des oies & des canards. Ainsi le Castor est propre à marcher sur la terre, & à nager dans les eaux. Depuis le bout du nez jusqu'aux cuisses, il est semblable à un rat; mais depuis les cuisses jusqu'à la queue, il ressemble assez aux oiseaux de riviere qui ont les pieds plats.

M. Sarrasin a joint à l'anatomie du Castor plusieurs choses qui regardent leur genre de vie.

1. Lorsque les grandes inondations sont passées, les femelles retournent à leurs logemens pour y mettre bas. Les mâles tiennent la campagne jusqu'aux mois de Juin & de Juillet, & ne reviennent chez eux que lorsque les eaux sont tout-à-fait basses. Alors ils réparent les désordres que les inondations ont faits à leurs logemens, ou ils en font de nouveaux. Ils changent de lieu pour trois principales causes. 1. Lorsqu'ils ont consommé les alimens qui étoient à leur portée. 2. Quand la compagnie est trop nombreuse. 3. Quand les Chasseurs les inquietent trop.

2. Pour établir leur demeure, ils choisissent un endroit abondant en vivres, arrosé d'une petite riviere, & propre pour y faire un lac. Ils commencent par y construire une chaussée de hauteur suffisante pour élever l'eau jusqu'au premier lit de leurs logemens. Si le pays est plat & que la

riviere soit creuse, les chaussées sont longues, mais moins élevées que dans les vallons. Ces chaussées ont dix ou douze pieds d'épaisseur dans leurs fondemens, & diminuent peu à peu jusqu'au haut où elles n'en ont ordinairement que deux. Comme ces animaux ont une grande facilité à couper du bois, ils ne l'épargnent pas, & le taillent ordinairement par morceaux gros comme le bras ou comme la cuisse, & longs depuis 2 jusqu'à 4, 5 ou 6 pieds. Ils les enfoncent par l'un des bouts fort avant dans la terre & fort proche les uns des autres, les entrelassant avec d'autres morceaux plus petits & plus souples, dont ils remplissent les vuides avec de la terre glaise. On continue à mesure que l'eau s'éleve, afin de pouvoir transporter plus aisément les matériaux. On arrête enfin ces sortes de digues lorsque les eaux retenues peuvent atteindre le premier lit du logement qu'ils doivent faire. Le côté de la chaussée que l'eau touche, est en talus, & l'eau qui pese suivant sa hauteur la presse puissamment contre terre, le côté opposé est à plomb. Elles sont assez solides pour soutenir les personnes qui montent dessus, & ces animaux ont grand soin de les entretenir : car ils réparent les moindres ouvertures avec la terre glaise. S'ils s'apperçoivent que les Chasseurs les observent, ils n'y travaillent que la nuit, ou bien ils abandonnent leur demeure.

3. La chaussée étant finie, ils travaillent à leurs cabanes, qu'ils fondent toujours solidement sur le bord de l'eau, sur quelque petite Isle, ou sur des pilotis. Ces logemens sont ronds ou ovales, & débordent des deux tiers hors de l'eau; mais ils ont la précaution de laisser une porte que la glace ne puisse pas boucher. Quelquefois ils bâtissent la cabane entiere sur la terre, & font des fossés de 5 ou 6 pieds de profondeur, qu'ils conduisent jusqu'à l'eau. Ils emploient les mêmes matériaux pour les bâtimens que pour les chaussées, excepté que les bâtimens sont perpendiculaires, & terminés en maniere de dôme. Les murailles ont ordinairement deux pieds d'épaisseur. Comme leurs dents valent bien les meilleures scies, ils coupent tous les

bouts de bois qui excedent les murailles, & y appliquent un enduit en dedans & en dehors, qui eſt une eſpece de torchis fait avec la terre glaiſe & des herbes ſeches. C'eſt bien dans cette occaſion où ils ſe ſervent de leur queue pour mieux affermir cet enduit.

4. Le dedans de la cabane eſt vouté en anſe de panier, & propre pour loger 8 ou 10 Caſtors. Hors d'œuvre cette maiſon a 8 ou 10 pieds de large ſur 10 ou 12 pieds de long, ſuppoſé que la cabane ſoit ovale : dans œuvre elle a 4 ou 5 pieds de large ſur 5 ou 6 pieds de long. Si le nombre des Caſtors eſt de 15 ou 20 & même de 30, ce qui eſt néantmoins fort rare, le logement eſt grand à proportion, & même il y en a pluſieurs les uns contre les autres. Quelques Miſſionnaires ont aſſuré M Sarraſin qu'on avoit trouvé 400 Caſtors logés dans différentes Cabanes qui communiquoient les unes aux autres. Elles ſont diſpoſées par étages, afin de s'y pouvoir retirer quand les eaux croiſſent. Ils ont auſſi une ouverture ſéparée de leur porte & de l'endroit où ils ſe baignent. C'eſt par cette ouverture qu'ils vont à l'eau rendre leurs excrémens.

5. On appelle Caſtors terriers ceux qui ſe logent dans les cavernes pratiquées dans un terrain élevé ſur le bord de l'eau. Ils commencent leur logement par une ouverture qui va plus ou moins avant dans l'eau, ſelon que les glaces peuvent être plus ou moins épaiſſes, & la continuent de 5 ou 6 pieds de long : mais elle n'a de largeur qu'autant qu'il en faut pour y pouvoir paſſer ; après quoi ils font un lac de 3 ou 4 pieds en tout ſens, où ils ſe baignent quand il leur plaît. Enſuite ils coupent un autre boyau dans la terre, qui va toujours en s'élevant par étages ; afin de s'y mettre au ſec quand les eaux s'élevent. On trouve quelquefois de ces boyaux qui ont plus de 100 pieds de long. Ces Caſtors couvrent les endroits où ils couchent avec de l'herbe. En hiver ils font des copeaux qui leur ſervent de matelas.

6. Tous ces ouvrages, ſur-tout ceux des Caſtors qui vivent dans les pays froids, ſont ordinairement achevés au mois

mois d'Août & de Septembre, qui eſt le temps où il faut commencer à faire des proviſions pour vivre pendant l'hiver. Ils coupent donc le bois par morceaux longs depuis 2 ou 3 pieds juſqu'à 8 ou 10. Les gros morceaux ſont traînés par pluſieurs de ces animaux, les petits par un ſeul, mais par des chemins différens pour ne pas s'embarraſſer les uns les autres. Ils en mettent d'abord une certaine quantité qui flotte dans l'eau, puis ils en placent de nouveaux ſur les premiers, qu'ils entaſſent pieces ſur pieces juſqu'à ce que leur proviſion réponde au nombre des animaux qui ont deſſein de loger enſemble : par exemple, la proviſion pour 8 ou 10 Caſtors eſt de 25 ou 30 pieds en quarré ſur 8 ou 10 pieds de profondeur. Ce bois n'eſt pas entaſſé comme celui de nos chantiers ; mais il l'eſt d'une maniere qui leur permet d'en arracher les morceaux qu'il leur plaît, & ils ne mangent que ceux qui trempent dans l'eau. Avant que de les manger, ils les coupent menu, & les apportent dans l'endroit de la cabane où ils couchent. S'ils les avoient coupés avant que de les mettre dans leur chantier, l'eau les auroit entraînés d'un côté & d'autre.

7. A l'égard de la chaſſe du Caſtor, on la fait depuis le commencement de Novembre juſqu'au mois de Mars & d'Avril, parce que ces animaux ſont bien fournis de poil. On le tue à l'affut, on lui tend des pieges, ou on le prend à la tranche. L'affut eſt la maniere la plus ennuyeuſe & la moins aſſurée. La plus commune eſt celle de lui tendre des pieges. Quoique les Caſtors ayent fait leurs proviſions, ils ne laiſſent pas que d'aller de temps en temps dans les bois chercher de nouvelle nourriture. Les Chaſſeurs même qui ſavent qu'ils aiment mieux le bois frais que celui qui eſt flotté, leur en apportent tout près de leurs cabanes, & leur dreſſent des pieges ſemblables à ces quatre de chiffre dont on prend les rats. On plante fort avant dans la terre pluſieurs piquets de trois ou quatre pieds de long, entre leſquels il y a une traverſe fort peſante, élevée d'environ un pied & demi, ſous laquelle on met pour apas une branche de Peuplier longue de 5 ou 6 pieds, la-

quelle conduit à une autre branche fort petite. Celle-ci répond à la traverſe avec tant de juſteſſe, que le Caſtor a beau remuer la premiere, la traverſe ne tombe que lorſqu'il coupe la petite branche, & il lui en coûte toujours la vie.

8. Prendre des Caſtors à la tranche, c'eſt faire des ouvertures à la glace avec des inſtrumens tranchans lorſque les glaces n'ont qu'environ un pied d'épais. Les Caſtors ne manquent pas de venir à ces ouvertures pour reſpirer, & c'eſt là où on les aſſomme à coups de haches. Il y a des Chaſſeurs qui rempliſſent ces trous avec la bourre de l'épi de *Typha* pour n'être pas vûs par les Caſtors, & alors ils les attrapent par un pied de derriere. S'il y a quelque ruiſſeau près des cabanes, on en coupe la glace en travers pour y tendre un filet bien fort, tandis qu'on va briſer la cabane pour en chaſſer ces animaux, qui ne manquent pas de ſe ſauver dans le ruiſſeau & de donner dans le panneau.

METHODE

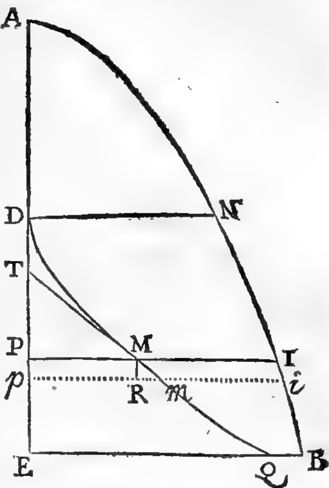
POUR LA RECTIFICATION DES COURBES.

PAR M. CARRE'.

1704. 15. Mars. MOnſieur Vanheuraët nous a donné une maniere de rectifier des Courbes qui m'a paru un peu embarraſſée ; car elle ſuppoſe une des regles de M. Hudde pour la réduction des Equations : c'eſt ce qui m'a donné occaſion de chercher la même choſe par la méthode *des Infiniment petits*, qui eſt beaucoup plus ſimple & plus facile, & qui ne ſuppoſe rien.

Soient deux lignes courbes NIB & DMQ avec la droite DE, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un

point quelconque M de la Courbe DMQ la tangente MT, & PM perpendiculaire sur DE prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la Courbe NIB au point I, PT soit toujours à TM comme quelque ligne donnée est à PI. Je dis que l'espace $DNBE$ est égal au parallelogramme fait de la donnée & d'une ligne égale à la Courbe DMQ.



Pour le démontrer, soit menée une autre ligne $p\kappa$ infiniment proche de PM, & MR parallele à DE. A cause des triangles semblables TPM, $MR\kappa$; $PT.TM :: RM.M\kappa$: or par la supposition $PT.TM :: a$ (la ligne donnée). PI; donc RM ou $Pp.M\kappa :: a.PI$. Donc le rectangle fait de la donnée par $M\kappa$ est égal au rectangle de PI par Pp : c'est-à-dire, $M\kappa \times a = PI \times Pp$. Mais la somme des $M\kappa$ est égale à la Courbe DMQ, & la somme des $PI \times Pp$ est égale à l'espace $DNBE$; donc, &c.

Maintenant soit cette équation générale $a^n y^m = z^p$ qui exprime la nature d'une infinité de Courbes telles que DMQ, m marquant une puissance quelconque paire, & p une puissance impaire. Ayant nommé DP, x; PM, y; & PI, z; donc MR ou $Pp = dx$, & $Rm = dy$, on cherchera la valeur de la soutangente PT que l'on trouve par les regles $= \frac{mx}{p}$; & à cause du triangle rectangle TPM,

$$TM = \overline{\frac{mmxx}{pp} + \frac{x^{\frac{2p}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}}}^{\frac{1}{2}}.$$ On aura donc $PT \left(\frac{mx}{p}\right)$.

$$TM \left(\overline{\frac{mmxx}{pp} + \frac{x^{\frac{2p}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}}}^{\frac{1}{2}}\right)$$ :: la donnée (a). PI (z). D'où

l'on tire $zz = aa + \frac{pp\,x^{\frac{2p-2m}{m}}}{mm\,a^{\frac{2n-2m}{m}}}$ qui eſt un lieu à une infinité d'autres lignes courbes telles que *NIB*, dont la quadrature ſert à trouver la longueur des premieres Courbes *DMQ*.

Si $n=1$, & $m=2$, p ſera $=3$; car tous les termes d'un lieu géométrique doivent être d'un même degré, & pour lors l'équation générale $a^n y^m = x^p$ ſe changera en celle-ci $ayy = x^3$ qui exprime la nature de la ſeconde parabole cubique, & l'égalité correſpondante deviendra $zz = \frac{9ax}{4} + aa$ qui eſt un lieu à la parabole ordinaire, dont le ſommet eſt éloigné du point *D* de $\frac{4a}{9}$, & le parametre $= \frac{9a}{4}$. Or nommant BE, d; & AE, b; DE ſera $b - \frac{4a}{9}$, & on trouvera par la méthode de la quadrature de la parabole * que la ſomme infinie des $\frac{zdx}{a}$ qui eſt égale à la longueur de la ligne courbe DMQ, eſt égale à $\frac{2bd}{3a} - \frac{8}{27}a$

* Calcul intégral, p. 8.

Si la Courbe *DMQ* eſt une parabole du premier genre qui ait pour axe *DN*, l'équation génerale ſe changera en celle-ci $ay = xx$, car en ce cas $n=1$, $m=1$, & $p=2$, & ſa correſpondante deviendra $zz = 4xx + aa$, d'où l'on tire $xx = \frac{zz - aa}{4}$, qui eſt un lieu à l'hyperbole, dont le centre eſt le point *D*, le parametre $= \frac{1}{2}a$, & l'axe traverſant $= 2a$: car par la propriété de l'hyperbole xx (les x repréſentent ici les ordonnées) $zz - aa :: \frac{1}{2}a.\ 2a$.

Il eſt manifeſte que l'on ne peut trouver géométriquement la longueur de la parabole ſans la quadrature de l'hyperbole, & réciproquement on ne peut trouver la quadrature de l'hyperbole ſans la longueur de la parabole.

NOUVELLE FORMATION DE SPIRALES

Beaucoup plus différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini ; avec les Touchantes, les Quadratures, les déroulemens, & les longueurs des quelques-unes de ces Spirales qu'on donne seulement ici pour exemples de cette Formation générale.

Par M. de Varignon.

Dans les Mémoires de 1700 pag. 90 en démontrant les Forces centrales de la Spirale générale de M. de Fermat, je dis que j'en avois encore une infiniment plus universelle : la voici formée par le moyen d'une Courbe en général, qui dans le détail fournit non-seulement toutes les Spirales de M. Fermat, mais encore autant d'autres que cette Courbe générale se peut diversifier en de particulieres, soit géométriques, soit méchaniques ; & même en autant d'autres encore que chaque Courbe particuliere peut avoir de positions différentes dans l'usage qu'on en peut faire pour cela, ainsi qu'on le verra dans les exemples qu'on en donnera dans la suite. 1704. 9. Avril.

Cette nouvelle formation de Spirales me vint en pensée dès il y a six ans, en faisant réflexion que celles de M. Fermat (dont la nature est d'avoir par tout leurs ordonnées concourantes, ou leurs rayons, en raison des puissances quelconques des arcs circulaires qui en expriment les révolutions) ne différent aucunement de celles qu'on trouveroit en prenant les arcs de révolutions en raison des ordonnées de Paraboles de tous les genres à l'infini,

dont les abſciſſes ſeroient égales aux ordonnées concourantes des Spirales cherchées. Ce fut, dis-je, ce qui me fit penſer à ſubſtituer d'autres Courbes, ou plutôt une Courbe en général qui les comprît toutes, à la place de ces Paraboles; & j'en vis naître une infinité de genres de Spirales toutes différentes de celles dont je viens de parler : il y en avoit d'infinies comme celles-là, & de même contour qu'elles; il y en avoit auſſi d'infinies du côté du Pole ou de leur centre, dont les unes étoient encore infinies, & d'autres finies par l'autre bout; il s'en trouvoit de finies de part & d'autre; on en voyoit qui avoient des points d'inflexion, ou de torſes; d'autres revenoient une ou pluſieurs fois ſur elles-mêmes en forme de laſſis ou de nœuds; il y en avoit même de rebrouſſées, & cela d'une variété infinie. En voici de toutes ces façons, entre leſquelles ſont ſix Spirales logarithmiques, dont cinq ſont nouvelles.

FORMATION NOUVELLE
de Spirales à l'infini.

Comment une même Courbe quelconque peut engendrer une ou pluſieurs Spirales à l'infini.

FIGURE I.

I. Soit en général une Courbe quelconque *HHV*, appellée *Courbe génératrice* (géométrique ou mécanique, il n'importe), dont les ordonnées ſoient *GH*; ſon axe ou ſon diametre *CX*, lequel rencontre en *A* la circonférence d'un cercle quelconque *ABYA* appellé *Cercle de révolution*; ſoit auſſi *CAX* la premiere poſition d'une Regle *CP*, laquelle (fixe au centre de ce cercle) tourne ſuivant *ABY* à meſure que ſe forme une Spirale *OZAK*, telle que cette Regle la rencontrant en *E*, & le cercle de révolution en *B*, ſi de ſon centre *C* on fait l'arc de cercle *EG* avec l'ordonnée *GH* de la Courbe génératrice *HHV*; l'on ait par tout la circonférence entiere *ABYA* du cercle de révolution, à l'arc *AMB* ou *ABYAMB*, &c. parcouru par le point *B* de la Regle *CP*, comme une droite conſtante quelconque *AD* eſt à l'ordonnée correſpondante *HG* de la Courbe génératrice *HHV*.

Il suit de cette génération que les arcs de révolution *AMB* ou *ABYAMB*, &c. sont toujours ici entr'eux comme les ordonnées correspondantes *GH* d'une Courbe quelconque *HHV*; & que par conséquent les Spirales ainsi trouvées, sont infiniment plus générales que tout ce qu'on en a donné jusqu'ici.

II. Pour trouver l'équation universelle qui les exprime toutes à la fois, soit la circonférence du cercle de révolution $ABYA=c$, son rayon $CA=a$; que ses arcs de révolution *AMB* dans la premiere, *ABYAMB* ou $c+AMB$ dans la seconde, $2c+AMB$ dans la troisieme, $3c+AMB$ dans la quatrieme; en un mot nc dans quelque révolution terminée à *B*, que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, soient les abscisses $=x$ de la Spirale ou plutôt du cercle de révolution, lesquelles ayent le point *A* pour origine, & se prennent toutes suivant *AMB*; soient aussi *CE* ou $CG=y$, $GH=z$, & $AD=b$; soient de plus appellées s les abscisses ou les arcs (pris depuis leur origine) des Courbes qui résultent de ces Spirales déroulées, & v les abscisses des axes de ces mêmes Courbes. On prendra $\int$ & *S* pour des caractéristiques, dont la premiere $\int$ signifiera *somme* ou *intégrale*, & la seconde *S* signifiera *sinus*, comme *d* signifie *différentielle*. *Noms dont on se servira dans la suite.*

III. Cela posé, la génération précédente (*art.* 1.) de la Spirale *OZAK* donnera par tout *ABYA* (c). *AMB* ou *ABYAMB*, &c. (x) : : *AD* (b). *GH* (z). De sorte que l'équation générale de cette Spirale sera $cz=bx$, dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z résultante de la nature donnée de la Courbe *HHV*, ou (ce qui revient au même, & ce qui souvent est plus commode) à substituer au lieu de z sa valeur $\frac{bx}{c}$ dans l'équation de cette Courbe génératrice donnée, du nom de laquelle cette Spirale prendra le sien : c'est-à-dire, que cette Spirale s'appellera *Parabolique*, *Hyperbolique*, *Logarithmique*, *Circulaire*, &c. selon que sa Courbe génératrice sera *Equation générale des Spirales précédentes.*

une *Parabole*, une *Hyperbole*, une *Logarithmique*, un *Cercle*, &c.

ÉQUATION GÉNÉRALE de Spirales à l'infini.

$$cz = bx.$$

Il est à remarquer que la même formation de Spirale (art. 1.) *auroit aussi donné* $zc^{r} = bx^{r}$ *, si l'on eût pris* $\overline{ABYA}^{r}.\ \overline{AMB}^{r}$ ou $\overline{ABY}\,\overline{AMB}^{r}$ :: AD. GH. *Mais la précédente équation suffit pour tout ce qu'on vient de promettre de cette formation ; outre que l'équation précédente est quelquefois aussi générale que celle-ci, ainsi qu'on le verra dans l'art. 72.*

COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

Les arcs de révolution des Spirales précédentes suivent toujours la raison des ordonnées correspondantes de leurs Courbes génératrices, pendant que les rayons de ces Spirales suivent de même la raison des abscisses de ces Courbes génératrices.

IV. La raison de b à c étant (*hyp.*) constante, il résulte de l'équation précédente (*art.* 3.) que les arcs (x) de révolution suivront toujours la raison des ordonnées *GH* (z) correspondantes de la Courbe génératrice *HHV* de quelque Spirale que ce soit, ainsi qu'on l'a déja remarqué sur la fin de l'article 1. Donc chaque rayon *CE* (y) de cette Spirale étant (*art.* 1.) toujours égal à l'abscisse correspondante *CG* de sa Courbe génératrice, en prenant *C* pour leur origine ; les rayons *CE* de chaque Spirale suivront toujours la raison des abscisses *CG* de sa Courbe génératrice, pendant que les arcs (x) de révolution suivront la raison des ordonnées *GH* (z) de cette Courbe. D'où l'on voit en général que pour avoir une Spirale dont les rayons suivent telle raison qu'on voudra, pendant que les arcs de révolution suivront telle autre raison qu'on voudra aussi, il n'y a qu'à lui donner une Courbe génératrice dont les abscisses (prises de l'origine *C*) suivent la premiere de ces raisons, & les ordonnées la seconde. D'où l'on voit aussi déja que la Logarithmique ordinaire doit ainsi engendrer deux Spirales Logarithmiques différentes, selon qu'elle aura son asymptote sur *CX*, ou

ou perpendiculaire en *C* à cette même *CX*: dans ce second cas ce sera la Spirale Logarithmique ordinaire dont les ordonnées ou rayons (y) sont en progression géométrique, pendant que les arcs de révolution correspondans (x) sont en progression Arithmétique; & dans le premier cas ç'en sera une autre dont les ordonnées ou rayons seront en progression Arithmétique, pendant que les arcs de révolution correspondans seront en progression Géométrique. Et ainsi des autres Courbes qu'on voudra prendre pour génératrices; ce qui donnera toujours des Spirales dont les rayons (y) & les arcs (x) correspondans suivront telles raisons qu'on voudra.

Ces Spirales commenceront toujours du côté des moindres ordonnées de leurs Courbes génératrices.

V. Il suit encore de l'art. 3. que chaque Spirale commencera toujours du côté de *A* où les x (*hyp.*) commencent, & toujours à une distance du centre *C*, égale à l'abscisse *CG* qui répond à la moindre des ordonnées de la Courbe génératrice *HHV*; & par conséquent à une distance infinie de ce centre, si cette Courbe génératrice a *CX* pour asymptote; puisque $z=o$ rend aussi $x=o$ dans l'équation générale de l'art. 3. Cela se verra dans l'art. 30. n. 1. & dans l'art. 55.

La Spirale ne fait qu'un nombre fini de révolutions avant que d'arriver à son centre, lorsque sa courbe génératrice y a une ordonnée finie.

VI. De quelque maniere que les ordonnées *GH* (z) croissent ou décroissent, si celle qui passe par le centre *C*, est finie, la Spirale y arrivera après un nombre fini de révolutions; puisque z finie rend aussi x finie dans l'égalité générale de l'art. 3.

La Spirale n'arrive à son centre qu'après un nombre infini de révolutions, lorsque sa Courbe génératrice y a une ordonnée infinie, c'est-à-dire, une asymptote pour ordonnée.

VII. Mais si la Courbe génératrice *HHV* a quelque ordonnée (z) infinie, la Spirale fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son point *E* correspondant: de sorte que si cette asymptote ou ordonnée infinie (z) passe par le centre *C* de la Spirale, cette Spirale n'y arrivera jamais qu'après un nombre infini de révolutions. Et tout cela parce que z infinie rend aussi x infinie dans l'équation générale de l'art. 3. On le verra dans l'art. 30. n. 3. & dans l'art. 49.

La Spirale passera toujours par le pié G de cha-

VIII. L'équation générale $cz=bx$ de l'art. 3. donnant aussi $ncz=nbx$, il est visible que $z=nb$ donnera toujours

que ordonnée GH multiple de son paramètre AD. $x = nc$; & par conséquent quelque nombre entier que n signifie, x sera un pareil multiple de c, que z le sera de b, c'est-à-dire, que x exprimera autant de révolutions completes que z (*GH*) contiendra de fois b (*AD*). Et comme cette Spirale (quelle qu'elle soit) passe toujours par *CX* au commencement & à la fin de chaque révolution, & qu'elle a toujours (*art.* 1.) son rayon *CE* (y) égal à l'abscisse *CG* terminée par l'ordonnée *GH* (z) correspondante de sa Courbe génératrice *HHV*; il suit que ce rayon *CE* sera alors en *CG*; & qu'ainsi cette Spirale passera toujours par le pié *G* de chaque ordonnée *GH* (z) multiple de *AD* (b), & qu'elle sera d'autant de révolutions (en tout) que la plus grande de ces ordonnées *GH* (z) contiendra de fois la droite *AD* (b); c'est-à-dire, d'une infinité de révolutions dans le cercle *ABYA*, lorsque la Courbe génératrice *HHV* y aura une ordonnée (z) infinie. Et de même d'une infinité hors ce même cercle, lorsque les ordonnées *GH* (z) croîtront à l'infini du côté de *X* ou de x. Si l'ordonnée (z) infinie étoit à la circonférence du cercle de révolution, comme en *A*, la Spirale seroit encore d'une infinité de révolutions au dedans ou au dehors de ce cercle, selon que l'accroissement des ordonnées de la Courbe génératrice en viendroit.

Maniere de trouver en quels points la Spirale doit rencontrer son axe.

FIG. II. III.

IX. Il suit de cet art. 8. que si après avoir divisé la plus grande ordonnée *XV* ou *CV* de la Courbe génératrice *HHV*, en parties *XR*, *RS*, *ST*, &c. ou *CR*, *RS*, *ST*, &c. égales à *AD*, on fait *RH*, *SH*, *TH*, &c. toutes paralleles à *CX*, lesquelles aillent rencontrer la Courbe génératrice *HHV* en autant de points *H*, desquels soient faites les ordonnées *HG* de cette Courbe : la Spirale (quelle qu'elle soit) coupera l'axe *CX* en tous les points *G* de ces ordonnées ; les abscisses correspondantes *CG* en seront les rayons à la fin de chaque révolution complete ; & leurs parties *GG* seront les différences de ces rayons : de sorte que la nature de la Courbe *HHV* étant donnée, il n'y aura qu'à substituer nb au lieu de z dans son équation, & la valeur de y qui en résultera, sera celle du rayon *CG* où se terminera la révolution marquée par le nombre que n signifiera. Et en prenant

n pour un nombre moindre ou plus grand d'une unité que celui-là, la valeur de y, qui en résultera, sera aussi celle du rayon *CG* où se terminera la révolution immédiatement précédente ou immédiatement suivante. Ainsi la différence de ces deux valeurs de y, sera la valeur de la différence de ces deux rayons *CG*. De même en général, quelle que soit la différence de ces deux valeurs de n, celle des y, qui en résultera, sera aussi celle des rayons *CG* où se terminent les révolutions marquées par ces différentes valeurs de n.

Tout cela servira dans la suite pour trouver les valeurs des couches différentes des espaces spiraux.

Quand la Spirale doit sortir de son cercle de révolution ou y entrer, & ce qu'elle doit faire de révolutions auparavant.

Fig. IV. V.

X. Il suit encore de l'art. 8. qu'en prenant *AD* (b) pour l'ordonnée (z) qui passe par *A* dans chaque Courbe génératrice *HHV*, la Spirale qui en sera engendrée comme ci-dessus (*art.* 1.) passera alors par *A*, soit pour sortir du cercle de révolution, ou pour y entrer, le point *A* se trouvant alors un des points *G* du précédent art. 9 : de sorte que de quelque nature que soit cette Spirale, elle n'aura jamais plus d'une révolution du côté qu'elle aura commencé, soit au dedans ou au dehors du cercle *ABYA*, tant que les ordonnées *GH* (z) de sa Courbe génératrice *HHV* iront en diminuant depuis *D*, soit du côté de *C*, ou du côté de *X*; & si elles vont en diminuant de part & d'autre depuis *D*, la Spirale n'aura tout au plus que deux révolutions, une de chaque côté de *AD* : encore faudra-t'il pour les rendre completes, que ces ordonnées diminuent de part jusqu'à zero sans passer outre. Mais si ces ordonnées (z) vont en augmentant de part & d'autre depuis *D*, la Spirale aura autant de révolutions de chaque côté de *AD*, que cette droite sera contenue de fois dans la plus grande des ordonnées *HG* (z) qui s'y trouveront.

Spirales dont les Courbes génératrices ont des ordonnées de part & d'autre de leurs centres.

XI. Jusqu'ici nous n'avons fait mention que des Spirales engendrées par des Courbes dont toutes les ordonnées n'étoient que d'un seul côté du centre *C* de ces Spirales. Mais si l'on veut que la Courbe génératrice *HHV* soit placée de maniere qu'elle ait des ordonnées *HG* de part & d'autre de ce centre *C*, ou (ce qui revient au même) que ce centre soit

ſur l'axe AX de cette Courbe entre ſes ordonnées, comme dans les Fig. 6. 7. il n'y a qu'à concevoir cette même Courbe HHV comme diviſée par ſon ordonnée CS en deux autres Courbes génératrices SHL, SHV, & dire de chacune d'elles ce qu'on a dit juſqu'ici de la même : en concevant les deux portions de Spirales KZC, $CORQ$, comme deux différentes Spirales dont LHS, SHV, ſont les Courbes génératrices. Il faut, dis-je, chercher ſur CP prolongée du côté de P, & non du côté de C (Cp n'en eſt qu'une poſition) ſuivant les articles précédens quelle Spirale KZC doit réſulter de la Courbe génératrice LHS, & de même quelle autre Spirale $CORQ$ doit auſſi réſulter de l'autre Courbe génératrice SHV; concevoir enſuite ces deux Spirales comme n'en faiſant plus qu'une ſeule $KZCORQ$: ce ſera la Spirale entiere que doit engendrer toute la Courbe LHV. On trouvera de même toute autre Spirale engendrée par quelque Courbe HHV que ce ſoit, à quelque endroit de ſon axe AX que le centre C de la Spirale ſoit ſuppoſé.

FIG. VI. VII.

Quand les Spirales doivent paſſer par leurs centres ; quand elles doivent s'y rebrouſſer, & de quelle maniere.

XII. Il ſuit des art. 6. & 7. que ces Spirales, auſſi bien que celles dont les Courbes génératrices n'ont d'ordonnées que d'un côté de leurs centres, paſſeront toutes par ces mêmes centres, chacune par le ſien, tant que leurs Courbes génératrices y auront des ordonnées; & jamais, tant qu'elles n'y en auront point, comme lorſque le centre de la Spirale engendrée par une ou par deux hyperboles oppoſées, ſe trouve ſur ſon axe tranſverſe entre leurs ſommets. Ce cas des Spirales, ainſi engendrées par des Courbes, dont aucune des ordonnées ne paſſeroit par leurs centres, n'a aucune difficulté particuliere : elles ſe trouveront comme celles des articles précédens, ſoit que leurs Courbes génératrices aient des ordonnées de part & d'autre de leurs centres, ſoit qu'elles n'en aient que d'un côté ſeulement. Et là il eſt encore à remarquer que tant que ces Courbes génératrices auront des ordonnées continues d'un côté à l'autre du centre C, les Spirales qui en naîtront s'y rebrouſſeront toujours, le premier rayon de leur retour ſe confondant

avec le dernier de leur arrivée en ce point : ce qui n'en fait qu'une seule touchante *CY* (Fig. 6. & 7.) des deux portions de la Spirale *ZC* & *CO* qui s'y terminent, laquelle touchante *CY* aura sa position dépendamment du rapport de *AD* à *CS*. Pour ce qui est de ce rebroussement en *C*, il sera de convexités opposées *ZC*, *CO*, si les ordonnées de la Courbe génératrice continuent de croître ou de décroître d'un côté à l'autre de celle qui passe par le centre *C*; mais les convexités & concavités en seront tournées en même sens, dès que ses ordonnées croîtront ou décroîtront de part & d'autre de celle qui passe par ce centre. Cette seconde espece de rebroussement se trouvera même par-tout où les ordonnées des Courbes génératrices *HHV* feront des *plus grands*, ou des *plus petits*, de part & d'autre desquels ces Courbes s'étendent : c'est-à-dire, par-tout où ces Courbes auront des ordonnées comprises entre d'autres qui depuis elles aillent de part & d'autre en croissant ou en diminuant, comme dans la Fig. 8.

Il y auroit encore bien des Remarques à faire sur ce général : mais en voilà assez pour à présent : voyons-en donc seulement quelques usages.

EXEMPLE I.

XIII. Concevons que la Courbe génératrice *HHV* soit une des Paraboles à l'infini, dont l'équation générale soit (suivant les noms de l'art. 2.) $za^{m-1}=y^m$, ou $z=\frac{y^m}{a^{m-1}}$, ayant *CX* pour axe intérieur ou extérieur selon l'exigence de m, & l'origine des y en *C*. Si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation génératrice de l'art. 3. l'on aura $\frac{y^m}{a^{m-1}}=\frac{bx}{c}$, ou $cy^m=bxa^{m-1}$ pour celle de toutes les Spirales paraboliques à l'infini, résultante de cette position de la Parabole générale *HHV*; d'où (en prenant *AD* pour une ordonnée de cette Parabole générale *HHV*) l'on aura aussi $cy^m=xa^m$ pour l'équation générale de toutes ces Spirales pa-

Spirales paraboliques générales de M. de Fermat, appellées ici vertico-centrales pour les distinguer de tout ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales paraboliques.

FIG. IV.

raboliques, à cauſe qu'en A (*art.* 2.) ayant $GH(z)=AD(b)$, & $CE\ (y)=CB=CA\ (a)$, l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ donne $b=a$. De ſorte que ſi l'on prend $m=\frac{q}{p}$, l'on aura de même $cy^{\frac{q}{p}}=xa^{\frac{q}{p}}$, ou $c^p\ y^q=x^p\ a^q$, pour l'équation de toutes ces mêmes Spirales paraboliques, laquelle eſt la même que ſi on les eût formées à la maniere de M. de Fermat en prenant par tout $c^p\ x^p :: a^q\ x^q$.

Pluſieurs autres Spirales paraboliques pouvant encore naître de la Parabole generatrice HHV *dont il s'agit ici, ſelon la variété des points de ſon axe où leur centre ſe peut trouver ; nous appellerons celles-ci* Spirales paraboliques vertico-centrales, *à cauſe qu'elles ont leur centre au ſommet de leurs Paraboles génératrices. Voici les tangentes de ces Spirales, leurs déroulemens en Paraboles, leurs longueurs, & leurs eſpaces entiers & par couches répondantes à tel nombre de révolutions & à telle révolution particuliere qu'on voudra.*

Expreſſion générale des ſoutangentes de ces Spirales paraboliques vertico-centrales de tous les genres.

XIV. Pour trouver la Tangente ET requiſe à tel point E qu'on voudra de la Spirale $COZAK$, ſoit CT perpendiculaire à CP, & qui rencontre cette Tangente en T; ſoit de plus Cp indéfiniment proche de CP, laquelle rencontre la Spirale en e, le cercle en b, & l'arc concentrique GE en F. Cela fait, on aura $CB\ (a).\ CE\ (y) :: Bb\ (dx).\ EF=\frac{ydx}{a}$. Et de plus $Fe\ (dy).\ EF\left(\frac{ydx}{a}\right) :: CE\ (y).\ CT=\frac{yydx}{ady}$. Mais l'équation $cy^m=xa^m$ de l'art. 13. donne $dx=\frac{mcy^{m-1}dy}{a^m}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de dx dans la précédente valeur de CT, l'on aura $CT= \frac{mcy^{m+1}}{a^{m+1}}$ (à cauſe de $cy^m=xa^m$) $=\frac{mxy}{a}$. De ſorte que $\frac{mxy}{a}$ ſera l'expreſſion générale des ſoutangentes de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

Et là il eſt à remarquer que quelque portion de circon-

férence circulaire (décrite du rayon $CB = a$, ou parcourue par le point B de la Regle mobile CP) que x signifie suivant l'art. 2. l'on aura toujours $\frac{xy}{a}$ pour une semblable quantité de circonférence circulaire décrite du rayon $CE = y$, ou par le point de cette Regle, qui passe par celui d'attouchement dont il est ici question. Ainsi en général les soutangentes CT de ces Spirales paraboliques seront à ces quantités correspondantes $\frac{xy}{a}$ de circonférences circulaires :: m. 1.

Autre expression générale des mêmes soutangentes.

XV. De là, si l'on suppose $x = nc$, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que n signifie ; l'art. 8. donnant alors $nb = z$ (*art.* 13.) $= \frac{y^m}{a^{m-1}}$, ou $y = \overline{nba^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$ (*art.* 13.) $= \overline{na^m}^{\frac{1}{m}} = an^{\frac{1}{m}}$, la substitution de ces valeurs de x & de y dans l'expression générale $CT = \frac{mxy}{a}$ des soutangentes de toutes ces Spirales paraboliques, trouvée dans le précédent art. 14. donnera aussi $CT = \frac{mncan^{\frac{1}{m}}}{a} = mcn^{\frac{1}{m}+1} = mcn^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expression générale des soutangentes qui se trouvent à la fin de tel nombre de leurs révolutions completes ou incompletes, qu'on voudra faire signifier à n. D'où l'on voit que toutes ces soutangentes sont comme les $mn^{\frac{m+1}{m}}$ qui (multipliées par c) les expriment, quelque différences que les diverses valeurs de m puissent apporter entre les Spirales auxquelles elles appartiennent, & que dans la même de toutes ces Spirales, quelle qu'elle soit, ces soutangentes sont toujours comme les $n^{\frac{m+1}{m}}$ correspondans.

Ainsi, par exemple, dans la Spirale d'Archimede qui donne $m = 1$, toutes ces soutangentes seront entr'elles comme les n^2, c'est-à-dire, comme les quarrés des nombres des révolutions completes ou incompletes qui leur répondent. De sorte que toutes celles de ces soutangen-

tes, dont les points d'attouchement correſpondans ſe trouveront à la fin des révolutions completes de ces Spirales, ſeront entr'elles comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. c'eſt-à-dire, comme les quarrés des nombres naturels, ſelon que le nombre n de ces révolutions ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

De même ſi l'on ſuppoſe $m=2$, comme lorſque la Parabole génératrice HHV eſt une Parabole ordinaire d'Archimede ou d'Apollonius; on trouvera auſſi que toutes les ſoutangentes qui ſe trouvent à la fin des révolutions completes ou incompletes de la Spirale qui en réſulte, ſeront entr'elles comme les $n^{\frac{3}{2}}$, ou $\sqrt{n^3}$, qui leur répondent; c'eſt-à-dire, comme les racines quarrées des cubes des nombres de ces révolutions. De ſorte que toutes celles de ces ſoutangentes qui ſe trouvent à la fin des révolutions completes de cette Spirale, ſeront entr'elles comme les racines quarrées $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{216}$, $\sqrt{343}$, &c. des cubes des nombres naturels, ſelon que le nombre n des ces révolutions completes ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Et ainſi de pareilles ſoutangentes de toutes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, ſelon les valeurs différentes qu'on peut donner à m.

Rapport général des mêmes ſoutangentes aux circonférences des cercles circonſcrits; c'eſt-à-dire, décrits du centre des Spirales par leurs points d'attouchement.

XVI. Si préſentement on veut ſavoir quel rapport toutes ces ſoutangentes CT des Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent avoir aux circonférences circulaires qui (concentriques à ces Spirales) paſſent par leurs points d'attouchement E correſpondans, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que n puiſſe ſignifier depuis l'origine de ces Paroboles juſqu'à ces points d'attouchement; il n'y a qu'à conſidérer que puiſque (*art.* 15.) le rayon CE (y) de chacun de ces cercles, eſt en général $= an^{\frac{1}{m}}$, l'on aura de même en général ſa circonférence $= cn^{\frac{1}{m}}$ à cauſe de $an^{\frac{1}{m}} . cn^{\frac{1}{m}} :: a . c$.

qui

qui eſt (*art.* 2.) le rapport du rayon du cercle *ABYA* à ſa circonférence : car ayant déja (*art.* 15.) $mcn^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expreſſion générale des ſoutangentes qui leur répondent, l'on aura auſſi en général chacune de ces ſoutangentes *CT* à la circonférence du cercle décrit du centre *C* par le point d'attouchement *E* correſpondant :: $mcn^{\frac{m+1}{m}} \cdot cn^{\frac{1}{m}} :: mn. 1.$ c'eſt-à-dire, comme le produit du degré (*m*) de la Parabole génératrice *HHV*, par le nombre (*n*) des révolutions, eſt à l'unité : quels que ſoient ces nombres *m* & *n*, entiers ou rompus, il n'importe.

Le même rapport pour le cas des Touchantes à la fin de telle révolution complete qu'on voudra.

XVII. Donc ſi l'on prend *n* pour un nombre entier quelconque, lequel par conſéquent exprime autant de révolutions completes qu'on lui voudra ſuppoſer d'unités ; on trouvera de même en général que chaque ſoutangente *CT* à la fin de quelque révolution complete que ce ſoit, des Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doit toujours être à la circonférence du cercle qui paſſe par le point d'attouchement correſpondant *E*, lequel ſe trouve alors ſur l'axe *AX*, c'eſt-à-dire, à la circonférence du cercle circonſcrit à cette révolution :: *mn*. 1. De ſorte que ce ſera comme *m*, 2*m*, 3*m*, 4*m*, 5*m*, 6*m*, 7*m*, &c. à l'unité, ſelon que le nombre *n* des révolutions completes en queſtion, ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. quel que puiſſe être le degré *m* de ces Spirales à l'infini.

Ainſi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m=1$, & qui par-là fait auſſi que chaque ſoutangente de cette Spirale à la fin de tel nombre *n* qu'on voudra, de ſes révolutions completes, doit toujours être à la circonférence du cercle circonſcrit, ou qui paſſe par le point d'attouchement correſpondant :: *n*. 1. c'eſt-à-dire, comme le nombre des révolutions completes qui (*hyp.*) s'y termine, eſt à l'unité, la ſoutangente qui répond à la fin de la premiere révolution de cette Spirale d'Archimede, ſera égale à la circonférence du cercle qui paſſe par-là, & qui a le même centre que cette Spirale, c'eſt-à-dire, du cercle

ABYA circonſcrit à cette premiere révolution qui (*art.* 9. & 13.) finit en *A*; la ſoutangente qui répond à la fin de la ſeconde révolution, ſera double du cercle circonſcrit à cette ſeconde révolution ; celle qui répond à la fin de la troiſieme révolution, ſera triple de la circonférence circulaire pareillement circonſcrite; à la fin de la quatrieme, elle en ſera quadruple; à la fin de la cinquieme, elle en ſera quintuple; & ainſi à l'infini : c'eſt-à-dire, en général, que la ſoutagente de la Spirale d'Archimede à la fin de tant de révolutions completes qu'on voudra, ſera toujours à la circonférence du cercle circonſcrit, ou qui (concentrique à cette Spirale) paſſe par ſon point d'attouchement correſpondant, comme ce nombre de révolutions ſera à l'unité. Ce qui fait voir que toute la doctrine d'Archimede ſur les Tangentes des Spirales, compriſe dans les vingt premieres propoſitions du Traité qu'il en a fait, n'eſt qu'un Corollaire très-limité de celle-ci, dont un plus grand détail ſeroit également facile pour toutes les autres valeurs de *m* à l'infini.

Rapport des mêmes ſoutangentes repriſes en général, à la circonférence du ſeul cercle circonſcrit à la premiere révolution complete des Spirales touchées en quelque endroit que ce ſoit.

XVIII. Voilà (*art.* 15. 16. & 17.) pour le rapport général des ſoutangentes *CT* de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales entr'elles & aux circonférences circulaires qui, concentriques à ces Spirales, paſſent par leurs points d'attouchement *E* correſpondans. Voici préſentement celui de toutes ces mêmes ſoutangentes à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit (*art.* 9. & 13.) à la ſeule premiere révolution complete de ces Spirales. Les art. 15. & 2. le donneront auſſi en général $:: mcn^{\frac{m+1}{m}} . c :: mn^{\frac{m+1}{m}} . 1.$ quels que ſoient les nombres *m* & *n*, entiers ou rompus, il n'importe : c'eſt-à-dire, pour toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, que chacune de leurs ſoutangentes à la fin de telle révolution complete ou incomplete qu'on voudra faire ſignifier à *n*, ſera toujours à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit à la premiere de leurs révolutions $:: mn^{\frac{m+1}{m}} . 1.$

Ainſi la Spirale, par exemple, d'Archimede, donnant

$m=1$, elle aura par-tout chacune de ſes ſoutangentes *CT*, à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit à la premiere révolution :: n^2. 1. c'eſt-à-dire, comme le quarré du nombre (n) de ſes révolutions compriſes entre ſon centre *C* & ſon point d'attouchement *E* correſpondant, eſt à l'unité. D'où l'on voit que toutes celles de ces ſoutangentes dont les points d'attouchement correſpondans ſe trouveront à la fin des révolutions completes de cette Spirale, doivent être à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit à ſa premiere révolution, comme les quarrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. à l'unité, ſelon que le nombre n des révolutions completes ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ce qui s'accorde parfaitement avec les art. 15. & 17.

On trouvera de même tous les rapports que les ſoutangentes qui répondent à la fin de tel nombre de révolutions completes ou incompletes qu'on voudra faire ſignifier à n dans tout ce que les différentes valeurs de m peuvent exprimer d'autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent avoir à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit à la premiere révolution de chacune de ces Spirales; ainſi nous ne nous arrêterons pas davantage à leurs Tangentes. Paſſons à leurs Eſpaces.

Somme des couches d'eſpace compriſes les unes ſur les autres entre les Spirales paraboliques vertico-centrales depuis leur centre juſqu'à tel de leurs rayons qu'on voudra.

XIX. Quant aux Eſpaces que ces Spirales paraboliques comprennent, on a vu (*art.* 14.) que $EF = \frac{ydx}{a} = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$; & qu'ainſi le triangle élémentaire *ECF* ou $ECe = \frac{mcy^{m+1}dy}{2a^{m+1}}$. Donc, en intégrant, l'on aura $\frac{mcy^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$, ou (à cauſe de l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13.) $\frac{mxyy}{2ma+4a}$ pour tout ce que ces triangles forment de couches d'eſpace les unes ſur les autres, entre ces Spirales & leur rayon *CE* (y), ſelon (*art.* 2.) que x eſt moindre, égale ou plus grande que c. Par conſéquent cette ſomme de couches d'eſpaces ſpiraux, doit être à un pareil nombre de couches d'eſpaces circulaires compris dans le ſecteur ou produit $\frac{xyy}{2a}$ (fait de ce rayon *CE*

(y), & d'un arc $\frac{xy}{a}$ décrit de ce même rayon, & semblable à x) :: $m . m+2$.

Déroulement de ces Spirales en Paraboles plus élevées d'un degré que leurs Paraboles génératrices.

XX. On peut encore trouver ces espaces spiraux en déroulant leurs Spirales à la maniere de M. Bernoulli, Professeur à Groningue, rapportée dans les Actes de Leipsik de 1691. pag. 16. & 17. par M. son frere, Professeur à Bâle. Pour cela soit CQ perpendiculaire en C sur CX prolongée vers x, & qui soit rencontrée en Q, q, par les arcs de cercles EQ, eq, décrits du centre C, & des rayons CE, Ce. Imaginons ensuite une Courbe CLI dont les appliquées Ql, ql, paralleles à Cx, & (*hyp.*) indéfiniment proches l'une de l'autre, aient $RL = EF$ (*art.* 14.) $= \frac{ydx}{a} = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$ pour différence. Il est visible que si l'on integre cette différence, l'on aura $\frac{mcy^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m+1}}$ pour la valeur de chacune de ces appliquées QL, ql, ou de leurs égales CN, Cn, en faisant LN, ln, paralleles à CQ : de sorte qu'ayant déja (*art.* 2.) $LN = y$, si l'on fait aussi $CN = v$, l'on aura $v = \frac{mcy^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m+1}}$ pour l'équation de la Courbe CLI qu'on voit être une Parabole plus élevée d'un degré que la génératrice CHV de la Spirale proposée, laquelle génératrice avoit (*art.* 13.) $za^{m-1} = y^m$ pour son équation. Donc en général toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent se dérouler ainsi en Paraboles plus élevées d'un degré que leurs Paraboles génératrices.

Par exemple, la Spirale d'Archimede ayant $m = 1$, doit se dérouler en une Parabole dont l'équation soit $v = \frac{cyy}{2aa}$, c'est-à-dire, en la Parabole ordinaire du même Archimede ou d'Apollonius, ainsi que Détonville & d'autres l'ont trouvé; au lieu que l'équation générale $za^{m-1} = y^m$ des Paraboles génératrices des Spirales en question, se réduisant ici à $z = y$, fait voir que la génératrice de la Spirale d'Archime-

de; eſt un triangle qui (ſuivant cette équation) peut paſſer pour une Parabole moindre d'un degré que celle d'Apollonius. Et ainſi des autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

XXI. De ce que (*art.* 20.) $Rl = Qq = Fe$, $RL = FE$, & que les angles ſont droits en R & en F, il ſuit auſſi que $Ll = Ee$; & ainſi de tous les autres élémens correſpondans de la Courbe CLI, & de la Spirale $COZAK$. Donc (en intégrant) l'arc parabolique CL ſe trouvera toujours égal à l'arc Spiral $COZAE$ correſpondant. Ainſi (*art.* 20.) on peut encore dire en général que les arcs des Spirales paraboliques vertico-centrales de tous les genres, ſont toujours égaux aux arcs correſpondans de Paraboles plus élevées d'un degré que les génératrices de ces Spirales; & que par conſéquent ces arcs de Spirales ſont toujours rectifiables tant que l'expoſant (m) du degré de leurs Paraboles génératrices eſt une fraction poſitive dont le numérateur eſt l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, & même auſſi tant que cet expoſant m eſt une fraction négative dont le numérateur eſt l'unité, & le dénominateur un nombre impair quelconque au-deſſus de l'unité. *Longueurs de ces Spirales.*

XXII. Enfin de ce que (*art.* 20.) $Nn = LR = EF$, & $NL = CQ = CE$, il ſuit que le quadrilatere élémentaire $NLln$ doit être double du triangle élémentaire correſpondant ECe, & ainſi de leurs intégrales. Donc l'eſpace parabolique CLN (fait de tous ces quadrilateres) doit être double de ce que l'arc ſpiral correſpondant $COZAK$ renferme de couches d'eſpace (fait de tous ces triangles) entre lui & ſon plus grand rayon CE. Or l'équation de la Parabole CLI étant *Autre maniere de trouver les ſommes de couches des eſpaces ſpiraux de l'article 19.*

(*art.* 20.) $v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$, on ſait que l'eſpace CLN

doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{m+2 \times a^{m+1}}$. Donc cette ſomme de couches

d'eſpace Spiral, doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ (à cauſe de

l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13.) $= \frac{mxyy}{2ma+4a}$, comme dans l'art. 19:

Ce qu'il y a de ces espaces Spiraux en une ou plusieurs couches entre deux quelconques de leurs rayons.

XXIII. Par la même raison, si l'on prend un autre point quelconque Z entre C & E sur la Spirale en question, & qu'on fasse son rayon $ZC = r$; l'on aura aussi $\frac{mcr^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ pour tout ce qu'il y aura de plans ou de couches d'espace entre le rayon ZC de cette Spirale, & son arc COZ compris depuis son centre C jusqu'à ce rayon. Donc tout ce qu'il y a d'espace Spiral depuis ZC jusqu'à la plus grande EC (en une ou en plusieurs couches) sera $= \frac{mcy^{m+2} - mcr^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$. Par conséquent en prenant f pour la différence dont la plus grande EC (y) surpasse ZC (r), c'est-à-dire, $y - f = r$, ou $mcr^{m+2} = mc \times \overline{y-f}^{m+2}$; l'on aura $\frac{mcy^{m+2} - mc\overline{y-f}^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ pour ce qu'il y aura d'espace (en une ou en plusieurs couches) entre ZC & la plus grande EC.

Rapport général de ces espaces Spiraux compris (en une ou plusieurs couches) entre deux rayons quelconques, à la circonférence du cercle circonscrit, ou dont le rayon seroit le plus grand de ces deux-ci.

XXIV. Cela étant, si l'on considere que cette EC (y) est le rayon du cercle circonscrit, que la circonférence de ce cercle est $= \frac{cy}{a}$, & son aire $= \frac{cyy}{2a}$; l'on aura cet espace Spiral à celui de ce cercle :: $\frac{mcy^{m+2} - mc \times \overline{y-f}^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}} \cdot \frac{cyy}{2a}$ :: $\frac{my^{m+2} - m \times \overline{y-f}^{m+2}}{m+2 \times a^m} \cdot yy$. De quelque nombre de couches que soit fait ce même espace Spiral compris entre ZC & la plus grande EC.

Ainsi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m = 1$, cet espace Spiral sera toujours par-tout à son cercle circonscrit :: $\frac{y^3 - \overline{y-f}^3}{3a} \cdot yy$ :: $\frac{3fyy - 3ffy + f^3}{3a} \cdot yy$. De sorte que si c'est à la fin des ré-

volutions completes qu'il s'agisse de trouver l'espace de chacune, ayant alors $f = a$ distance de l'une à l'autre, & $y = na$ en prenant n pour un nombre entier qui soit celui de ces révolutions completes; l'espace Spiral de la derniere de ces révolutions exprimées par n, sera toujours ici à son cercle circonscrit :: $\frac{3nna^3 - 3na^3 + a^3}{3a}$. $nnaa$ :: $3nn - 3n + 1$. $3nn$. Ce qui joint à l'art. 17. comprend tout le Traité d'Archimede *De Spiralibus*.

XXV. Pour trouver encore la même chose d'une autre maniere, & en général pour toutes sortes de Spirales vertico-centrales à l'infini, soient encore la plus grande CE (y) & CZ ($y-f$) deux rayons d'une même Spirale, à chacun desquels finisse tel nombre qu'on voudra de révolutions telles qu'on voudra aussi, à commencer en C de part & d'autre; soit présentement n un nombre entier ou rompu, il n'importe, qui exprime le nombre des révolutions completes ou incompletes terminées à la plus grande CE (y), lequel nombre surpasse d'une différence ou excès quelconque e le nombre des révolutions completes ou incompletes qui se terminent à CZ ($y-f$), ensorte que $n-e$ exprime aussi ce dernier nombre de révolutions : il faut chercher d'abord la valeur du rayon CZ ($y-f$). Pour cela je considere que puisque (*hyp.*) n & $n-e$ sont les nombres de ce qu'il y a de révolutions completes ou incompletes depuis C jusqu'à la plus grande CE (y), & jusqu'à CZ ($y-f$); l'on aura (*art.* 2.) $nc = x$ pour le chemin que le point B (fixe sur la regle CP) fait autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à la plus grande CE (y), & $nc - ec = x$ pour celui que fait de même ce point B de la Regle CP autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à CZ ($y-f$). De sorte que suivant l'Analogie de l'équation générale $cy^m = xa^m$ de l'art. 13. l'on aura $nc . y^m :: c . a^m :: nc - ec . \overline{y-f}^m$. Et par conséquent $\overline{y-f}^m = \frac{nc - ec}{nc} \times y^m = \frac{n-e}{n} \times y^m$, ou $y - f = \frac{\overline{n-e}^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{1}{m}}} \times y$, ou bien aussi $\overline{y-f}^{m+2} = \frac{\overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times y^{m+2}$. Donc en

Autre maniere de trouver le même rapport.

ſubſtituant cette valeur de $\overline{y-f}^{\,m+2}$ dans l'Analogie générale de l'article 24. l'on aura $\frac{my^{m+2} - m\times\overline{y-f}^{\,m+2}}{\overline{m+2}\times a^m}$ $= \frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\,\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^{m+2}}{\overline{m+2}\times a^m}$. Par conſéquent en général ſuivant ce même art. 24. l'eſpace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres, & d'autant de couches ou de révolutions completes ou incompletes (à commencer par la derniere, c'eſt-à-dire, par le point E) qu'en marque le nombre e, ſera toujours à ſon cercle circonſcrit, ou décrit du plus grand rayon CE (y) :: $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\,\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^{m+2}}{\overline{m+2}\times a^m} . yy$ :: $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\,\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^m}{m+2} . a^m$ (à cauſe que l'art. 13. donne $a^m = \frac{cy^m}{x}$, & qu'on ſuppoſe $x = nc$) :: $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\,\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^m}{m+2} . \frac{cy^m}{nc}$ :: $n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\,\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$.

Troiſieme maniere de trouver le même rapport.

XXVI. Tout cela ſe peut encore trouver en général d'une maniere encore plus ſimple, en continuant de ſuppoſer $x = nc$, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes depuis C juſqu'à EC (y) que le nombre n (entier ou rompu) puiſſe ſignifier : car alors ayant $y = an^{\frac{1}{m}}$, comme dans l'art. 15. la ſubſtitution de ces valeurs de x & de y dans la valeur (*art.* 19. & 22.) générale $\frac{mxyy}{2ma+4a}$ de tout ce qu'il y a de couches d'eſpace Spiral les unes ſur les autres dans tout ce que n marque de révolutions, donnera auſſi $\frac{mncaan^{\frac{2}{m}}}{2ma+4a}$, ou $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour une pareille

reille valeur de cette même ſomme de couches d'eſpace Spiral.

Par la même raiſon, ſi au lieu de n on met $n-e$ pour un moindre nombre quelconque de révolutions completes ou incompletes depuis C juſqu'à CZ, quel que ſoit encore le nombre e, entier ou rompu, il n'importe; on trouvera de même $\frac{mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour toutes les couches d'eſpace Spiral, marquées par n depuis C juſqu'à E la plus éloignée de C, moins ce que le nombre e en marque depuis Z juſqu'à cette E : c'eſt-à-dire, pour ce qu'il y en aura depuis C juſqu'à Z.

Donc en retranchant cette valeur de la précédente, l'on aura $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour la valeur générale de ce que ce nombre e marque de couches d'eſpace Spiral depuis Z juſqu'à E la plus éloignée de C. De ſorte que ſi l'on conſidere que (*art.* 16.) $cn^{\frac{1}{m}}$ eſt la circonférence du cercle circonſcrit dont la plus grande CE $(y) = an^{\frac{1}{m}}$ ſeroit le rayon, & que par conſéquent ſon aire eſt $= \frac{acn^{\frac{2}{m}}}{2}$; l'on aura tout ce que le nombre e (quel qu'il ſoit) marque de couches d'eſpace Spiral entre Z & E la plus éloignée de C, à ce cercle circonſcrit::

$$\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4} \cdot \frac{acn^{\frac{2}{m}}}{2} :: \frac{mn^{\frac{m+2}{m}} - m \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{m+2} .$$

$n^{\frac{2}{m}} :: n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$. Ainſi que dans le précédent art. 25. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

XXVII. Donc en prenant préſentement n & e pour deux nombres entiers quelconques, dont e ſoit le moindre à diſcrétion, ce rapport général deviendra celui que la ſomme des couches d'eſpace Spiral paraboliques vertico-central, d'autant de révolutions completes (à commencer par la der-

Le même rapport pour le cas des couches d'eſpaces completes, ou de révolutions completes, en quelque nombre qu'elles ſoient.

niere) que le nombre e renferme d'unités, aura à ſon cercle circonſcrit. D'où l'on voit auſſi qu'en faiſant $e=1$, l'eſpace Spiral de la derniere d'autant de révolutions completes qu'on voudra en faire ſignifier à n, ſe trouvera toujours à ce cercle circonſcrit :: $n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-1}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$. Ce qui ſervira de Regle générale pour diſcerner les valeurs des différentes couches d'eſpaces Spiraux paraboliques de tous les genres, engendrés (comme dans l'art. 13.) par des révolutions completes différentes, & priſes à diſcrétion.

Par exemple, pour la Spirale d'Archimede, laquelle donne $m=1$, ce rapport général donnera toujours l'eſpace Spiral de la derniere d'autant de révolutions completes qu'on en voudra exprimer par le nombre entier n, à ſon cercle circonſcrit :: $n^3 - \overline{n-1}^3 . 3n^2 :: 3nn - 3n + 1 . 3nn$. comme on l'a déja vu dans l'art. 24. Ainſi la premiere révolution complete de cette Spirale d'Archimede, donnant $n=1$, l'eſpace en ſera à ſon cercle circonſcrit *ABYA* :: 1. 3. L'eſpace de la ſeconde révolution complete, laquelle donne $n=2$, ſera de même à ſon cercle circonſcrit :: 7. 12. Dans la troiſieme complete, laquelle donne $n=3$, ce ſera :: 19. 27. Dans la quatrieme, qui donne $n=4$, ce ſera :: 37. 48. &c.

Si l'on ſuppoſe $m=2$, enſorte que l'équation (*art.* 13.) de la Spirale ſoit $cyy=aax$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'eſpace Spiral de la derniere de tant de révolutions completes qu'on voudra, à ſon cercle circonſcrit :: $n^2 - \overline{n-1}^2 . 2n :: 2n - 1 . 2n$. Ainſi dans la premiere révolution complete, qui donne $n=1$, ce ſera :: 1. 2. Dans la ſeconde, qui donne $n=2$, ce ſera :: 3. 4. Dans la troiſieme, qui donne $n=3$, ce ſera :: 5. 6. Dans la quatrieme, qui donne $n=4$, ce ſera :: 7. 8. &c.

Si l'on ſuppoſe au contraire $m=\frac{1}{2}$, enſorte que l'équation (*art.* 13.) de la Spirale ſoit $cy^{\frac{1}{2}}=xa^{\frac{1}{2}}$, ou $ccy=axx$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'eſpace Spiral de la derniere de tant de révolutions completes qu'on voudra, à ſon cercle circonſcrit :: $n^5 - \overline{n-1}^5 . 5n^4 :: 5n^4 - 10n^3 +$

$10nn - 5n + 1 . 5n^4$. Ainſi dans la premiere révolution complete, qui donne $n=1$, ce ſera :: 1. 5. Dans la ſeconde, qui donne $n=2$, ce ſera :: 31. 80. Dans la troiſieme, qui donne $n=3$, ce ſera :: 211. 405. Dans la quatrieme, qui donne $n=4$, ce ſera :: 781. 1280. &c. Et ainſi de toutes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, pour chacune deſquelles le précédent rapport général fournira de même une expreſſion littérale, qui détaillée comme ci-deſſus, donnera tous les rapports de leurs eſpaces (pris un à un par révolutions completes) aux cercles circonſcrits.

C'eſt ainſi que la Table ſuivante a été faite, & qu'on la peut continuer à l'infini ſelon les différentes valeurs de m qu'on lui ſubſtituera dans la précédente Analogie générale, en y prenant ſucceſſivement n pour des nombres entiers qui ſuivent l'ordre des nombres naturels, comme dans la premiere colonne de la Table, où ils marquent chacun la derniere d'autant de révolutions completes pour chaque valeur de m, qu'il contient d'unités; ce qui détermine les valeurs correſpondantes de l'eſpace Spiral de chaque révolution complete, à ſon cercle circonſcrit, pour chaque valeur de m qui ſe trouve au-deſſus d'elles.

Nombre n des révolutions completes.	Si $m=1$		Si $m=2$		Si $m=\frac{1}{2}$		
	Eſpaces.	Cercles.	Eſpaces.	Cercles.	Eſpaces.	Cercles.	
1	1	3	1	2	1	5	
2	7	12	3	4	31	80	
3	19	27	5	6	211	405	
4	37	48	7	8	781	1280	
5	61	75	9	10	2101	3125	&c.
6	91	108	11	12	4651	6480	
7	127	147	13	14	9031	12005	
8	169	192	15	16	15961	20480	
9	217	243	17	18	26281	32805	
10	271	300	19	20	40951	50000	
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	

Rapport général des eſpaces Spiraux de l'art. 26. à la circonférence du cercle de la premiere révolution.

XXVIII. Si l'on veut préſentement comparer l'eſpace Spiral compris entre deux rayons quelconques de chacune de ces Spirales paraboliques vertico-centrales au ſeul cercle $ABYA$ de la 1re révolution, il n'y a qu'à conſidérer que ſuivant les noms de l'art. 2. l'aire de ce cercle eſt $= \frac{ac}{2}$, & que (*art.* 26.) $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ eſt auſſi la valeur générale de ce que le nombre e (entier ou rompu) marque de couches d'eſpace Spiral depuis Z juſqu'à E la plus éloignée de C. Car alors cette ſomme de couches (completes ou incompletes) d'eſpace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres, ſe trouvera être en général à ce cercle $ABYA$ de la 1re révolution $:: \frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4} . \frac{ac}{2} :: n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m}$. quels que ſoient les nombres exprimés par m, n, e, entiers ou rompus, il n'importe.

De ſorte qu'en prenant préſentement n & e pour des nombres entiers, afin de rendre toutes ces couches completes; ce rapport ſera encore celui d'autant de couches completes d'eſpace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres (à commencer par la derniere) qu'il y aura d'unités dans e, au même cercle $ABYA$ de la premiere révolution.

D'où l'on voit que ſi l'on fait enfin $e=1$, l'eſpace Spiral de la derniere d'autant de révolutions completes que le nombre n contient d'unités, ſe trouvera auſſi être au cercle $ABYA$ de la premiere révolution $:: n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-1}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m}$. Ce qui ſervira encore de Regle générale pour diſcerner les rapports de différentes couches d'eſpaces Spiraux paraboliques vertico-centraux de tous les genres, & de révolutions completes, au cercle $ABYA$ de la premiere. Le détail & la Table s'en feront comme ceux de l'art. 27.

XXIX. Il eſt à remarquer dans les deux articles précédens 27. & 28. que ſi au lieu d'y prendre e pour l'unité, on l'eût priſe pour telle fraction, ou portion de l'unité, que l'on auroit voulu ; la formule générale de chacun de ces deux articles, auroit donné de même le rapport de pareilles portions d'une couche d'eſpace Spiral de telle révolution complete que le nombre entier n puiſſe exprimer : par exemple, d'un demi, d'un tiers, d'un quart, d'un cinquieme, &c. de cette couche d'eſpace Spiral à ſon cercle circonſcrit ou de la derniere révolution dans l'art. 27. & au cercle de la premiere révolution dans l'art. 28. ſelon que l'on auroit pris e pour $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. De ſorte que ces deux articles 27. & 28. fourniſſent enſemble le moyen de comparer & de trouver le rapport de telle couche qu'on voudra, entiere ou par parties quelconques, d'eſpace Spiral parabolique vertico-central de quelque genre que ce ſoit, à ſon cercle circonſcrit, ou à celui de la premiere révolution.

Réflexion ſur le détail des rapports précédens.

Les art. 25. & 26. fourniſſent auſſi la maniere d'en comparer pluſieurs couches completes ou incompletes à la fois à leur cercle circonſcrit ; d'où l'on voit ainſi que dans l'art. 28. la maniere de les comparer de même au ſeul cercle de la premiere révolution. L'art. 26. donne enfin la maniere de comparer toutes ces couches d'eſpaces entr'elles, une ou pluſieurs à la fois, même dans des Spirales différentes. Tout cela joint aux art. 15. 16. 17. & 18. où l'on voit de même la maniere de comparer les ſoutangentes de toutes ces Spirales entr'elles, aux circonférences circulaires qui (concentriques à ces Spirales) paſſent par leurs points d'attouchement correſpondans, & à la circonférence du ſeul cercle de la premiere révolution : tout cela, dis-je, marque aſſez la fécondité de la méthode qu'on ſuit ici. En voici encore un autre exemple.

EXEMPLE II.

Spirales hyperboliques asymptotiques, appellées ici cocentrales *pour les distinguer de tout ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales hyperboliques asymptotiques.*

FIG. V.

XXX. Si l'on suppose que la Courbe génératrice *HHV* soit une hyperbole asymptotique générale dont *C* soit le centre, & *CV*, *CX*, ses asymptotes; les Spirales hyperboliques de tous les genres, qui en doivent résulter, s'en déduiront avec leurs dépendances de même qu'on le vient de voir des Spirales paraboliques de l'exemple premier. Mais si l'on veut abréger, & se servir de ce qui se trouve démontré de ces Spirales paraboliques dans ce premier exemple, il faut encore prendre ici *AD* pour une ordonnée de *HHV*, & considérer que de même qu'il n'y a qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ de l'art. 13. pour en faire l'équation générale $z = \frac{y^{-m}}{a^{-m-1}}$, ou $zy^m = a^{m+1}$ de toutes les hyperboles entre asymptotes à l'infini; il n'y a aussi qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation générale de toutes les Spirales paraboliques de l'art. 13. pour en faire $xy^m = ca^m$, qui est aussi l'équation de toutes les Spirales hyperboliques correspondantes à l'infini, dans lesquelles la transformation précédente de m positive en négative, la rend ici positive pour toute la suite de cet exemple. En voici les conséquences en supposant les mêmes noms que dans l'art. 13.

Les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, ayant les mêmes centres que leurs hyperboles génératrices, s'appelleront dans la suite Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, *pour les distinguer de plusieurs autres que ces mêmes hyperboles prises en dedans comme en dehors, pourroient engendrer dans tout ce qu'elles peuvent avoir d'autres positions par rapport aux centres de ces Spirales. Voici les conséquences de la précédente égalité générale de ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales.*

L'origine ou le commencement de ces Spirales hyperboliques, est à une distan-

1°. Il suit de cette égalité générale $xy^m = ca^m$ que lorsque *AMB* (x) est $= o$, alors *CE* (y) en *AX* est infinie. Ce qui fait voir que l'origine des abscisses *AMB* (x) étant en

A, celle de ces Spirales doit être à une distance infinie de *C* du côté de *X*; au lieu que les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier ont la leur en *C*: & tout cela parce que (*art.* 5.) dans ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales les ordonnées *GH* de leurs hyperboles génératrices croissent de *X* vers *C* en commençant à une distance infinie, pendant que la Regle *CP* tourne de *A* vers *B* suivant *ABYA* en commençant en *A*; au lieu que dans les Spirales paraboliques vertico-centrales, la Regle *CP* tournant de même de *A* vers *B* en commençant en *A*, les ordonnées *GH* de leurs paraboles génératrices croissent de *C* vers *X* à l'infini en commençant en *C*. *ce infinie de leur centre.*

2°. Lorsque *AMB* (x) est $=$ *ABYA* (c), l'égalité présente $xy^m = ca^m$ donne aussi *AC* (a) $=$ *CE* (y). Ce qui fait voir qu'à la fin de la premiere révolution les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, viennent couper en *A* le cercle de révolution *ABYA*, & entrent dedans pour n'en plus ressortir. Ce qui fait voir que l'arc Spiral de la premiere révolution est entierement hors ce cercle *ABYA*, & tout le reste dedans. *Elles entrent dans le cercle de révolution à la fin de la premiere.*

3°. Lorsque *CE* (y) sera$=o$, c'est-à-dire, lorsque cette Spirale arrivera au centre *C* du cercle de révolution, alors x sera infinie. Ce qui fait voir conformément à l'art. 7. qu'elle n'y peut arriver qu'après une infinité de révolutions. *Elles n'arrivent au centre de ce cercle, qui est aussi le leur, qu'après une infinité de révolutions.*

XXXI. En faisant encore m négative dans l'équation $v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$ qu'on a vûe (*art.* 20.) devoir être celle de toutes les Spirales hyperboliques vertico-centrales déroulées, ce lieu donnera aussi en général $v = \frac{-mcy^{1-m}}{-m+1 \times a^{1-m}} = \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$ pour celui de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales pareillement déroulées, en prenant toujours v pour les abscisses des Courbes qui en résultent, sur lesquelles abscisses les ordonnées perpendi- *Déroulement de ces Spirales hyperboliques.*

culaires sont égales aux y (CE) correspondans de ces Spirales. D'où l'on voit,

Quand elles se déroulent en hyperboles.

1°. Que lorsque $m > 1$, ces Spirales-ci se déroulent en hyperboles exprimées par ce même lieu $v = \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$.

Quand elles se déroulent en paraboles.

2°. Lorsque $m < 1$, ces mêmes Spirales se déroulent en Paraboles, dont le lieu (tiré du précédent) est $v = \frac{mcy^{1-m}}{-1+m \times a^{1-m}}$, ou $-v = \frac{-mcy^{1-m}}{-1+m \times a^{1-m}} = \frac{mcy^{1-m}}{1-m \times a^{1-m}}$ sur l'axe renversé des hyperboles précédentes, & le parametre $= \frac{mc}{1-m \times a^{1-m}}$.

Et quand elles se déroulent en logarithmique ordinaire.

3°. Mais lorsque $m = 1$, alors chacune de ces équations (*n.* 1. & 2.) ne donnant que v infinie, je remonte à leur différentielle qui me donne ici $-dv = \frac{cdy}{y}$ pour celle de la Courbe résultante du déroulement de la Spirale hyperbolique de ce cas. D'où l'on voit qu'elle se déroule en une logarithmique ordinaire dont la soutangente vaut la circonférence $ABYA$ (c) du cercle de révolution.

Longueurs de ces Spirales.

XXXII. Il suit aussi de ces déroulemens (*art.* 20.) que les longueurs de ces Spirales hyperboliques sont précisément les mêmes (par parties correspondantes) que celles des Courbes qui en sont déroulées. Par conséquent que celles de ces Spirales qui se déroulent (*art.* 31. *n.* 2.) en Paraboles, seront rectifiables tant que $\frac{1-m}{2m}$ sera un nombre entier & positif, c'est-à-dire, tant que l'exposant (m) du degré de leurs hyperboles génératrices sera une fraction positive dont le numérateur soit l'unité, & le dénominateur un nombre impair quelconque au-dessus de l'unité; & même aussi tant que cet exposant m sera une fraction négative dont le numérateur soit l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque; au lieu que dans l'art. 21.

la

la premiere de ces deux fractions devoit être négative, & la seconde positive pour rendre les Spirales paraboliques vertico-centrales rectifiables.

XXXIII. Quant au contour de toutes ces Spirales hyperboliques, on vient de voir (*art.* 30. *n.* 1.) que depuis le point *N* où elles sont coupées hors le cercle de révolution *ABYB* par *VC* prolongée vers *Q*, elles vont à l'infini du côté de *X* sans jamais rencontrer *CX*. Pour voir présentement si c'est en s'éloignant de cette droite *CX*, ou bien en s'en approchant comme d'une asymptote, que cela arrive; imaginons en quelque point *e* à telle distance qu'on voudra du point *C*, avec le rayon *Ce* qui rencontre en *b* le cercle de révolution *ABYA*; soient aussi des points *b* & *e* sur *CX*; deux perpendiculaires $bL = Sx$ (sinus de l'arc $AMB = x$, *S* marque *sinus*) & $eK = t$. *Contour de ces mêmes Spirales*

On aura $bL\ (Sx).\ eK\ (t) :: Cb\ (a).\ Ce\ (y) = \frac{at}{Sx}$.

Donc $y^m = \frac{a^m t^m}{\overline{Sx}^m}$; ce qui étant substitué dans l'égalité générale $xy^m = ca^m$ (*art.* 30.) de ces Spirales hyperboliques, donnera $\frac{xt}{\overline{Sx}^m} = c$. De sorte que lorsque l'arc x (Ab) sera $= dx$, c'est-à-dire infiniment petit, son sinus Sx (bL) se trouvant aussi alors $= dx$, l'on aura pour lors $c = \frac{t^m dx}{dx^m} = t^m dx^{1-m}$, ou $c^m \times c^{1-m} = t^m dx^{1-m}$; d'où résulte $c^m.\ t^m :: dx^{1-m}.\ c^{1-m}$. Donc

1°. Lorsque $m = 1$, l'on aura $c = t$, c'est-à-dire, qu'en ce cas la Spirale hyperbolique s'éloignera continuellement de *CX* depuis *N* du côté de *X*, mais seulement de la longueur *eK* qui a une distance infinie du point *C*, ne vaudra que la circonférence *ABYA* du cercle de révolution: de sorte qu'en prolongeant *VC* vers *Q* jusqu'à ce que *CQ* soit égale à cette circonférence, l'on aura *QX* (parallele à *CX*) pour asymptote de cette premiere Spirale hyperbolique. *Les unes s'éloignent continuellement de leur axe CX, sans cependant s'en éloigner que d'une distance finie.*

D'autres s'en éloignent d'une distance infinie.

2°. Si $m < 1$, l'Analogie précédente $c^m . t^m :: dx^{1-m} . c^{1-m}$. donnera c^m nulle par rapport à t^m; & par conséquent t (eK) alors infinie. D'où l'on voit que toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, dont l'exposant (m) est moindre que l'unité, s'éloignent aussi continuellement de la droite *CX* depuis *N* du côté de *X*, même jusqu'à devenir infiniment éloignées de cette droite *CX*; au lieu que la précédente (*n.* 1.) où cet exposant m) étoit $= 1$, ne s'en éloigne jamais plus que de la longueur de la circonférence de son cercle de révolution *ABYA*.

D'autres au contraire s'en approchent continuellement depuis un certain point, comme d'une asymptote qu'elles ne rencontrent qu'à une distance infinie.

3°. Enfin lorsque $m > 1$, l'Analogie précédente donnant $c^m . t^m :: dx^{1-m} . c^{1-m} :: \frac{1}{dx^{m-1}} . \frac{1}{c^{m-1}} :: c^{m-1} . dx^{m-1}$. L'on aura pour lors t^m nulle par rapport à c^m, c'est-à-dire, t (eK) $= 0$. D'où l'on voit que toutes les autres Spirales hyperboliques comprises dans ce dernier cas, s'approchent à l'infini de *CX* depuis *N* du côté de *X*, laquelle *CX* en devient pour cet effet l'asymptote.

Points d'inflexion de ces dernieres Spirales hyperboliques.

XXXIV. Si au lieu d'infiniment éloignés qu'on vient d'imaginer entr'eux les points *e*, *E*, on les imagine à présent infiniment près l'un de l'autre, en sorte que l'arc de cercle *FE* (compris entre les rayons *Ce*, *CE*) soit infiniment petit; si de plus on fait $FE = dv$ constant, & le reste comme ci-dessus, la maniere ordinaire (*Anal. des Infin. petits, art.* 66.) de trouver les points d'inflexion ou de rebroussement, donneroit ici $dv^2 + dy^2 - yddy$ égal à zero ou à l'infini pour la formule générale qui les donne dans les Courbes dont les ordonnées *CE*, *Ce*, &c. concourent toutes dans un même point *C*: de sorte que si l'on y substitue les valeurs de dv, dy, ddy, selon la nature de la Courbe en question, cette formule générale deviendra celle de cette Courbe en particulier, & en déterminera le point d'inflexion ou de rebroussement, si elle en a, ou fera voir qu'elle n'en a point du tout.

Or suivant les noms donnés dans l'art. 2. l'on aura ici $\frac{ydx}{a} = dv$; & l'équation générale de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales étant (*art.* 30.)

$xy^m = ca^m$, l'on aura auſſi $y^m dx - mxy^{m-1} dy = 0$, ou $dx = \frac{mxy^{m-1} dy}{y^m} = \frac{mx\,dy}{y}$; & par conſéquent $\frac{ydx}{a}$ (dv) $= \frac{mx\,dy}{a}$; ce qui donne $dy = \frac{adv}{mx}$; & delà $-ddy = -\frac{adxdv}{mxx}$, en différenciant dy négativement, à cauſe que la ſuppoſition de dv (EF) conſtante, fait augmenter les x pendant que les dy diminuent. Donc en ſubſtituant ces valeurs de dv, dy, ddy, dans la formule générale $dv^2 + dy^2$ $- yddy$, elle ſe changera en $\frac{yydx^2}{aa} + dy^2 - \frac{aydxdv}{mxx} = \frac{yydx^2}{aa}$ $+ dy^2 - \frac{yydx^2}{mxx}$ (à cauſe de $dx = \frac{mxdy}{y}$) $= \frac{mmxxdy^2}{aa} + dy^2 - mdy^2$ $= \frac{mmxx + aa - maa}{aa} \times dy^2$ pour toutes les Spirales hyperboliques aſymptotiques cocentrales en particulier: laquelle formule $\frac{mmxx + aa - maa}{aa} \times dy^2$ égalée à zero, donnera $mmxx$ $+ aa - maa = 0$; d'où réſulte $x = \frac{a}{m}\sqrt{m-1}$ au point d'inflexion de ces ſortes de Spiralés.

Il ſuit delà que de toutes ces Spirales hyperboliques il n'y a que celles qui ont $m > 1$, leſquelles aient un point d'inflexion, cette valeur de x devenant zero ou imaginaire dans toutes celles qui ont $m = 1$, ou $m < 1$. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 33. où l'on voit (*n.* 3.) que les Spirales du premier de ces trois cas-ci, ſont les ſeules qui depuis N s'approchent de CX du côté de X, les autres s'en éloignant toujours, quoiqu'à diſtances différentes.

Voilà (art. 30. 31. 32. 33. & 34.) *pour ce qui concerne la forme générale, les déroulemens, & les longueurs de ces Spirales hyperboliques. Voici préſentement leurs Touchantes, & les Eſpaces entiers & par couches répondantes à tel nombre de révolutions, & à telle révolution particuliere qu'on voudra.*

XXXV. On a trouvé ci-deſſus (*art.* 14.) que la ſoutangente générale des Spirales paraboliques vertico-centrales étoit $\frac{mxy}{a}$: il n'y a qu'à y faire m négative, & la ſou- *Expreſſion générale des ſoutangentes des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.*

tangente des Spirales hyperboliques asymptotiques co-centrales se trouvera $= -\frac{mxy}{a}$. Ce qui fait voir en général qu'on doit prendre ici la même soutangente que pour les Spirales paraboliques vertico-centrales, mais en sens contraire.

On voit aussi delà & de l'équation générale $xy^m = ca^m$ (*art.* 30.) des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, que dans celle qui a $m = 1$, toutes les soutangentes sont égales chacune à la circonférence (c) du cercle de révolution $ABYA$; & par conséquent toutes égales entr'elles, & à celle de la ligne logarithmique en laquelle on a vû (*art.* 31. *n.* 3.) que cette Spirale hyperbolique se déroule; que dans toutes les autres Spirales hyperboliques asymptotiques co-centrales, les soutangentes croissent avec les y (CE) lorsque $m < 1$; & qu'au contraire elles diminuent à mesure que les y croissent, lorsque $m > 1$: parce que l'équation générale $xy^m = ca^m$ de ces Spirales, donnant $x = \frac{ca^m}{y^m}$, leur soutangente générale $\left(-\frac{mxy}{a}\right)$ doit aussi être $= -\frac{mca^{m-1}}{y^{m-1}}$. Tout cela revient à ce qui vient d'être dit de leurs déroulemens dans l'art. 31.

Autre expression générale des mêmes soutangentes.

XXXVI. En faisant encore m négative dans l'art. 15. on trouvera de même $-mcn^{\frac{1-m}{-m}}$, ou $-mcn^{\frac{m-1}{m}}$ pour l'expression générale de toutes ces soutangentes hyperboliques à la fin de telle révolution complete ou incomplete qu'on voudra exprimer par le nombre n entier ou rompu. D'où l'on voit que toutes ces soutangentes sont entr'elles comme les $-mn^{\frac{m-1}{m}}$ qui les expriment, quelque variété que les différentes valeurs de m puissent apporter entre les Spirales auxquelles elles appartiennent; & que dans la même de ces Spirales, quelle qu'elle soit, ces soutangentes sont toujours comme les $-n^{\frac{m-1}{m}}$ correspondans : c'est-

à-dire, comme $mn^{\frac{m-1}{m}}$ dans le premier cas, & comme $n^{\frac{m-1}{m}}$ dans le second, en prenant de part & d'autre ces soutangentes négatives de positives qu'elles étoient dans l'art. 15. qui donne tout ceci.

Ainsi dans la Spirale engendrée comme ci-dessus par l'hyperbole asymptotique ordinaire, qui donne $m=1$, toutes ces soutangentes seront comme $n^{\frac{1-1}{1}}=n^0=1$, c'est-à-dire, égales entr'elles, conformément à ce qu'on en a déja vû dans l'art. 35. quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que n puisse signifier.

Si l'on suppose $m=2$, les soutangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront entr'elles comme $n^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{n}$, c'est-à-dire, comme les racines quarrées des nombres (n) des révolutions completes ou incompletes qui leur répondent. De sorte que toutes celles de ces soutangentes dont les points d'attouchement correspondans se trouvent à la fin des révolutions completes de cette Spirale, seront entr'elles comme $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, &c. c'est-à-dire, comme les racines quarrées des nombres naturels, selon que le nombre entier n de ces révolutions completes sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Si $m=\frac{1}{2}$, les soutangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront comme $n^{\frac{1-2}{1}}=n^{-1}=\frac{1}{n}$, c'est-à-dire, l'une à l'autre en raison réciproque des nombres (n) des révolutions completes ou incompletes qui leur répondent. Et ainsi de pareilles soutangentes de toutes les autres spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, qui doivent résulter de toutes les autres valeurs qu'on peut donner à m.

On trouvera de même le rapport de ces soutangentes de Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales de tous les genres, aux circonférences des cercles circonscrits, c'est-à-dire, des cercles qui (concentriques à ces Spirales) passent par leurs points d'attouchement correspondans, ou à la circonférence seule du cercle ABYA *de la premiere révolution, en faisant* m *négative*

dans les art. 16. 17. 18. Car alors le rapport des soutangentes des Spirales paraboliques vertico-centrales, à de pareilles circonférences circulaires, se changera en celui-là : ainsi en voilà assez pour ce qui regarde les Tangentes de ces Spirales. Passons donc à leurs Espaces, pour en dire aussi quelque chose : l'article suivant suffira.

Expression générale de ces espaces compris dans les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.

FIG. IV.

XXXVII. On a trouvé ci-dessus en général (*art.* 19. & 22.) que tout ce qu'il y a de couches d'espace Spiral parabolique vertico-central dans *COEC* (*Fig.* 4.) est $=\frac{mcy^{m+2}}{2m+4\times a^{m+1}}$. Donc en faisant encore ici *m* négative, l'on y aura de même $\frac{-mcy^{2-m}}{-2m+4\times a^{1-m}}$ ou $\frac{mcy^{2-m}}{2m-4\times a^{1-m}}$ pour

FIG. V.

l'expression ou la valeur de tout ce qu'il y a ici (*Fig.* 5.) de semblables couches d'espace Spiral hyperbolique asymptotique cocentral dans *COEC*, si $m<2$; ou dans *XCEX*, c'est-à-dire, dans tout le reste de cet espace Spiral depuis *CE* jusqu'à son origine, si $m>2$. Ainsi quoique (*art.* 30. *n.* 1. & 3.) cette origine soit à une distance infinie du côté de *X*, & que du côté du centre *C* ces Spirales fassent une infinité de révolutions avant que d'arriver en ce point *C*, ces espaces ne laissent pas d'être finis, le premier dans la Spirale qui a $m<2$, & le second dans celle qui a $m>2$; ils ont seulement leurs complémens infinis, chacun dans la sienne : il n'y a que le cas de $m=2$ qui rende l'un & l'autre de ces espaces infini dans une même Spirale hyperbolique asymptotique cocentrale.

Les différentes couches de ces espaces Spiraux hyperboliques, & leurs rapports aux cercles circonscrits, ou au seul cercle ABYA *de la premiere révolution, se trouveront & se détailleront comme l'on a fait* (art. 23. 24. 25. 26. 27. 28. & 29.) *pour les espaces Spiraux paraboliques de l'exemple premier, en y rendant seulement* m *négative : ce seul changement transformant tout ce qu'il y a de parabolique dans cet exemple-là, en l'hyperbolique de celui-ci; ce que les huit derniers articles précédens font assez voir. Ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage, non plus qu'à plusieurs autres propriétés de ces Spirales hyperboliques, le Pere*

Nicolas, Jesuite, les ayant suffisamment détaillées dans le Traité qu'il en donna en 1696.

EXEMPLE III.

XXXVIII. Soit encore la Courbe génératrice *HHV* une Parabole quelconque, dont le sommet soit *A*, son axe *AX*, & son équation $\overline{a \mp y}^m = zp^{m-1}$ (savoir $\overline{a-y}^m$ depuis *A* jusqu'en *C*, ou *y* (*GC*) devient $=o$; & après cela $\overline{a+y}^m$, à cause qu'alors *y* (*GC*) se trouve négatif) ou $z = \frac{\overline{a \mp y}^m}{p^{m-1}}$. Ainsi l'équation générale des Spirales (*art. 3.*) donnant aussi $z = \frac{bx}{c}$, l'on aura $\frac{\overline{a \mp y}^m}{p^{m-1}} = \frac{bx}{c}$, ou $\overline{a \mp y}^m = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ pour l'équation de la Spirale *AEZCORQ* résultante de la position précédente de la Parabole générale qu'on lui vient de donner pour génératrice. *Autres Spirales paraboliques générales appellées ici co-verticales pour les distinguer de celles de l'exemple 1. art. 13. &c.* FIG. VI.

Il est visible que cette Spirale est la même que si elle eût été formée par les extrémités *E* des ordonnées *BE* ($a \mp y$) d'une Parabole quelconque, qui auroit son parametre $= \frac{bp^{m-1}}{c}$, son sommet en *A*; & dont l'axe de ces ordonnées auroit été roulé en cercle, ou plutôt (à cause des différens retours) autour d'un cercle *ABYAMB*, &c. au centre duquel elles tendroient toutes. De sorte que la Spirale parabolique que M. Bernoulli, Professeur à Bâle, a formée dans les Actes de Leipsik de 1691. p. 14. en roulant ainsi la Parabole d'Apollonius, n'est qu'un cas particulier de cette générale-ci.

Je laisserois volontiers à toutes ces nouvelles Spirales paraboliques le nom de Paraboles hélicoïdes *que M. Bernoulli a donné à la sienne pour la distinguer de celles de l'exemple premier. Mais parce que l'on en peut trouver encore plusieurs autres lesquelles auroient aussi des Paraboles pour génératrices, & des contours tout-à-fait différens selon les différentes situations qu'on peut donner à ces Paraboles par rapport à l'axe* AX *qui passe*

par le centre C *du cercle de révolution* ABYA; *nous appellerons ces Spirales* paraboliques co-verticales, *en prenant* A *pour le ſommet du cercle de révolution* ABYA, *où leurs Paraboles génératrices ont auſſi* (hyp.) *le leur.*

Expreſſion générale des ſoutangentes de ces Spirales paraboliques co-verticales.

XXXIX. L'équation générale $\overline{a \mp y}^m = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ de ces Spirales paraboliques co-verticales, donnant $dx = \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{bp^{m-1}}$ tout poſitif, à cauſe que leurs x & leurs y croiſſent alternativement depuis A juſqu'en C, & qu'après cela elles croiſſent enſemble; l'on aura leurs ſoutangentes $= \frac{mcyy \times \overline{a \mp y}^{m-1}}{abp^{m-1}} = \frac{mxyy}{aa \mp ay}$: ſavoir $\frac{mxyy}{aa - ay}$ depuis A juſqu'en C, & $\frac{mxyy}{aa + ay}$ dans tout le reſte.

Autre expreſſion générale des mêmes ſoutangentes.

XL. Mais pour réduire toutes ces ſoutangentes à une même formule, ſoit l'arc de révolution $x = nc$, quelque portion ou quantité de la circonférence (c) du cercle de révolution $ABYA$ que le nombre n (entier ou rompu) puiſſe ſignifier; l'art 8. donnant alors $nb = z$ (*art.* 38.) $= \frac{\overline{a \mp y}^m}{p^{m-1}}$, l'on aura $a \mp y = \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$; d'où réſulte $\mp y = -a + \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$, & delà $yy = aa + \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}} - 2a \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de x, $a \mp y$, yy, dans la précédente formule $\frac{mxyy}{aa \mp ay}$ des ſoutangentes dont il s'agit ici, l'on aura auſſi de cette maniere $\frac{mncaa + mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}} - 2mnca \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{a \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}$ pour l'expreſſion générale de ces mêmes ſoutangentes, par rapport

à quelque point d'attouchement que ce ſoit, c'eſt-à-dire, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que le nombre n (entier ou rompu) puiſſe ſignifier, depuis A juſqu'à ce point d'attouchement des Spirales paraboliques coverticales dont il eſt ici queſtion, & quel que ſoit auſſi le degré m de ces mêmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Ainſi, par exemple, dans celle de ces Spirales que M. Bernoulli appelle *Parabole hélicoïde*, laquelle donne $m=2$, ces ſoutangentes ſeront $= \frac{2ncaa + 2nncbp - 4nca\sqrt{nbp}}{a\sqrt{nbp}}$ à la fin de quelque nombre de révolutions completes ou incompletes, qu'on puiſſe faire ſignifier à n.

De même ſi l'on ſuppoſe $m=1$, comme lorſque la Parabole génératrice HHV dégénere en une ligne droite faiſant un angle de 45 deg. en A avec AX, les ſoutangentes de la Spirale qui en réſultera, ſeront $= \frac{ncaa + n^3cbb - 2nncab}{nab}$ $= \frac{caa + nncbb - 2ncab}{ab}$, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes qu'on puiſſe encore faire ſignifier à n. Et ainſi des autres valeurs de m à l'infini.

On fera le même uſage de ces ſoutangentes qu'on a fait de celles de l'art. 15. *dans les art.* 16, 17, & 18. *Paſſons donc aux eſpaces renfermés dans les Spirales dont il s'agit ici. Mais auparavant il eſt bon d'avertir que dans la ſuite lorſque le ſigne* — *précédera les grandeurs* $\overline{a-y}$, $\overline{a+y}$, $\overline{a\mp y}$, *couvertes chacune d'un trait, il ſignifiera* moins *ces grandeurs entieres; ainſi quoiqu'il dût les changer en* $-a+y$, $-a-y$, $-a\pm y$, *on n'y fera ce changement de ſignes qu'en ceſſant de les regarder chacune comme ſimple, en leur ôtant le trait qui les couvre. C'eſt pour les reconnoître comme racines de celles de leurs puiſſances qui ſe trouveront auſſi dans la ſuite, qu'on ſe contentera d'indiquer ainſi ce changement de ſignes ſans le faire: on le fera dans les applications particulieres.*

XLI. Pour avoir préſentement les eſpaces de ces Spirales paraboliques coverticales, ſoient CP, Cp, ou Cp, *Expreſſion générale des eſpaces compris dans les Spirales parabo-*

liques coverticales.

Cp, deux positions de la Regle mobile de l'art. 1. infiniment proches l'une de l'autre, dont la seconde soit rencontrée en F par l'arc EG, & le reste comme dans cet article 1. Alors on aura $CB\,(a).\ CE\,(y) :: Bb\,(dx).\ EF = \frac{ydx}{a}$. De sorte que le triangle élémentaire ECE ou ECe de l'espace cherché $ACEA$, ou $AEZCORECA$, sera $\frac{yydx}{2a}$ (art. 39.) $= \frac{mcyy \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{2abp^{m-1}}$ (en supposant $s = a \mp y$) $= \frac{mc \times \overline{a - s}^2 \times s^{m-1} ds}{2abp^{m-1}} = \frac{mcaa \times s^{m-1} ds - 2mcas^m ds + mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}}$ $= \frac{mcas^{m-1} ds}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^m ds}{bp^{m-1}} + \frac{mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}}$. Donc en intégrant, l'on aura l'espace cherché $= \frac{cas^m}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^{m+1}}{\overline{m+1} \times bp^{m-1}} + \frac{mcs^{m+2}}{\overline{2m+4} \times abp^{m-1}}$ (à cause de $s = a \mp y$) $= \frac{ca \times \overline{a \mp y}^m}{2bp^{m-1}} - \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times bp^{m-1}} + \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+2}}{\overline{2m+4} \times abp^{m-1}}$ (à cause de l'équation $\overline{a \mp y}^m = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ de ces Spirales) $= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a \mp y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a \mp y}^2}{2ma+4a}$: sçavoir $ACEA = \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a - y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a - y}^2}{2ma+4a}$ depuis A jusqu'au centre C, dans lequel centre y se trouvant $= 0$, ce qu'il y a d'espaces ou de couches d'espace dans $AEZCA$, se trouvera $= \frac{ax}{2} - \frac{max}{m+1} + \frac{max}{2m+4} = \frac{ax}{\overline{m+1} \times \overline{m+2}}$. Après cela, les y devenant négatifs, tout ce qu'il y aura de couches d'espace Spiral depuis A jusqu'à tel point E que l'on voudra par

de-là C dans $AEZCORECA$ &c. se trouvera $= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a+y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a+y}^{2}}{2ma+4a}$.

XLII. On réduira aussi toutes ces quadratures en une même formule, en supposant l'arc $x = nc$, quelque portion ou quantité de la circonférence (c) du cercle de révolution $ABYA$, que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier. *Autre expression générale des mêmes espaces.*

Car alors trouvant $\overline{a+y} = \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$ comme dans l'art. 40. la substitution de ces valeurs de x & de $\overline{a+y}$ dans l'équation de l'espace général $ACEA$ ou $AEZCORECA =$ $\frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a+y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a+y}^{2}}{2ma+4a}$ du précédent article 41. l'on aura aussi en général cet espace $= \frac{nac}{2} - \frac{mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{m+1} + \frac{mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}}}{2ma+4a}$, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, depuis A jusqu'à quelque point E qu'on voudra des Spirales paraboliques coverticales dont il s'agit ici, quel que soit aussi le degré m de ces mèmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Ainsi, par exemple, dans celle de ces Spirales, que M. Bernoulli appelle *Parabole hélicoïde*, laquelle donne $m=2$, l'on aura $\frac{nac}{2} - \frac{2nc}{3}\sqrt{nbp} + \frac{nnbcp}{4a}$ pour ce qu'elle aura d'espace $ACEA$, ou $AEZCORECA$, en une ou en plusieurs couches d'autant de révolutions completes ou incompletes que le nombre n (entier ou rompu) en marquera depuis A jusqu'à quelque point E que ce soit de cette Spirale. Et ainsi des espaces de toute autre Spirale résultante de telle autre valeur qu'on voudra donner à m.

On fera aussi le même usage de ces espaces qu'on a fait de ceux de l'art. 26. dans ce même article & dans les suiv. 27, 28, & 29, pour en avoir telle couche ou telle portion de couche qu'on voudra.

Déroulement des Spirales dont il s'agit ici, avec la maniere d'en trouver encore les espaces.

XLIII. En suivant la méthode dont on s'est servi dans l'art. 20. pour trouver en quelles Courbes se déroulent toutes les Spirales paraboliques dont les Paraboles génératrices ont leur sommet au centre du cercle de révolutions; on trouvera aussi (en se servant ici des mêmes noms que là) que les Spirales dont il s'agit ici, se déroulent toujours en Courbes dont l'équation générale est $v = \frac{c \times \overline{a \mp y}^{m}}{b \cdot p^{m-1}} - \frac{m c \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times a b p^{m-1}}$, en prenant (dis-je) y & v pour les coordonnées perpendiculaires de ces mêmes Courbes.

On verra de plus qu'entre les mêmes ordonnées (y) de part & d'autre, les longueurs de ces Courbes sont par-tout égales à celles des Spirales correspondantes, & leurs espaces doubles de ceux de ces Spirales. Tout cela se trouvera de la même maniére qu'on l'a trouvé dans les art 21 & 22 pour les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier.

FIG. VI. VII. *Il est à remarquer que si l'on faisoit présentement* m *négative, la Parabole génératrice* HHV *de l'art.* 38 *Fig.* 6. *se changeroit* (*Fig.* 7.) *en une hyperbole générale* HHV *entre les asymptotes orthogonales* AX, AV; *& par conséquent dont le centre seroit au point* A *de la circonférence du cercle de révolution* ABYA, *comme la Parabole y avoit son sommet. Les Spirales paraboliques qu'on a vû (art.* 38.) *résulter de cette Parabole, se changeroient de même en hyperboliques; & tout ce qu'on a dit de ces premiéres Spirales dans l'exemple où nous sommes, deviendroit propre à celles-ci, de même qu'on a vû* (Exemple 2.) *ce qui concerne les Spirales paraboliques de l'exemple premier, devenir propre aux hyperboliques de l'exemple second. Ainsi il n'y a rien là qui nous doive arrêter davantage. Nous ne nous arrêterons point non-plus aux rebroussemens que l'une & l'autre Spirale de cet exemple-ci, doit avoir en* C; *ce que nous en avons dit en général dans l'art.* 12. *doit suffire. L'art.* 7. *fait assez voir aussi que les Spirales hyperboliques, qui résulteroient ici de* m *négative, different encore de celles de l'exemple second, en ce que c'est en s'approchant du centre* C *que celles de cet exemple sont*

une infinité de révolutions autour de lui avant que d'y arriver; au lieu que ce seroit en s'écartant seulement d'une distance finie de ce centre que celles qui résulteroient ici de m *négative, feroient une infinité de révolutions autour de lui, après y être arrivées en un nombre qui seroit seulement à l'unité comme l'ordonnée* SC *est au parametre* AD.

EXEMPLE IV.

XLIV. Soit la Courbe génératice *HHV* un demi-cercle quelconque dont le diametre soit *CX*, le centre *F*, & l'équation $z = \sqrt{2ry - yy}$, en supposant $CF = r$, & le reste comme dans l'art. 2. Donc en substituant cette valeur de z dans l'égalité générale $cz = bx$ ou $z = \frac{bx}{c}$ de l'art. 3. l'on aura $\frac{bx}{c} = \sqrt{2ry - yy}$ ou $x = \frac{c}{b}\sqrt{2ry - yy}$ pour celle de la Spirale particuliére *COEZAKLRESX*, laquelle on voit commencer en *C* (on pourroit aussi suivant l'art. 5. la concevoir commencer en *X*), suivre *COEZAK* à mesure que les *GH* augmentent, arriver en *A* (*art* 8.) à la fin de la premiére révolution, en prenant *AD* (b) pour une des ordonnées (z) du cercle générateur; se rebrousser (*art.* 12.) au point *K* où l'arc circulaire $FK = \frac{crr - bcr}{ab}$ (tiré du centre *C* par *F*) la rencontre, ensuite revenir en arriére suivant *KLRESX* à mesure que les *GH* diminuent jusqu'en *X* où elle arrive à la fin de son retour après avoir fait $FL = AF$.

Spirale circulaire appellée ici verticocentriale pour la distinguer de tout ce que les différentes positions de son cercle générateur en pourroit encore produire d'autres.

FIG. VIII.

XLV. De ce que (*art.* 44.) $x = \frac{c}{b}\sqrt{2ry - yy}$ est l'égalité qui exprime la nature de la Spirale dont il s'agit ici, l'on aura $\frac{cryy - cy^3}{ab\sqrt{2ry - yy}}$, ou (à cause de l'équation précédente) $\frac{ccryy - ccy^3}{abbx}$ pour l'expression générale des soûtangentes de cette Spirale.

Tangentes de cette Spirale circulaire.

XLVI. Quant à sa Quadrature, l'élement triangulaire $\frac{yydx}{2a}$ de l'espace spiral *COEC* se trouvant aussi

Sa Quadrature, ou les espaces qu'elle renferme.

$= \frac{cryydy - cy^3dy}{2ab\sqrt{2ry-yy}} = \frac{c}{2ab} \times \frac{\frac{5}{3}ry^4dy - y^5dy}{\sqrt{2ry^5 - y^6}}$ (A) $+ \frac{cr}{3ab} \times dy\sqrt{2ry-yy}$ (B) $- \frac{4cr}{3ab} \times \frac{rydy}{2\sqrt{2ry-yy}}$ (C). Or l'intégrale de A eſt $= \frac{c}{2ab} \times \frac{1}{3}\sqrt{2ry^5 - y^6} = \frac{cyy}{6ab}\sqrt{2ry-yy}$; celle de B eſt $= \frac{cr}{3ab} \times HVCGH = \frac{cr}{3ab} \times \frac{y\sqrt{2ry-yy}}{2} + \frac{cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC$; & celle de C eſt $= \frac{4cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC$. Donc l'eſpace ſpiral $COEC$ eſt $= \frac{cyy}{6ab}\sqrt{2ry-yy} + \frac{cr}{3ab} \times \frac{y\sqrt{2ry-yy}}{2} + \frac{cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC$, $\frac{4cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC = \frac{cyy+cry}{6ab} \times \sqrt{2ry-yy} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHC$, depuis C juſqu'en K où l'accord des x & des y à croître enſemble, ceſſe pour croître alternativement depuis K juſqu'en X. De maniére qu'en faiſant l'ordonnée FN avec la corde CN, l'on aura tout l'eſpace $COEZAKC = \frac{cr^3}{3ab} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC$. Au contraire depuis X juſqu'en K le ſectateur Spiral $CXSEC$ ſera $= \frac{cyy+cry}{6ab}\sqrt{2ry-yy} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNHC + \frac{cr}{ab} \times CVHNHXC = \frac{cyy+cry}{6ab}\sqrt{2ry-yy} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. XCH. De ſorte qu'en K, où y eſt $= r$, & le ſecteur $XCH =$ $=$ ſect. XCN, l'on aura tout l'eſpace $CXSERLKC =$ $= \frac{cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. XCN.

On voit auſſi delà que la différence dont cet eſpace $CXSERLKC$ ſurpaſſe l'autre $COEZAKC$, eſt $= \frac{cr}{ab} \times$ ſect. $XCN + \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC = \frac{cr}{ab} \times CVNXC$ produit de $\frac{cr}{ab}$ par le demi-cercle générateur $CNXC$; & leur ſomme, c'eſt-à-dire, tout l'eſpace $CKAZEOCKLRESXC = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. $XCN - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times$ 2 triang. $CNF = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr^3}{ab} = \frac{5cr^3}{3ab}$.

Les différentes couches d'eſpace, qui ſe trouvent les unes ſur les autres dans tout cela, ſe détailleront comme l'on a fait celles des Spirales paraboliques de l'exemple premier.

XLVII. Il eſt aiſé de voir par l'équation $x = \frac{c}{b}\sqrt{2ry - yy}$ (*art.* 44.) de cette Spirale circulaire vertico-centrale, qu'elle ſe déroule en une Courbe méchanique dont l'équation différentielle eſt $dv = \frac{crydy - cyydy}{ab\sqrt{2ry - yy}}$, en prenant (comme cy-deſſus art. 20.) v pour les abſciſſes de l'axe, & y pour les ordonnées de cette Courbe dont la longueur eſt égale à celle de cette Spirale par parties correſpondantes. *Déroulement de cette Spirale circulaire.*

XLVIII. Pour la conſtruction de cette Courbe méchanique, imaginons-en une autre géométrique $CM(E)m$, dont l'équation ſoit $\frac{cry - ryy}{b\sqrt{2ry - yy}} = s$, ſes abſciſſes $CE = y$ & ſes ordonnées perpendiculaires $EM = s$. Cette équation fait aſſez voir que cette Courbe doit commencer en C en touchant CG parallele à ſes ordonnées, & s'élever enſuite vers M de maniére qu'en prenant $CE = \frac{3r - r\sqrt{5}}{2}$, ſon point M (au bout de l'ordonnée EM) ſoit le plus élevé de tous au-deſſus de ſon axe CX, & la tangente en ce point parallele à cet axe ; qu'à la diſtance CE $(y) = r$ de ſon origine C, cette Courbe doit revenir couper ſon axe CX en (E), & faire là avec lui un angle dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement :: $c.b.$ c'eſt-à-dire, comme la circonférence $AMBY$ du cercle de révolution eſt au parametre AD. Qu'après cela elle doit ſe continuer à l'infini au-deſſous de CX ſans jamais rencontrer ſon ordonnée $X\mu$ diſtante de C de la valeur de $CX = 2r$, laquelle en devient ainſi l'aſymptote. *Conſtruction de ſa Déroulée.* FIG. IX.

Cela poſé, & $(G)(g)$ étant perpendiculaire ſur CX prolongée vers A enſorte que CA ſoit $= a$, ſi l'on fait le rectangle $CADG$ égal à l'eſpace $CEMC$: il eſt encore manifeſte que le point F, dans lequel les perpendiculaires DG & ME ſe rencontreront, ſera un de ceux de la Courbe cherchée ; puiſque l'on aura pour lors $adv = sdy$ (*hyp.*).

$= \frac{crydy - cyydy}{b\sqrt{2ry - yy}}$, c'eſt-à-dire, $dv = \frac{crydy - cyydy}{ab\sqrt{2ry - yy}}$ qu'on vient de voir (*art.* 47.) être l'équation de cette Courbe Donc en faiſant par-tout de même, l'on aura *CF* (*F*) *f* (*f*) *f*φ pour la Courbe qui réſulte du déroulement de la Spirale circulaire dont il s'agit ici, laquelle Courbe doit toucher l'axe *CX* en *C*; avoir un point d'infléxion en *F* ſous le point *M* le plus haut de la Courbe *CM* (*E*) *m*; deſcendre enſuite juſqu'au point (*F*) qu'on trouve répondre auſſi au point)*E*) en faiſant de même le rectangle (*G*) *CA* (*D*) égal à l'eſpace *CM* (*E*) *C*; la tangente en ce point (*F*) ſe trouve parallele à *CX*; delà la Courbe *CF* (*F*) remonte vers φ, à cauſe qu'au-delà du point (*E*) du côté de *X*, l'eſpace (*E*) *em* (*E*) devenant négatif par rapport à *CM* (*E*)*C*, le rectangle *gCAd* correſpondant ne doit valoir que la différence de *CM* (*E*) *C* à (*E*) *em* (*E*); ce qui rehauſſe le point *f* vers l'axe *CX*, ou vers φ: de maniere que lorſque l'eſpace (*E*) (*e*) (*m*) (*E*) eſt $=$ *CM* (*E*) *C*, alors *gd* étant en *CA*, le point (*f*) de cette Courbe doit ſe trouver en (*e*) ſur *CX*; & enſuite monter vers *f* juſqu'en φ où elle doit toucher l'aſymptote μ*X* prolongée à une diſtance *X*φ de l'axe *CX*, laquelle rende l'eſpace fini *CM* (*E*) — μ*m* (*E*) *X*μ $=$ *CA* (*d*) (*g*).

Fig. VIII. IX. Cela étant, il ſuit du déroulement qui a engendré cette Courbe *CF* (*F*) *f* (*f*) *f*φ, qu'en prenant ici (*Fig.* 9.) *CE* égale au petit rayon *CE* de la Fig. 8. l'on aura l'arc *CF* de cette déroulée, valant l'arc *COE* de la Spirale, & l'arc *CF* (*F*) $=$ *COEZAK*; en prenant auſſi *Ce* dans la Fig. 9. égale au grand rayon *CE* de la Fig. 8. l'on aura de même l'arc *CF* (*F*) *f* $=$ *COEZAKLRE*, & *CF* (*F*) *f*φ $=$ *COEZAKLRESX*; par tout de même, en prenant *CE* de la Fig. 9. égale au petit rayon *CE* de la Fig. 8. ou *Ce* de la Fig. 9. égale au grand rayon *CE* de la Fig. 8.

Fig. IX. La Quadrature de cette Courbe *CF* (*F*) *f* (*f*) *f*φ, priſe comme dans la Spirale circulaire du déroulement de laquelle cette Courbe réſulte, ſe trouvant (à la maniére de l'art. 22.) double de celle qu'on vient de trouver (*art.* 46.) pour cette Spirale, on ne s'y arrêtera pas davantage.

EXEMPLE V.

EXEMPLE V.

XLIX. Soit la Courbe génératrice *HHV* une logarithmique dont l'asymptote soit *CV* parallele à *GH*, ses ordonnées *HK* paralleles à *CX*, sa soutangente $KT = h$ constante, & les autres noms comme dans l'art. 2. l'équation de cette logarithmique sera $\frac{hdy}{y} = - dz$ (à cause de l'équation $cz = bx$ des Spirales en général de l'art. 3.) $= - \frac{bdx}{c}$, ou $\frac{dy}{y} = - \frac{bdx}{hc}$: de sorte qu'en prenant les dx constantes, c'est-à-dire, les x (*AMB* ou *ABYAMB*) en progression arithmétique croissante, l'on aura les y (*CE*) en progression géométrique décroissante. Ce qui prouve que la Spirale *OZEAREX* qui en résulte, est une Spirale logarithmique ordinaire, ainsi qu'on l'a déja vu dans l'art. 4.

Spirale logarithmique ordinaire. FIG. X.

On voit aussi que cette Spirale entrera par *A* dans le cercle de révolution *ABYA* à la fin de la premiere, conformément à l'art. 8. en prenant *AD* (b) pour une des ordonnées de la Courbe génératrice *HHV*. Et que suivant l'art. 7. elle fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son centre *C*.

On voit enfin que les ordonnées ou rayons de cette Spirale sont par-tout à ses soutangentes correspondantes :: ab. hc. c'est à-dire, en raison constante ; & par conséquent aussi les angles de cette Spirale avec ses ordonnées sont par-tout les mêmes, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire dans la définition qu'on en donne.

L. Cela étant, on aura dy à l'élément (ds) de cette Spirale :: ab. $\sqrt{aabb + hhcc}$. Ce qui donne cet élément $ds = \frac{dy}{ab}\sqrt{aabb + hhcc}$; & par conséquent $s = \frac{y}{ab}\sqrt{aabb + hhcc}$: c'est-à-dire, que l'arc de cette Spirale logarithmique, compris entre chaque ordonnée y (*CE*) & le centre *C*, est $= \frac{y}{ab}\sqrt{aabb + hhcc}$. D'où l'on voit que tous ces arcs sont finis, quoiqu'ils fassent chacun (*art.* 7.) une infinité de révolutions autour du centre *C*.

Longueur de cette Spirale logarithmique.

Sa Quadrature en l'espace qu'elle renferme.

LI. L'égalité $\frac{dy}{y} = -\frac{bdx}{hc}$ donne auſſi $-\frac{hcydy}{2ab} = \frac{yydx}{2a}$ élément de l'eſpace *COZEC*. Ainſi cet eſpace ſera $= \frac{hcyy}{4ab}$, dont les différentes couches ſe détailleront à l'infini comme l'on a fait celles des eſpaces ſpiraux paraboliques de l'exemple 1. dans l'art. 23. &c. Ces eſpaces ſpiraux logarithmiques $\left(\frac{hcyy}{4ab}\right)$ ſe trouvant ainſi comme les quarrés des ordonnées ou rayons (y), ſeront auſſi (*art.* 49.) en raiſon géométrique pendant que les arcs (x) de révolution ſeront en progreſſion arithmétique.

Cette Spirale logarithmique ſe déroule en un triangle rectiligne rectangle, qui en donne encore la longueur & la quadrature.

LII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique *OZEAREX* comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier exemple dans les art. 20. 21. & 22. on trouvera que cette Spirale logarithmique ſe déroule en un triangle rectiligne rectangle dont la hauteur eſt à la baſe : : *ab*. *hc*. c'eſt-à-dire (*art.* 49.) comme les ordonnées ſont aux ſoûtangentes correſpondantes de cette Spirale logarithmique ; ce qui donne encore ſa longueur & ſon eſpace tels qu'on les vient de trouver dans les art. 50. & 51. Car y (*EC*) étant la hauteur de ce triangle, cette Analogie donnera $\frac{hcy}{ab}$ pour ſa baſe, & par conſéquent $\frac{y}{ab}\sqrt{aabb + hhcc}$ pour ſon hypotenuſe, & $\frac{hcyy}{2ab}$ pour ſon aire. Ainſi les longueurs correſpondantes de quelque Spirale que ce ſoit, & de ſa Déroulée, étant toujours égales entr'elles, & l'eſpace de la Spirale toujours moitié du correſpondant de ſa Déroulée ; la longueur de la Spirale dont il s'agit ici doit être $= \frac{y}{ab}\sqrt{aabb + hhcc}$, & ſon eſpace $= \frac{hcyy}{4ab}$, comme on l'a déja vu dans les art. 50. & 51.

Outre cette Spirale logarithmique connue de tous les Géometres, en voici encore cinq autres pareillement logarithmiques dont perſonne (que je ſache) n'a parlé juſqu'ici.

EXEMPLE VI.

Premiere des nouvelles Spirales logarithmiques.

LIII. La premiere de ces cinq nouvelles Spirales logarithmiques eſt encore formée, comme la précédente, par

le moyen de la logarithmique ordinaire *HHV*, dont la soutangente *GT* soit encore $= h$ mais dont *CX* soit l'asymptote, & $-\frac{hdz}{dy} = z$ son équation différentielle. Il est visible que l'égalité $z = \frac{bx}{c}$ des Spirales en général de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, si l'on substitue ces valeurs de z & de dz dans $-\frac{hdz}{dy} = z$, il en résultera $-\frac{hbdx}{cdy} = \frac{bx}{c}$, ou $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{h}$ pour l'équation de cette nouvelle Spirale logarithmique *COZEAREX*. FIG. XI.

On voit de-là qu'en prenant ici les dy constantes, c'est-à-dire, les y (*CE* ou *CG*) en progression arithmétique décroissante, les x (*AMB* ou *ABYAMB*) en suivront une géométrique croissante; au lieu que dans l'autre Spirale logarithmique (*exemp.* 5.) les x étant en progression arithmétique, c'étoient les y qui en suivoient une géométrique. On a déja vu tout cela dans l'art. 4.

Tangentes de cette nouvelle Spirale.

LIV. Il suit encore de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{h}$ (*art.* 53.) de la Spirale dont il s'agit ici, que les soutangentes de cette seconde Spirale logarithmique, sont par-tout $= -\frac{xyy}{ah}$, c'est-à-dire qu'elles sont toujours aux y (*CE*) correspondantes :: xy. ah.

Cette Spirale commence à une distance infinie de son centre, où elle arrive après un nombre fini de révolutions.

LV. On voit aussi (*art.* 5.) que cette Spirale-ci commence du côté de X à une distance infinie du point C; qu'ensuite (en prenant *AD* pour une ordonnée de *HHV*) elle entrera (*art.* 8.) par A dans le cercle *ABYA* à la fin de la premiere révolution, pendant laquelle l'arc infini *XRA* aura été décrit; & qu'enfin (*art.* 6.) elle arrivera au centre C après un nombre fini de révolutions. Ce qui est tout le contraire de la précédente (*exemp.* 5.) qui commençoit à une distance finie du côté de X, & n'arrivoit au centre C qu'après une infinité de révolutions.

A quelle distance de son axe elle commence.

LVI. Pour voir présentement, comme l'on a fait dans l'art. 33. pour les Spirales hyperboliques de l'exemple second, si c'est en s'éloignant ou en s'approchant de la droi-

te CX, que cette nouvelle Spirale logarithmique (qui coupe VC prolongée en N) va à l'infini depuis N du côté de X ſans la rencontrer ; ſoit encore un de ſes points quelconque e pris ſur ſon arc NX à telle diſtance qu'on voudra de ſon centre C, avec le rayon Ce qui rencontre le cercle de révolution $ABYA$ en b ; ſoient auſſi ſur CX les perpendiculaires $bL = Sx$ (ſinus de l'arc $Ab = x$: S ſignifie *ſinus*), & $ek = t$.

On aura $bL\,(Sx).\ ek\,(t) :: Cb\,(a).\ Ce\,(y)$. Ce qui donne $at = y \times Sx$, ou $adt = y \times dSx - Sx \times dy$, ou bien auſſi $\frac{adt - y \times dSx}{Sx} = -dy$ (à cauſe de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{h}$ de l'art. 53.) $= \frac{hdx}{x}$. Mais parce que l'arc Ab, en devenant nul, rend $x = dx$, & $Sx = dx = dSx$; cette équation ſe changera alors en $\frac{adt - ydx}{dx} = \frac{hdx}{dx} = h$, ou en $adt - ydx = hdx$, d'où réſulte $\frac{dt}{dx} = \frac{h + y}{a}$: de ſorte qu'alors y, & par conſéquent auſſi $h + y$, ſe trouvant infinie par rapport à a, l'on aura de même dt infinie par rapport à dx infiniment petite du premier genre. Par conſéquent cette nouvelle Spirale logarithmique $COZEAREX$ à une diſtance infinie de C du côté de X, doit ſe trouver éloignée de la droite CX du moins d'une diſtance finie. Le cours de l'impreſſion où ceci me vient, ne me permet pas d'en chercher davantage.

Déroulement de cette nouvelle Spirale logarithmique.

LVII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier exemple, dans les art. 20, 21. & 22. en faiſant de ſes ordonnées concourantes (y) les ordonnées paralleles de ſa Déroulée ; & en prenant v pour les abſciſſes de l'axe de cette Déroulée, auquel ces ordonnées ſoient perpendiculaires ; on trouvera $dv = \frac{vydy}{hh - hy}$ pour l'équation de cette même Déroulée, dont la longueur ſera auſſi la même que celle de cette Spirale, & ſon eſpace double de celui de cette même Spirale : le tout pris par rapport à des arcs correſpondans.

Ces longueurs, ces eſpaces entiers & par couches, ſe cher-

cheront comme dans l'exemple premier pour les Spirales paraboliques vertico-centrales. Je finis donc en rapportant ſeulement les conſtructions des quatres nouvelles Spirales qui nous reſtent encore à faire voir: réſervant le ſurplus pour une autre fois.

EXEMPLE VII.

LVIII. Soit $dz = \frac{abdy}{cyy}\sqrt{hh-yy}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. Il eſt viſible que l'égalité générale (*art. 3.*) des Spirales, donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, ſi l'on ſubſtitue cette valeur de dz dans l'égalité précédente, l'on aura $dx = \frac{ady}{yy}\sqrt{hh-yy}$, ou $\frac{ydx}{a} = \frac{dy\sqrt{hh-yy}}{y}$ pour l'équation de la Spirale que la Courbe génératrice propoſée doit engendrer à la maniere de l'art. 1. De ſorte qu'en prenant ds pour l'élément de cette Spirale, l'on aura $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{hhdy^2 - yydy^2}{yy}} = \frac{hdy}{y}$, ou $\frac{ds}{h} = \frac{dy}{y}$. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette Spirale en progreſſion arithmétique, ſes ordonnées correſpondantes (y) ſeront en progreſſion géométrique. Ainſi cette Courbe ſera encore une Spirale logarithmique d'une troiſieme eſpece. *Seconde des nouvelles Spirales logarithmiques.*

Et ſi l'on prend encore y & v pour les coordonnées orthogonales de ſa Déroulée, il eſt viſible auſſi que $dv = \frac{dy}{y}\sqrt{hh-yy}$ ſera l'équation de cette Déroulée, dont la longueur ſera égale à celle de cette Spirale, & ſon eſpace double celui de cette même Spirale: le tout pris par rapport à des arcs correſpondans.

EXEMPLE VIII.

LIX. Soit de même $dz = \frac{abzdy}{\sqrt{aabbhh - ccyyzz}}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ (*article 3.*) des Spirales, donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, l'on aura *Troiſieme des nouvelles Spirales logarithmiques.*

$dx = \frac{abxdy}{\sqrt{aabbhh - bbxxyy}} = \frac{axdy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$; ce qui donne $aahhdx^2 = aaxxdy^2 + xxyydx^2$, ou bien $\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{aady^2 + yydx^2}}{aahh} = \sqrt{\frac{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}{h}} = \frac{ds}{h}$ pour l'équation de la Spirale qui doit résulter de la Courbe génératrice proposée, en prenant encore ds pour l'élément de cette Spirale. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette même Spirale en progression arithmétique, les arcs correspondans (x) de révolution seront en progression géométrique. Ainsi cette Courbe sera encore une Spirale logarithmique d'une quatrieme espece.

Autrement. Puisque $dx = \frac{axdy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$, l'on aura $\frac{ydx}{a} = \frac{xydy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$, & $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{xxyydy^2}{aahh - xxyy}} = \frac{ahdy}{\sqrt{aahh - xxyy}} = \frac{hdx}{x}$, ou $\frac{ds}{h} = \frac{dx}{x}$, comme ci-dessus.

EXEMPLE IX.

Quatrieme des nouvelles Spirales logarithmiques.

LX. Soit présentement $aab^3hdyddy = aabbcdy^2dz - bcchydydz^2 + c^3yydz^3$ l'équation de la Courbe génératrice HHV. L'égalité générale de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, l'on aura $aab^3hdyddy = aab^3dxdy^2 - b^3hydx^2dy + b^3yydx^3$, ou $aahdyddy + hydx^2dy = aadxdy^2 + yydx^3$. Donc $\frac{h}{dx} \times \frac{aadyddy + ydx^2dy}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$; & en intégrant ($dx$ étant constante) $\frac{h}{dx}\sqrt{aady^2 + yydx^2} = \int\sqrt{aady^2 + yydx^2}$, ou (en divisant le tout par a) $\frac{h}{dx}\sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}} = \int\sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}$, c'est-à-dire (en prenant encore ds pour l'élément de la Spirale) $\frac{hds}{dx} = s$, ou $\frac{ds}{s} = \frac{dx}{h}$ qui en sera l'équation. D'où l'on voit que cette Courbe est encore une Spirale logarithmique d'une cinquieme espece dont les arcs (s) seront en progres-

ſion géometrique pendant que les arcs correſpondans (x) de révolution ſeront en progreſſion arithmétique.

EXEMPLE X.

LXI. Soit enfin $aabbdy^3 = cchydydz^2 - ccyydydz^2 + cchyydzddz$ l'équation de la Courbe génératrice HHV. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ de l'article 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, & $ddz = \frac{bddx}{c}$, la ſubſtitution de ces valeurs de dz & ddz dans la précédente équation de la Courbe propoſée, la changera en $aabbdy^3 = bbhydydx^2 - bbyydydx^2 + bbhyydxddx$, ou $aady^3 + yydydx^2 = hydydx^2 + hyydxddx$. Ce qui donne $\frac{dy}{h}\sqrt{aady^2 + yydx^2} = \frac{ydydx^2 + yydxddx}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}}$: de ſorte que ſi l'on integre en prenant dy conſtante, l'on aura $\frac{dy}{h} \times \int \sqrt{aady^2 + yydx^2} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$, ou (en diviſant le tout par a) $\frac{dy}{h} \times \int \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}} = \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}$: c'eſt-à-dire, $\frac{sdy}{h} = ds$ ou $\frac{dy}{h} = \frac{ds}{s}$ pour l'équation de la Spirale cherchée, en prenant encore ds pour ſon élément. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette Spirale en progreſſion géométrique, ſes ordonnées (y) ſeront en progreſſion arithmétique. Ainſi cette Courbe eſt encore une Spirale logarithmique d'une ſixieme eſpece.

Cinquieme des nouvelles Spirales logarithmiques.

LXII. Telle eſt la conſtruction des ſix Spirales logarithmiques promiſes ci-deſſus, leſquelles comprennent toutes les combinaiſons poſſibles de progreſſion arithmétique & géométrique entre leurs arcs (s), ceux de révolutions (x), & leurs ordonnées (y), car,

Les ſix Spirales logarithmiques précédentes ſont tout ce qu'il en peut réſulter des combinaiſons des progreſſions arithmétiques & géométriques de leurs ordonnées, de leurs arcs, & de ceux de révolution.

1°. Si l'on prend les arcs (x) de révolution en progreſſion arithmétique, la Spirale de l'art. 49. aura ſes ordonnées (y), & celle de l'art. 60. ſes arcs (s) en progreſſion géométrique ; & réciproquement.

2°. En prenant les ordonnées ou rayons (y) de la Spi-

rale en progreſſion arithmétique, celle de l'art. 53. aura ſes arcs (x) de révolution, & celle de l'art. 61. ſes propres arcs (s) en progreſſion géométrique; & réciproquement.

3°. Enfin en prenant les arcs (s) de la Spirale en progreſſion arithmétique, celle de l'art. 59. aura ceux (x) de révolution, & celle de l'art. 58. ſes ordonnées (y) en progreſſion géométrique; & réciproquement.

Voilà beaucoup plus d'exemples qu'on ne s'étoit d'abord propoſé, de la formation générale des Spirales de l'art. 1. & de l'uſage qu'on doit faire de leur équation univerſelle trouvée dans l'art. 3. Mais la facilité avec laquelle la conſtruction des ſix précédentes Spirales logarithmiques s'en déduit, m'a paru digne d'être obſervée. Voici préſentement quelques uſages de cette formation générale pour la deſcription des Courbes dont les ordonnées concourent en un même point quelconque de leur plan.

USAGE

De la Formation générale des Spirales de l'art. 1. pour la deſcription des Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit.

Maniere de trouver les génératrices propres à décrire par le moyen de l'art. 1. & comme autant de Spirales, les Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit.

FIG. XII.

LXIII. Une Courbe quelconque OEZ, dont les ordonnées EC, eC, &c. concourent toutes en quelque point C que ce ſoit, étant propoſée à décrire, ſoit cette Courbe imaginée comme une eſpece de Spirale, dont C ſoit le centre ou le pole, $ABYA$ le cercle de révolution décrit de tel rayon AC qu'on voudra, la circonférence duquel ſoit rencontrée en B, b, par deux rayons ou ordonnées CE, Ce, de cette Courbe infiniment proches l'une de l'autre; & tout le reſte comme dans l'article 1. Soient auſſi les noms ici les mêmes que dans l'art. 2. Soient ſeulement de plus l'arc infiniment petit EF décrit du rayon CE, appellé dv, & AG ou BE appellée t; & par conſéquent $a-y=t$, ou $y-a=t$, ſelon que AC (a) eſt plus grand ou moindre que EC (y). Pour éviter cette variété de ſignes,

ſignes, nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite *AC* plus grand que *E C*; ſi le contraire arrive, on ſubſtituera $y-a$ & dy à la place de $a-y$ & $-dy$ dans ce que nous allons dire. Cela poſé,

1°. Si t & x, ou y & x, ſont les variables de l'équation de la Courbe *OEZ* propoſée à décrire; il n'y a qu'à conſidérer que l'équation générale $zc=bx$ de l'art. 3. donne $x=\frac{zc}{b}$, & $dx=\frac{cdz}{b}$: car la ſubſtitution de ces valeurs de x & de dx à la place de ce qui s'en trouve dans l'équation donnée de la Courbe *OEZ*, changera cette même équation en une autre où il n'y aura de variables que t & z, ou y & z, avec leurs différences, ſi elle en a; & qui par conſéquent ſera l'équation de la Courbe génératrice *HHV* requiſe pour décrire la Courbe *OEZ* à la maniere de l'art. 1.

2°. Si dv ſe trouvoit avec une ou pluſieurs des variables précédentes (j'y comprens auſſi leurs différences s'il y en a) dans l'équation donnée de la Courbe *OEZ* propoſée à décrire, il n'y auroit alors qu'à ſubſtituer dans cette équation la valeur de dv qui réſulte de l'analogie $CB\,(a).\,CE\,(y)::Bb\,(dx).\,EF\,(dv)=\frac{ydx}{a}$. Et pour lors n'y reſtant plus de variables que t & x, ou y & x, cette équation ſera dans le cas précédent (*n.* 1.); ainſi il n'y aura plus qu'à en chaſſer x & dx par la ſubſtitution de leurs valeurs $\frac{cz}{b}$, $\frac{cdz}{b}$, réſultantes de l'équation générale $cz=bx$ de l'art. 3. pour avoir celle de la Courbe cherchée *HHV* génératrice de la Courbe *OEZ* qu'on veut décrire.

EXEMPLE I.

LXIV. 1°. Soit $px=tt$ l'équation de la Courbe *OEZ* propoſée à décrire. Cette équation donnera $x=\frac{tt}{p}$. Mais l'équation générale $zc=bx$ de l'art. 3. donne auſſi $x=\frac{zc}{b}$. Donc $\frac{zc}{b}=\frac{tt}{p}$, ou $\frac{cpz}{b}=tt$ ſera l'équation de la

Premier exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'article 1.

Courbe *HHV* génératrice de la Courbe *OEZ* à décrire à la maniere de l'art. 1. Ce qui fait voir que cette génératrice *HHV* doit être ici une Parabole ordinaire touchée en son sommet *A* par la droite *AC*.

Cette Parabole ainsi trouvée, étant décrite, l'article 1. fait voir que si l'on prend l'arc *AMB* à une ordonnée quelconque *HG* de cette Parabole, comme la circonférence entiere *ABYA* (c) est à la droite constante *AD* (b), & qu'après avoir tiré la droite *CB*, on fait (du centre *C*) l'arc circulaire *GE* qui rencontre cette droite *CB* en *E*; ce point *E* sera un de ceux de la Courbe *OEZ* à décrire.

En effet puisque (*constr.*) *AMB* (x). *HG* (z) :: *ABYA* (c). *AD* (b), l'on aura $x = \frac{zc}{b}$. Donc en substituant x au lieu de cette valeur dans l'équation $\frac{cpz}{b} = tt$ de la Parabole génératrice *HHV*, il en résultera $px = tt$ pour l'équation de la Courbe *OEZ* ainsi décrite par le moyen de cette Parabole génératrice *HHV*. Par conséquent cette équation $px = tt$ étant la même que celle de la Courbe proposée à décrire, il s'ensuit que cette Courbe est aussi celle qui vient d'être décrite.

2°. Si au lieu de $px = tt$, on eût donné $px = \overline{a - y}^2$ pour l'équation de cette même Courbe *OEZ*; l'on auroit eu $pdx = \overline{2a - 2y} \times -dy = 2ydy - 2ady$, ou $dy = \frac{2ydy - 2ady}{p}$ (à cause de $a - y = t$, ou $y - a = -t$, & $dy = -dt$) $\frac{-2t \times -dt}{p} = \frac{2tdt}{p}$. Mais l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donne aussi $dx = \frac{cdz}{b}$. Donc $\frac{cdz}{b} = \frac{2tdt}{p}$, ou (en intégrant) $\frac{pcz}{b} = tt$ sera l'équation de la Courbe *HHV*, laquelle par conséquent sera encore la génératrice de *OEZ* à la maniere de l'art. 1.

Il est à remarquer que cette Courbe OEZ *est encore la Parabole hélicoïde de M. Bernoulli, Professeur à Bâle, dont nous avons parlé ci-dessus art.* 38.

EXEMPLE II.

LXV. Soit de même $dx = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$ l'équation de la Courbe OEZ proposée à décrire. L'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant aussi $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura tout d'un coup $\frac{cdz}{b} = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$, ou $dz = \frac{abdt\sqrt{et-ee}}{ace-cet}$ pour l'équation de la Courbe HHV génératrice de OEZ à la maniere de l'art. 1.

Second exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'article 1.

On décrira présentement cette Courbe comme l'on vient de faire celle du précédent exemple 1. art. 64.

Il est aussi à remarquer que cette Courbe OEZ est la Paracentrique elle-même, qu'on a démontrée dans les Mémoires de 1703. pag. 146. &c. avoir son origine entre A & C sur AC, & devoir faire une infinité de révolutions autour du centre C avant que d'y arriver : il n'y a de différence entre l'équation qu'on en donne ici, & celle qui s'en trouve dans la pag. 146. de ces Mémoires, qu'en ce qu'on appelle ici x, y, t, a, e, c, b, z, ce qu'on appelle là z, y, x, xc, a, e, g, k. La substitution de ces dernieres grandeurs à la place des premieres qui leur répondent, dans l'équation de la Courbe génératrice HHV qu'on vient de trouver, la rendroit aussi la même que celle de la génératrice de la seconde description qui se trouve de la précédente Paracentrique dans la pag. 149. des Mémoires dont on vient de parler.

EXEMPLE III.

LXVI. Soit aussi $dv = \frac{\overline{a-t} \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$ l'équation d'une Courbe OEZ proposée à décrire. Il suffit de considérer que $CB\ (a).\ CE\ (y) :: Bb\ (dx).\ EF\ (dv) = \frac{ydx}{a}$, & que l'égalité générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura $dv = \frac{ycdz}{ab}$ (*art.* 63.) $= \frac{\overline{a-t} \times cdz}{ab}$. Car la substitution de cette derniere valeur de dv dans l'égalité proposée, la changera

Troisième exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'article 1.

en $\frac{\overline{a-t}\times cdz}{ab} = \frac{\overline{a-t}\times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, ou en $dz = \frac{abdt}{c\sqrt{2at+2pt-tt}}$, qui ſera celle de la génératrice *HHV* propre à décrire à la maniere de l'art. 1. la Courbe *OEZ* propoſée : cette deſcription ſe fera encore comme celle de l'exemple 1. art. 64.

A V I S.

La méthode de l'art. 1. pour la deſcription des Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit, eſt générale ; mais elle n'eſt pas toujours la plus ſimple ni la plus facile.

FIG. XIII.

LXVII. Quelque facile que paroiſſe la méthode de l'art. 1. pour la conſtruction des Courbes dont les ordonnées concourent en un même point, il faut cependant avouer qu'il y a des cas où il s'en trouve de beaucoup plus faciles : par exemple, en voici une pour conſtruire la Courbe *OEZ* du dernier exemple 3. beaucoup plus ſimple & plus facile que celle du précédent art. 66.

En effet l'équation $dv = \frac{\overline{a-t}\times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$ de cette Courbe *OEZ*, donnant $\frac{adv}{a-t}(Bb) = \frac{adt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, il eſt viſible que l'on aura auſſi $Bb = \frac{a}{a+p} \times \frac{\overline{a+p}\times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Or ſi l'on prend $CR=p$; que du centre *R*, & du rayon *AR* $(a+p)$, on décrive le demi-cercle *AVK*, avec une de ſes ordonnées quelconque *GL* ; & que de l'extrémité *l* de ſon élément *Ll* on ſuppoſe *lN* parallele à *AK*, laquelle rencontre *GL* prolongée en *N* : l'on aura *GL* $(\sqrt{2at+2pt-tt})$. *LR* $(a+p)$ :: *Nl* (dt). $lL = \frac{\overline{a+p}\times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Donc $Bb = \frac{a\times lL}{a+p} = \frac{AC\times Ll}{AR}$; & (en intégrant) $AB = \frac{AC\times AL}{AR}$. Ce qui donne enfin *AL*. *AB* :: *AR*. *AC*. c'eſt-à-dire, les ſecteurs correſpondans *ARL* & *ACB* par-tout ſemblables entr'eux. D'où l'on voit qu'en prenant deux angles quelconques *ARL* & *ACB* égaux entr'eux, ſi après avoir fait l'ordonnée *LG*, on décrit du centre *C* par *G* l'arc *GE* qui rencontre le rayon *CB* en *E* ; ce point *E* ſera un de ceux de la Courbe à décrire *OEZ*, dont on voit que le contour doit être *AOEZCDK* en forme de B. *Ce qu'il falloit trouver.*

On voit, dis-je, combien cette méthode est plus simple & plus aisée que celle de l'art. 1. employée dans l'art. 66. &c. Mais aussi en récompense celle de l'art. 1. est-elle beaucoup plus universelle, en ce qu'elle peut servir à la construction de toutes les Courbes d'ordonnées concourantes, au lieu que celle du présent art. 67. ne convient qu'à la Courbe de cet article. Je finis par quelques Remarques sur cette méthode générale de l'art. 1. & sur quelques autres qu'elle m'a fait encore imaginer pour la formation de toutes sortes de Spirales à l'infini.

REMARQUES

Sur différentes Formations générales de Spirales à l'infini.

Moyen général de former des Spirales, différent de celui de l'art. 1.

LXVIII. On a vu ci-dessus (*art.* 38.) la maniere dont M. Bernoulli, Professeur à Bâle, a formé sa Parabole hélicoïde dans les Actes de Leipsik de 1691. p. 14. Il est visible qu'on pourroit aussi former autant d'autres Spirales qu'on peut imaginer d'autres Courbes au lieu de sa Parabole, roulées comme elle : c'est-à-dire, dont l'axe fût roulé en tant de révolutions qu'on voudroit sur la circonférence d'un cercle quelconque *ABYA*; ayant ses abscisses en *AMB* (x), dont l'origine est en *A*; & ses ordonnées *BE*, tendantes toutes au centre *C* de ce cercle, ou directement à contre-sens. Il est, dis-je, visible que toutes les Spirales *OEZ* formées par les extrémités *E* de toutes ces ordonnées, seroient aussi différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer de Courbes ainsi roulées. FIG. XIV.

Tout ce qui se peut former de Spirales par ce moyen, se peut aussi former par celui de l'art. 1.

LXIX. Mais toutes ces Spirales se peuvent encore trouver aisément par la méthode de l'art. 1. en imaginant du centre *C* par-tout ces points *E*, autant d'arcs de cercles *EG*, qui rencontrent *AC* prolongée vers *X*, x, en autant de points *G*, desquels soient élevées autant de perpendiculaires *GH* sur cet axe *Xx*, lesquelles soient chacune à une droite constante *AD*, comme l'abscisse correspondante *AMB* ou *nc* + *AMB* de tant de révolutions qu'on vou-

dra, eſt à la circonférence (c) du cercle *ABYA*, ſur laquelle circonférence on ſuppoſe que la génératrice, à la maniere de M. Bernoulli, a ſon axe roulé : car il eſt manifeſte que la Courbe *HHV* qui paſſera par tous les points *H* ainſi trouvés, ſera la génératrice de toutes ces Spirales à la maniere de l'art 1.

Maniere de paſſer des génératrices du précédent art. 68. à celles de l'art. 1. pour la deſcription des mêmes Spirales.

LXX. Il eſt auſſi fort aiſé de trouver l'équation de cette génératrice à la maniere de l'art. 1. par l'équation de l'autre génératrice à la maniere de M. Bernoulli : car ſi outre les noms de l'art. 2. on appelle v, les ordonnées *BE* de cette ſeconde génératrice roulée, dont les abſciſſes ſont (*hyp.*) *AMB* ou $nc + AMB = x$; on trouvera $v = \pm \overline{a \mp y}$. Ainſi l'équation donnée de cette Courbe roulée, donnant v en x & en conſtantes, il en réſultera une troiſieme équation de $\pm \overline{a \mp y}$ avec cette valeur de v, dans laquelle équation il n'y aura plus de variables que des x & des y ; & qui par conſéquent donnera de même x en y & en conſtantes, laquelle valeur de x étant ſubſtituée dans l'égalité générale $cz = bx$ (*art.* 3.) des Spirales engendrées comme dans l'art. 1. la changera en celle de la Courbe *HHV* requiſe pour décrire à la maniere de l'art. 1. la Spirale *OEZ* propoſée.

Exemple. Soit cette Spirale, *la Parabole hélicoïde* de M. Bernoulli, engendrée à ſa maniere par une Parabole ordinaire, laquelle ayant ſon axe roulé ſur la circonférence du cercle *ABYA*, ait ſon ſommet en *A*, *AMB* (x) pour ſes abſciſſes *BE* (v) pour ſes ordonnées tendantes au centre *C* de ce cercle, & ſon parametre $= l$. L'équation de cette Parabole ſera $xl = vv$, ou $v = \sqrt{xl}$. Ainſi ayant déja (*hyp.*) $v = \overline{a \mp y}$, l'on aura auſſi $\overline{a \mp y} = \sqrt{xl}$, ou $xl = \overline{a \mp y}^2$; d'où réſultera de même $x = \frac{\overline{a \mp y}^2}{l}$. Donc ayant d'ailleurs (*art.* 3.) $cz = bx$, & par conſéquent auſſi $x = \frac{cz}{b}$; l'on aura enfin $\frac{cz}{b} = \frac{\overline{a \mp y}^2}{l}$, ou $\frac{czl}{b} = \overline{a \mp y}^2$ pour l'équation de la Courbe *HHV* propre à engendrer à la maniere de l'art. 1. la Parabole hélicoïde de M. Bernoulli:

aussi cette équation est-elle la même que celle qui résulte de l'équation parabolique générale $\overline{a \mp y}^m = zp^{m-1}$ de l'art. 38. qu'on a déja vûe dans ce même article, devoir engendrer cette Spirale à la maniere de l'art. 1. en faisant $m = 2$. En effet cette équation générale de la Courbe *HHV*, se réduit-elle alors à cette particuliere $\overline{a \mp y}^2 = zp$, dont le parametre p doit être ici $= \frac{cl}{b}$ pour avoir à la maniere de l'art. 1. la même Spirale numériquement que M. Bernoulli a trouvée par la sienne. Et ainsi de telle autre Spirale qu'on voudra rapporter de la maniere de M. Bernoulli à celle de l'art. 1.

LXXI. On a vu à la fin de l'art. 3. que cette maniere de l'art. 1. quelque générale qu'elle soit, le peut encore devenir quelquefois davantage en faisant $zc^\pi = bx^\pi$ au lieu de $zc = bx$ dans cet art. 3. En voici quelques exemples. *Comparaison de deux équations de Spirales en général, résultantes de l'art. 1.*

1°. L'équation $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $z = \frac{bx^\pi}{c^\pi}$, si l'on introduit cette valeur de z dans l'équation génératrice circulaire $z = \sqrt{2ry - yy}$ de l'art. 44. l'on aura $\frac{bx^\pi}{c^\pi} = \sqrt{2ry - yy}$, ou $bbx^{2\pi} = 2ryc^{2\pi} = cyy^{2\pi}$ pour l'équation des Spirales circulaires qui en doivent résulter à la maniere de l'art. 1. qui donneroit alors $\overline{ABYA}^\pi$ (c^π). $\overline{AMB}^\pi$ ou $\overline{ABYAMB}^\pi$ (x^π) :: *AD* (b). *GH* (z). De sorte qu'en prenant $\pi = 1$, il en résulteroit $\frac{bx}{c} = \sqrt{2y - yy}$ pour l'équation de la Spirale circulaire particuliere de l'art. 44. comme dans cet art.

2°. De même si l'on prend ici l'équation $\frac{dz}{b} = -\frac{dy}{y}$ de l'art. 49. pour génératrice de la Spirale à trouver par le moyen de l'équation $zc^\pi = bx^\pi$, en s'en servant encore comme l'on a fait de $zc = bx$ dans cet art. 49. Cette équation générale $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $dz = \frac{\pi bx^{\pi-1}dx}{c^\pi}$,

l'on auroit ici $\frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{hc^{\pi}} = -\frac{dy}{y}$ pour l'équation de la Spirale cherchée, au lieu de l'équation $\frac{bdx}{hc} = -\frac{dy}{y}$ à la Spirale logarithmique ordinaire, que $zc = bx$ donnoit là, & qu'on voit n'être encore qu'un cas de celle qu'on vient de trouver ; puiſqu'en faiſant $\pi = 1$, ſon équation $\frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{hc^{\pi}} = -\frac{dy}{y}$ ſe changera en $\frac{bdx}{hc} = -\frac{dy}{y}$ qui eſt celle de cette Spirale logarithmique ordinaire.

Et ainſi de pluſieurs autres Spirales où l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ doit porter une univerſalité beaucoup plus grande que ne feroit $zc = bx$.

Continuation de la comparaiſon précédente.

LXXII. Il eſt pourtant à remarquer que cette équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ ſubſtituée à la place de $zc = bx$, ne produit pas toujours ce ſurcroît d'univerſalité, ainſi qu'on en a averti à la fin de l'art. 3. & qu'on le vient encore d'inſinuer au commencement & à la fin du précédent art. 71. par les mots de *quelquefois* & de *pluſieurs*.

En effet, 1°. ſi l'on prend encore la logarithmique génératrice du ſecond exemple de cet article 71. n. 2. pour génératrice de celui-ci, en y prenant ſeulement ſon aſymptote pour ſon axe, ainſi que dans l'art. 53. au lieu que ci-deſſus (*art.* 71. *n.* 2.) c'étoit une des ordonnées à ſon aſymptote qu'on prenoit pour ſon axe, comme dans l'art. 49. en ce cas l'équation de cette logarithmique génératrice étant $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{h}$ comme dans l'article 53. & l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ donnant $z = \frac{bx^{\pi}}{c^{\pi}}$, & $xz = \frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{c^{\pi}}$: la ſubſtitution de ces valeurs de z & de dz dans l'équation génératrice $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{h}$, donnera $-\frac{dy}{h} = \frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{bx^{\pi}} = \frac{\pi dx}{x}$, ou $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{\pi h}$ pour celle de la Spirale cherchée, laquelle on voit être encore une Spirale logarithmique de même nature que celle que la même génératrice a engendrée dans l'article 53. par le moyen de $zc = bx$. Ainſi

$zc^{\pi} = bx^{\pi}$

$zc^{\pi} = bz^{\pi}$ ne produit rien ici de plus général que $zc = bx$, l'inégalité des constantes h & πh n'y faisant rien.

Pareillement 2°. si l'on prend l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ de l'art. 13. pour la génératrice de la Spirale à trouver par le moyen de l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$; cette équation donnant $z = \frac{bx^{\pi}}{c^{\pi}}$, l'on aura $\frac{y^m}{a^{m-1}} = \frac{bx^{\pi}}{c^{\pi}}$, ou $c^{\pi} y^m = bx^{\pi} a^{m-1}$ pour l'équation de cette Spirale. De sorte qu'en prenant $b = a$, comme dans l'art. 13. l'on aura $c^{\pi} y^m = x^{\pi} a^m$ pour l'équation de cette Spirale, laquelle on voit être celle de M. de Fermat, trouvée dans cet art. 13. par le moyen de $zc = bx$. Ainsi l'universalité de l'équation $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ de l'art. 71. ne fait encore rien ici de plus que la simple $zc = bx$ de l'art. 3.

Je n'entrerai point dans un plus grand détail, ne m'étant déja que trop étendu sur cette matiere. Voici cependant encore une autre maniere de former des Spirales à l'infini, qui me vient en pensée, laquelle est encore plus générale que celle de l'art. 1. Je n'en dirai que deux mots, me réservant à la traiter plus à fond dans une autre occasion.

LXXIII. Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 1. imaginons de plus une Courbe quelconque *LLS* mobile autour du centre *C*, avec la Regle *CP* qui en soit le diametre ou l'axe, & dont les ordonnées soient *EL* qui fassent tel angle donné qu'on voudra avec cette Regle. Présentement après avoir trouvé chaque point *E* comme dans l'art. 1. au lieu d'y faire passer la Spirale cherchée, comme dans cet article, imaginons qu'elle passe par les extrémités *L* des ordonnées correspondantes *EL* de la Courbe *LLS*, que nous appellerons *seconde génératrice*, pour la distinguer de celle (*HHV*) dont nous nous sommes servis jusqu'ici, laquelle pour cette effet s'appellera *premiere génératrice*. *Troisieme formation générale des Spirales à l'infini.* FIG. XV.

Il est visible que la Spirale *OLZLK*, qui en résultera, sera aussi très-universelle, & ce d'autant plus que sa seconde

génératrice générale *LLS* se peut diversifier en autant de particulieres que sa premiere *HHV*, & avoir sur la Regle *CP* des positions aussi variables par rapport au centre *C*, que celles de *HHV* le sont sur *CX* par rapport à ce même point *C*.

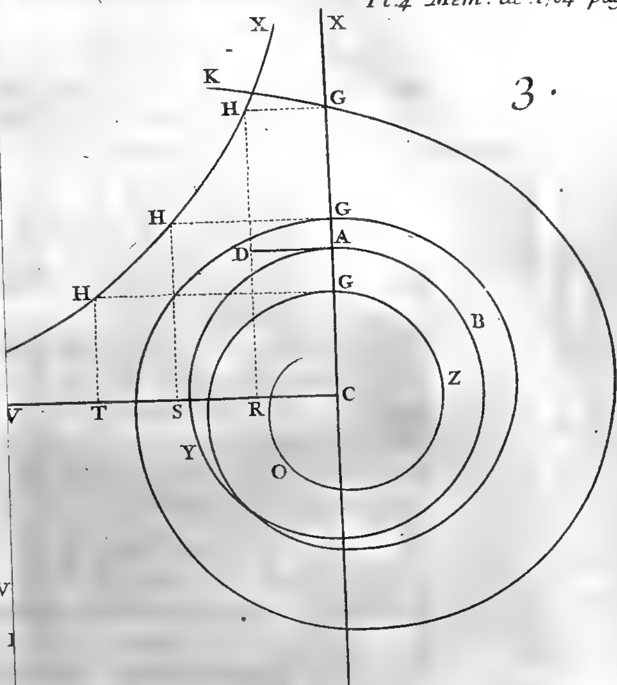
Maniere de trouver les équations des Spirales formées de cette troisieme façon.

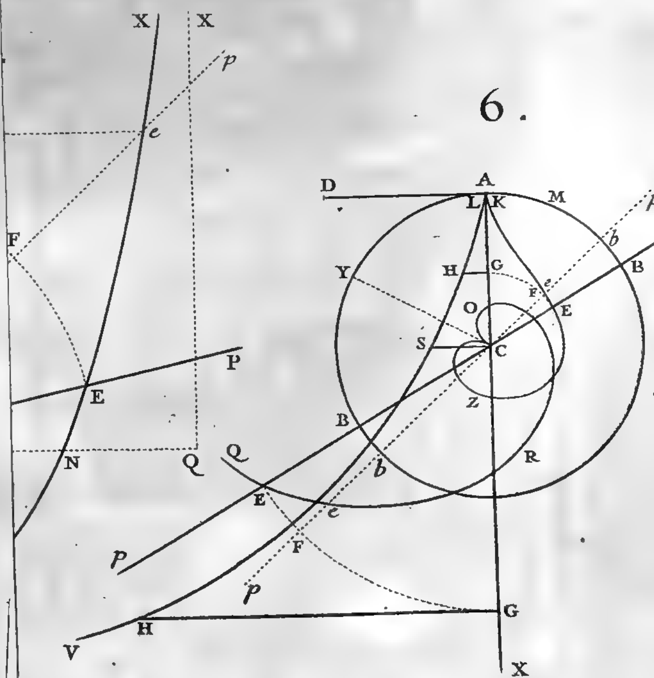
LXXIV. Les noms demeurant aussi les mêmes que dans l'art. 2. soient de plus les ordonnées $EL = v$. Il est encore manifeste que l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. où celle $zc^n = bx^n$ de l'art. 71. doit entrer dans celle de la Spirale *OLZLK* dont il s'agit ici; puisque cette équation sert à trouver les points *E*.

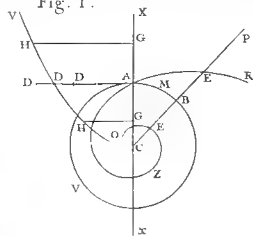
1° Il en faut chasser z par la substitution de sa valeur en y & en constantes, laquelle valeur de z se tirera de l'équation donnée de la premiere Courbe génératrice *HHV*, comme l'on a fait-ci-dessus pour trouver les équations particulieres des Spirales qu'on y a examinées. Ce qui donnera l'équation de celles qui passeroient par *E* à la maniere de l'art. 1. laquelle équation ne sera faite que de x, de y, & de constantes.

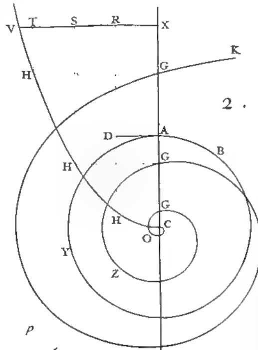
2°. Après cela l'équation donnée de la seconde génératrice *LLS*, donnant aussi y en v & en constantes, la substitution de cette valeur de y dans la derniere équation trouvée (*n.* 1.) pour celle des Spirales qui passeroient par *E*, se changera enfin en celle des Spirales qui doivent passer par *L*. *Ce qu'il falloit trouver.*

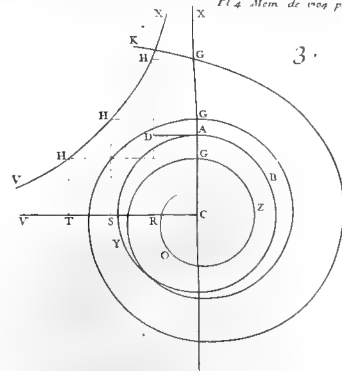
Exemple. Soit encore $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ le lieu parabolique général de la premiere Courbe génératrice *HHV*, comme dans l'art. 13. & le circulaire $y = r \pm \sqrt{rr - vv}$ pour celui de la seconde *LLS*. La substitution de cette valeur de z dans l'équation $zc = bx$ de l'art. 3. la changera en $\frac{cy^m}{a^{m-1}} = bx$ qui est celle de la Spirale de l'art. 13. de laquelle résulte $y = \frac{\overline{bxa^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}}$, que la substitution de la valeur de y, donnée par l'équation de la seconde Courbe génératrice *LLS*,

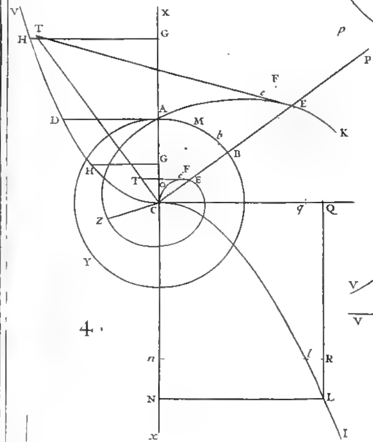

3.
X
X
K
G
H
H
G
A
D
G
H
B
Z
C
V
T
S
R
Y
O
V

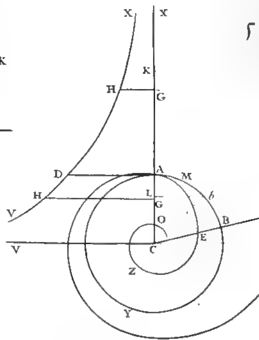

X
X
p
6.
e
D
A
L
K
M
b
F
Y
H
G
B
F
e
O
E
S
C
P
E
Z
B
N
Q
Q
R
b
E
e
F
p
p
p
G
H
V
X

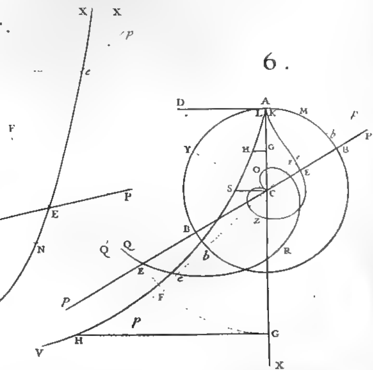

Fig. 1re
V
X
H
G
P
D
D
D
A
M
E
R
B
G
H
O
E
C
Z
V
x

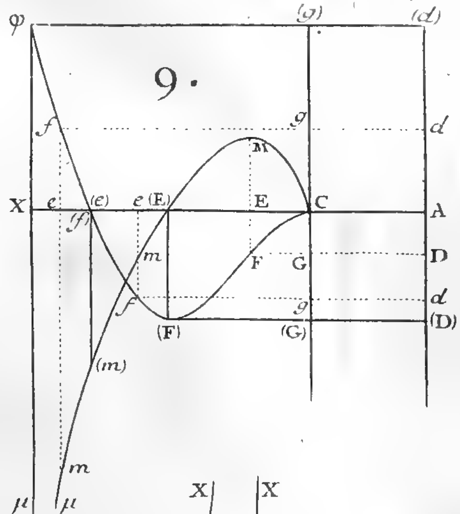

V
T
S
R
X
K
H
G
2
D
A
B
G
H
G
H
C
O
Y
Z

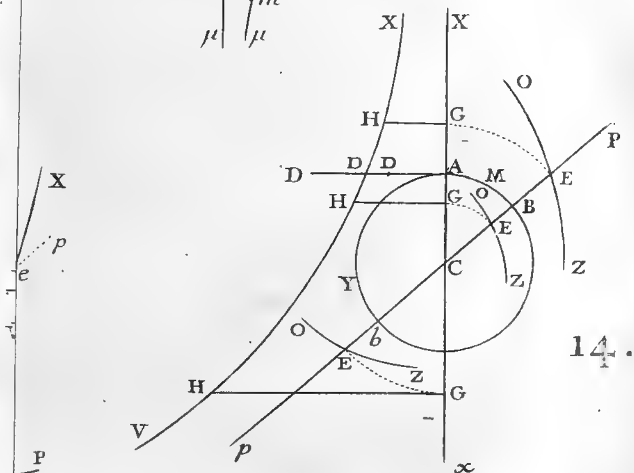

X
X
K
H
G
3
H
G
A
D
G
H
B
V
Z
V
T
S
R
C
Y
O

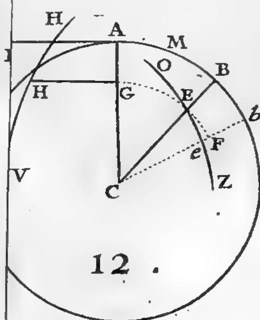

V
X
T
G
H
p
P
F
e
E
K
D
A
M
b
B
G
H
F
T
e
E
G
C
q
Q
Z
Y
4
n
l
R
N
L
x
I

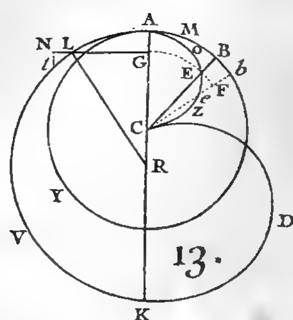

X
X
5
X
X
p
e
K
H
G
F
D
A
M
b
H
L
G
B
E
P
O
V
E
C
N
Z
Y

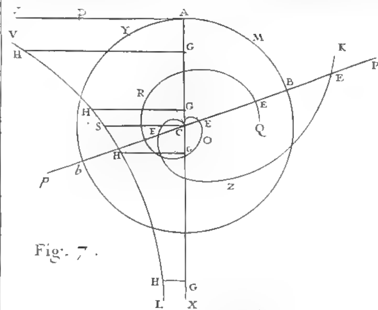

6
D
A
L
K
M
F
b
P
Y
H
G
B
O
F
E
S
C
Z
B
Q
Q
R
b
E
e
F
P
P
H
G
V
X

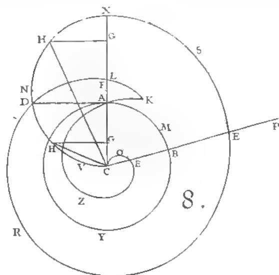

9.
φ
(g)
(d)
f
g
d
M
X
e
(e)
e (E)
E
C
A
(f)
m
F
G
D
f
g
d
(F)
(G)
(D)
(m)
m
μ
μ

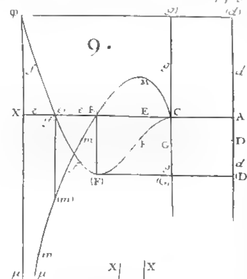

X
X
O
H
G
P
D
D D
A
M
E
H
G
O
B
E
Y
C
Z
Z
14.
O
b
E
Z
H
G
V
p
x

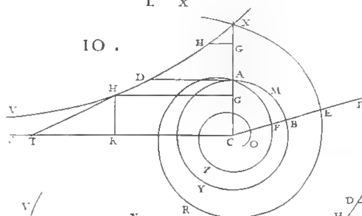

H
A
M
O
B
H
G
E
b
F
e
V
C
Z
12.

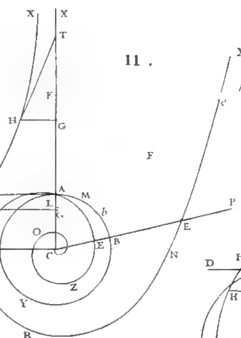

A
M
N
L
o
B
G
b
E
F
e
Z
C
R
Y
D
V
13.
K

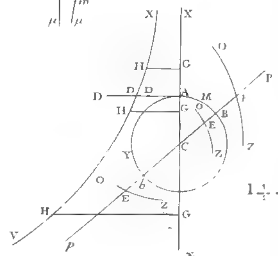

Fig. 7.

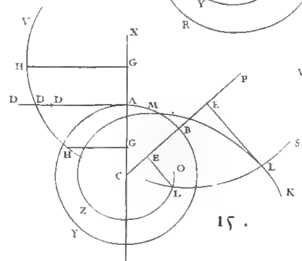

8.

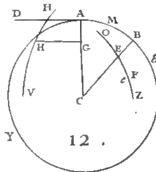

9.

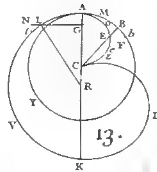

10.


11.


14.


15.


12.


13.

changera en $r \pm \sqrt{rr - vv} = \frac{\overline{bxa^{m}-1}^{\frac{1}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}}$, ou $rc^{\frac{1}{m}} + c^{\frac{1}{m}}\sqrt{rr - vv}$, qui eſt l'équation cherchée de la Spirale *OLZLK*. Et ainſi des autres.

J'aurois encore bien des choſes à dire ſur cette derniere génération de Spirales : ce ſera pour un autre Mémoire, celui-ci n'étant déja que trop long.

OBSERVATION D'UNE NOUVELLE TACHE DANS LE SOLEIL.

PAR M. MARALDI.

OUtre les trois différentes Taches qui ont paru au mois de Janvier & de Fevrier de cette année 1704, il en a paru une autre au mois de Mars. Nous commençames de la voir le 19. de Mars à 8. heures du matin proche du bord Oriental du Soleil. Nous déterminâmes auſſi-tôt ſa ſituation dans le Soleil par les fils qui ſe croiſent au foyer de la Lunette, & qui font entr'eux des angles de 45 degrés. La différence d'aſcenſion droite entre le bord Oriental & la Tache étoit de 15 ſecondes de temps, & la différence de déclinaiſon entre la Tache & le bord Septentrional étoit de 50 des mêmes parties. 1704. 5. Avril.

La Tache vûe avec une Lunette de 18 pieds étoit compoſée de deux Taches obſcures un peu diſtantes l'une de l'autre, & enveloppées dans la même nébuloſité. Le 20. à 10 heures, le Soleil s'étant découvert, la différence d'aſcenſion droite entre le bord Oriental & la Tache fut de 27 ſecondes, & la différence de déclinaiſon fut de $53'' \frac{1}{2}$. Le 21. à 8 heures & demi la différence d'aſcenſion droite entre le bord Oriental & la Tache fut de 38″, & la différence de déclinaiſon entre le bord Septentrional & la Ta-

che de 7″. La figure de la Tache étoit à peu près comme les jours précédens, excepté qu'on voyoit une petite Tache adhérante à la nébulosité qui n'avoit point paru le jour précédent. Le 22. & le 23. Mars le Ciel fut couvert. Le 24. la Tache étoit diminuée. A 2 heures $\frac{3}{4}$ la différence d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache fut 1′ 20″, & la différence de déclinaison entre le bord Méridional & la Tache de 52″ de temps. Par cette observation on trouve que la Tache passa par le milieu du Soleil le matin du 23. fort près de son centre apparent. Les jours suivans on ne put plus voir la Tache, à cause qu'elle étoit diminuée, & que le Ciel ne fut pas bien clair. Cette Tache étoit dans l'hémisphere Méridional du Soleil où se trouvent presque toutes les Taches qui ont paru depuis trente ans : elle avoit aussi une latitude Méridionale de 10 degrés, comme la plupart des Taches qui paroissent depuis plusieurs années.

COMPARAISON

Des Observations de M. Manfredi avec les nôtres.

PAR M. MARALDI.

1704. 5. Avril.

MOnsieur Manfredi nous a envoyé les observations des Taches du Soleil qu'il a faites à Bologne les mois précédens, & ayant comparé ces observations avec celles que nous avons faites à l'Observatoire, on trouve qu'une Tache que M. Manfredi observa le 21. Decembre 1703, & qui ne put être observée à Paris à cause que le Ciel fut couvert depuis le 17. jusqu'au 25. Decembre, est la même Tache que nous observâmes proche du bord Oriental du Soleil le 7. de Janvier : car si l'on compare la situation qu'avoit la moyenne des trois Taches qu'il observa proche du bord Occidental du Soleil, en supposant la révolution des Taches de 27 jours & demi, on trouve que cette Tache après avoir parcouru l'hémisphere supérieur du Soleil,

devoit se trouver à l'endroit où nous observâmes celle qui parut près du bord Oriental du Soleil le 7. Janvier. M. Manfredi trouva à la Tache du 21. Decembre une latitude Méridionale de 10 à 11 degrés, qui est celle que nous trouvâmes à la Tache du 7. Janvier. C'est pourquoi ces deux déterminations étant les mêmes, il n'y a pas lieu de douter qu'elle ne soit la même Tache qui est retournée. C'est aussi ce que M. Manfredi supposa lorsqu'il la vit le 12. de Janvier fort près du milieu du Soleil, ne l'ayant pu voir auparavant à cause des nuages. Ayant continué les observations de cette Tache autant que le temps le permit, il cessa de la voir fort proche du bord Occidental du Soleil le 18. de Janvier, qui fut aussi le dernier jour que nous l'observâmes, étant passée le jour suivant dans l'hémisphere supérieur du Soleil. Cette Tache retourna quatorze jours après au bord Oriental du Soleil; mais elle étoit si fort diminuée qu'elle ne put être observée à Paris & à Bologne avec des Lunettes ordinaires, que lorsqu'elle étoit éloignée du bord du Soleil, & approchoit du milieu de son disque. Elle fut encore observée à Paris & à Bologne le 9. de Fevrier, ayant passé le milieu du Soleil où elle disparut entierement, ayant fait presque deux révolutions entieres autour du Soleil depuis la premiere observation que M. Manfredi en fit le 21. Decembre 1703.

La Tache que M. Manfredi observa le 25. Janvier près du bord Oriental du Soleil, & que nous ne pûmes voir que le 26. à cause du temps couvert, est celle que nous avions observée le 7. de Janvier proche du bord Occidental. Les observations qu'il a faites jusqu'à sa sortie du Soleil s'accordent avec les nôtres: car par l'observation qu'il fit de la Tache le 31. Janvier à 10 heures du matin, on trouve qu'elle étoit arrivée 9 heures auparavant au milieu du Soleil, comme nous avions trouvé par l'observation du 30. Il donne aussi à la Tache une latitude Méridionale de 11 à 12 degrés, comme nous la déterminâmes par nos observations.

Nous observâmes aussi le 10 Fevrier à midi les nouvelles Taches que nous n'avions point vûes le 9, ni le matin

du 10, que nous obſervâmes le Soleil au travers des nuages rares. Le premier jour que ces Taches parurent il n'y en avoit que deux : les jours ſuivans on en remarqua trois. Nous avons trouvé ces dernieres dans un parallele qui décline de l'équateur du Soleil de 13 degrés vers le midi.

Ces Taches ont été auſſi obſervées à Genes par M. le Marquis Salvago ; à Marſeille, par le P. de la Val Jeſuite, & Profeſſeur d'Hydrographie ; à Montpellier, par M. Plantade Conſeiller à la Cour des Aydes, & par M. de Clapier ; & à Lyon, par les PP. Fulchiron & Thyoli qui nous ont envoyé leurs obſervations.

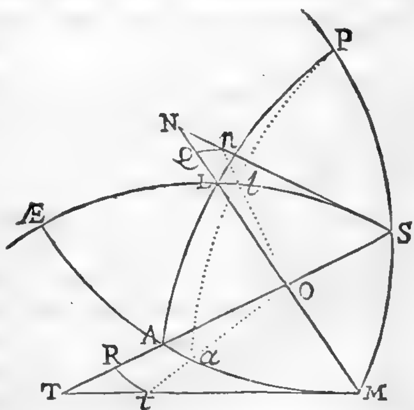
DETERMINATION

Du temps auquel le mouvement du Soleil en longitude eſt égal en ſon mouvement en aſcenſion droite.

PAR M. PARENT.

1704. 9. Avril.

SOit *P* le pole de la ſphere, *PSM* un quart du colure des ſolſtices, *ÆLS* un quart de l'écliptique, *ÆAM* un quart de l'équateur, *Æ* l'équinoxe, *S* le ſolſtice. *L* le lieu du Soleil dans l'écliptique au temps de ſon mouvement médiocre en aſcenſion droite qui eſt le temps deſiré. *PLA* le quart d'un cercle de déclinaiſon mené du pole *P* par le Soleil *L* juſques à l'équateur en *A*; *Pla* le quart d'un pareil cercle rencontrant l'écliptique au point *l* indéfiniment proche de *L*, & l'équateur en *a*; ſoient conçues auſſi



les tangentes *SN*, *MT* à l'écliptique & à l'équateur au ſolſtice *S*, & au point *M* de 90^d de l'équateur, leſquelles rencontrent les rayons *Ol*, *OL*, *Oa*, *OA*, menés du centre *O* de la ſphere & prolongés indéfiniment aux points *n*, *N*, *t*, *T*.

Soit nommé *a* le ſinus de l'arc *PS* complément de l'obliquité *SM* de l'écliptique; *r* le rayon *OS*, *OL*, *OA*, *OM* de la ſphere; *x* la tangente *SN*; & *Nn*, *dx*.

Menant donc encore *nQ* perpendiculaire à *NO*, on aura les triangles rectangles ſemblables *nNQ*, *ONS*; ce qui donnera les analogies ($Nn \mid nQ \parallel NO \mid OS \parallel nO \mid lO \parallel nQ \mid Ll$). Donc auſſi ($Nn \mid Ll \parallel NO^2 = OS^2 + NS^2 \mid OS^2$) ou ($dx \mid Ll \parallel r^2 + x^2 \mid r^2$). D'où l'on tire $\left(Ll = \frac{dxr^2}{r^2+x^2}\right)$.

Menant de même la perpendiculaire *tR* ſur *OT* en *R*, on aura l'analogie ($Tt \mid Aa \parallel TO^2 = OM^2 + TM^2 \mid OM^2$). Or on ſait par les analogies des triangles ſphériques rectangles que (le ſinus de l'arc $PS = a$, eſt au ſinus total $= r$, comme la tangente de l'arc *LS*, ſavoir, $NS = x$, eſt à la tangente de l'arc *AM*, ſavoir *TM*). Ce qui donne $\left(TM = \frac{rx}{a}\right)$, & $\left(Tt = \frac{rdx}{a}\right)$, d'où l'on tire l'analogie $\left(Tt = \frac{rdx}{a} \middle| Aa = Ll \text{ (par la ſuppoſition) } = \frac{dxr^2}{r^2+d^2} \right\| OM^2 + TM^2 = \frac{a^2r^2+x^2r^2}{a^2} \left| r^2 = OM^2 \right)$, qui fournit l'égalité ſuivante ($ar^2 + ax^2 = a^2r + rx^2$) qui ſe change en cette autre ($rx^2 - ax^2 = ar^2 - a^2r$), & diviſant le tout par ($r - a$) il reſte enfin ($ar = x^2$).

D'où l'on conclut que la tangente *x* ou *SN* de la diſtance du ſolſtice *S* au point *L* du mouvement médiocre en aſcenſion droite, eſt moyenne proportionnelle entre le rayon de la ſphere, & le ſinus du complément de l'obliquité de l'écliptique.

Ajoutant donc le logarithme du ſinus de 66^d 31′ complément de la plus grande déclinaiſon du Soleil, ſavoir,

99624627 au logarithme du sinus total qui est 100000000; & prenant la moitié de la somme 199624527, savoir, $99812263\frac{1}{2}$, on aura le logarithme de la tangente d'un arc qui est le complément de 46^d 14'; ce qui fait voir que quand le Soleil a 46^d 14' de longitude, son mouvement sur l'écliptique est alors égal à son mouvement en ascension droite.

Ceci peut donc servir à corriger quelques Tables Astronomiques qui pechent contre ce calcul, mettant le Soleil vers le 44 ou 45 degré de longitude au temps de son mouvement médiocre. Voyez les Tables du Traité de Navigation de M. Bouguer.

DEMONSTRATION

Du Principe de M. Hughens, touchant le centre de Balancement, & de l'identité de ce centre avec celui de percussion.

PAR M. BERNOULLI, Professeur à Bâle.

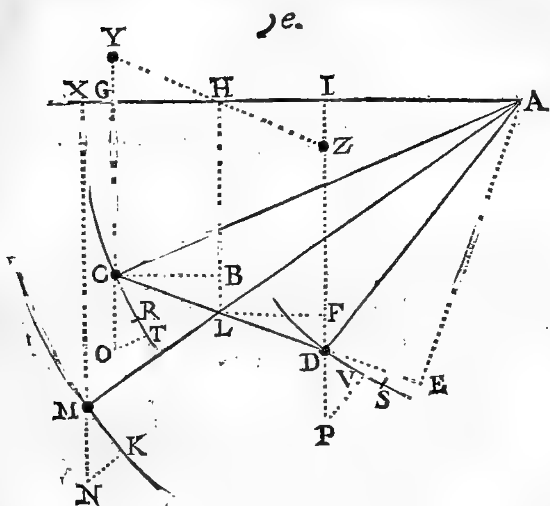
Lettre du 3. Avril 1704.

1704. 19. Avril.

APrès la démonstration de la doctrine du centre de Balancement que je donnai l'année passée à l'Académie, * par un principe incontestable tiré de la nature du Levier, il me sera présentement facile, en retournant sur mes pas, de démontrer la vérité du Principe de M. Hughens, qui peut-être sans cette démonstration seroit plus sujet à être contesté : savoir, que *le centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui descendent conjointement & remontent ensuite séparément chacune avec sa vitesse acquise, doit remonter précisément à la même hauteur dont il est descendu.*

* Voyez les Mémoires de 1703. p. 78.

Pour



Pour cet effet soit la Figure que voici répétée de mon Mémoire du 13. Mars de l'année passée, présenté à l'Académie le 25. Avril de la même année. Soit, dis-je, encore *A* l'axe horisontal du balancement; *AXM* un plan vertical droit à l'axe; *AM* le diametre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée *CLD* à angle donné *ALD*, ensorte que *CL* soit égale à *LD*, & dont *C*, *D*, soient deux petites parcelles de la figure, qui décrivent dans leur balancement les arcs *CT*, *DS*; soit aussi *AM* la longueur du pendule simple qui fait ses vibrations dans le même-tems que la figure. Soient de plus les verticales *MX*, *CY*, *LH*, *DI*, lesquelles rencontrent l'horisontale *AX* en *X*, *G*, *H*, *I*; & sur lesquelles prolongées de haut en bas, soient prises des parties infiniment petites & égales *MN*, *CO*, *DP*, qui expriment chacune ce que la pesanteur ajoute d'impulsion à chaque moment à chacun des poids *M*, *C*, *D*. Ensuite après avoir mené les droites *NK*, *OT*, *PV*, perpendiculaires aux arcs *MK*, *CT*, *DV*, soient *CB*, *LF* perpendiculaires sur *LH*, *DI*, & le reste comme on le voit dans la Figure.

Quant aux noms, ſoient encore comme dans le Mémoire du 25. Avril 1703. pag. 83. $MN=CO=DP=a$ ſinus total, le ſinus de l'angle $LAE=g$, $AC=l$, $AD=m$, $AM=t$, $AL=x$, $LC=LD=y$, $C=D=dp$. D'où l'on a trouvé dans ce Mémoire $LE=\frac{gx}{a}$, ll $(\overline{AC}^2)=xx+yy+\frac{2gxy}{a}$, mm $(\overline{AD}^2)=xx+yy-\frac{2gxy}{a}$, & enfin $t=\frac{\int \overline{xx+yy}\times dp}{\int xdp}$. Outre ces noms ſoient auſſi $NK=c$, & le ſinus de l'angle $LCB=e$.

Cela fait, ſuppoſons que le diametre de la figure qui balance (ainſi que le pendule ſimple iſochrone) ſoit deſcendu de AX en AM, & que les poids M, C, D, &c. s'étant enſuite détachés d'enſemble, remontent ſéparément chacun avec ſa viteſſe acquiſe : il eſt clair que le poids M du pendule ſimple doit remonter à la même hauteur MX d'où il eſt deſcendu ; mais que les poids C & D remonteront à des hauteurs différentes, comme CY, DZ, leſquelles ſe trouveront de la maniere que voici.

$MN (a). NK (c) :: AL (x). LH=\frac{cx}{a} :: AM (t). MX=\frac{ct}{a}.$

$\overline{AM}^2 (tt). \overline{AC}^2 (ll) :: MX \left(\frac{ct}{a}\right). CY=\frac{cll}{at}.$

$\overline{AM}^2 (tt). \overline{AD}^2 (mm) :: MX \left(\frac{ct}{a}\right). DZ=\frac{cmm}{at}.$

Sin. tot. (a). ſin. ang. LCB (e) :: LC ou LD (y). LB ou $DF=\frac{ey}{a}$.

Ce qui donne
$$\begin{cases} CG=LH-LB=\frac{cx-ey}{a}. \\ DI=LH+DF=\frac{cx+ey}{a}. \\ GY=CY-CG=\frac{cll}{at}-\frac{cx+ey}{a}. \\ IZ=DI-DZ=\frac{cx+ex}{a}-\frac{cmm}{at}. \end{cases}$$

Donc le produit du petit poids C ou Y par GY ſera $=\frac{clldp}{at}-\frac{cxdp+eydp}{a}$, & celui du petit poids D ou Z par $IZ=\frac{cxdp+eydp}{a}-\frac{cmmdp}{at}$. Et par conſéquent la ſomme de

tous les produits de Y par GY (moment de tous les poids Y par rapport à la ligne AX) $= \int \frac{clldp}{at} - \int \frac{cxdp}{a} + \int \frac{cydp}{a}$ $= \frac{c}{at} \int lldp - \frac{c}{a} \int xdp + \frac{c}{a} \int ydp$; & la somme de tous les produits de Z pat IZ (moment de tous les poids Z par rapport à la même ligne $AX = \int \frac{cxdp}{a}$ $+ \int \frac{cydp}{a} - \int \frac{cmmdp}{at} = \frac{c}{a} \int xdp + \frac{c}{a} \int ydp - \frac{c}{at} \int mmdp$.

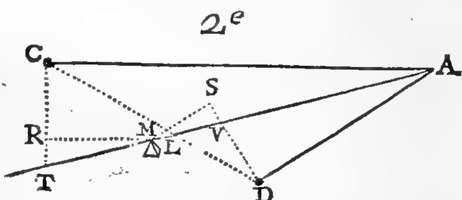
Or ces deux sommes sont égales entr'elles ; ce qui se prouve par mon Mémoire du 25. Avril de l'année passée, en ce que j'y démontrai $t = \frac{\int \overline{xx+yy} \times dp}{\int xdp}$: car si l'on multiplie les deux parties de cette équation par $\frac{2c}{at} \int xdp$, l'on aura $\frac{2c}{a} \times \int xdp = \frac{2c}{at} \times \int \overline{xx+yy} \times dp$ (à cause de $ll + mm = 2xx + 2yy$) $= \frac{c}{at} \times \int \overline{ll + mm} \times dp$ $= \frac{c}{at} \int lldp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$; & en ôtant de part & d'autre $\frac{c}{a} \times \int xdp - \frac{c}{a} \times \int ydp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$, on trouvera (comme j'ai dit) $\frac{c}{a} \times \int xdp + \frac{c}{a} \int ydp - \frac{c}{at} \times \int mmdp =$ $\frac{c}{at} \times \int lldp - \frac{c}{a} \times \int xdp + \frac{c}{a} \times \int ydp$: c'est-à-dire, que le moment de tous les Z est égal au moment de tous les Y par rapport à la ligne AX. Donc le centre commun de gravité de tous ces poids se trouve dans la même ligne AX; & par conséquent il est remonté aussi haut qu'il étoit descendu. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

La même chose se peut encore prouver d'une autre maniere plus succincte, en faisant voir que la somme des produits de Y par GY (en comprenant aussi sous Y les Z de l'autre côté) est égale à zero ; ce qui est facile : on n'a qu'à substituer simplement $xx + yy$ au lieu de ll, & effacer entierement $\frac{c}{a} \times \int ydp$; parce que toutes les ydp positives d'une part sont détruites par autant de ydp de l'autre : de

cette maniere l'on aura $\frac{c}{at} \times \int \overline{xx + yy} \times dp - \frac{c}{a} \times \int x\, dp$ pour la somme de ces produits, c'est-à-dire, (en mettant $\frac{\int \overline{xx+yy} \times dp}{\int x dp}$ au lieu de t) $\frac{c}{a} \times \int x\, dp - \frac{c}{a} \times \int x\, dp = 0$. Car delà il suit encore que le centre commun de gravité de toutes les parties du pendule se trouve dans la ligne AX.

Identité des Centres d'oscillation & de percussion.

Pour démontrer l'identité des Centres d'oscillation & de percussion, soient conçues trois verges AC, AD, AT, inflexibles, sans pésanteur, & liées ensemble en un angle invariable CAD dans la seconde Figure; que les deux premieres de ces verges soient chargées à leurs extrémités de poids égaux C, D, & que la troisieme passe par L centre commun de gravité de ces poids. Il s'agit de trouver le centre de percussion M, qui doit être tel qu'ayant mû l'angle CAD autour du point A, les chocs ou les *momens* de percussion à l'égard du point M comme de l'appui, soient égaux de part & d'autre. Pour cela soient menées CT, DS, perpendiculaires à AC, AD; & MR, MS, perpendiculaires à CT, DS. Les droites CT, DS, seront les lignes de direction des poids, lorsque dans leur mouvement circulaire ils arriveront en C & en D: ainsi le produit du poids C par la vitesse AC & par la distance MR, & celui du poids D par la vitesse AD & par la distance MS, marqueront les chocs de ces poids, ou leurs *momens* de percussion par rapport à l'appui M. Ayant donc marqué les quantités homologues à celles du Mémoire du 25 Avril de l'année passée par les mêmes lettres répétées au commencement de cet Ecrit-ci, nous trouverons ce qui suit.



AC (l). LC (y) :: ſin. ang. ALC ($\sqrt{aa-gg}$). ſin. ang. $LAC = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{ll}}$. Et AD (m). LD (y) :: ſin. ang. ALD ($\sqrt{aa-gg}$). ſin. ang. $LAD = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{mm}}$. Donc ſin. ang. $ATC = \sqrt{aa\frac{-aayy+ggyy}{ll}} = \sqrt{\frac{aall-aayy+ggyy}{l}}$, & ſin. ang. $AVD = \sqrt{aa\frac{-aayy+ggyy}{mm}} = \sqrt{\frac{aamm-aayy+ggyy}{m}}$: c'eſt-à-dire, (en mettant au milieu de ll & mm leurs valeurs) ſin. ang. $ATC = \frac{\sqrt{aaxx+2agxy+ggyy}}{l} = \frac{ax+gy}{l}$, & ſin. ang. $AVD = \frac{\sqrt{aaxx-2agxy+ggyy}}{m} = \frac{ax-gy}{m}$. Après cela on trouve ſin. ang. $ATC\left(\frac{ax+gy}{l}\right)$ ſin. tot. (a) :: AC (l). $AT = \frac{all}{ax+gy}$. Et ſin. ang. $AVD\left(\frac{ax-gy}{m}\right)$ ſin. tot. (a) :: AD (m). $AV = \frac{amm}{ax-gy}$. Donc $TM = AT - AM = \frac{all}{ax+gy} - t$, & $MV = AM - AV = t - \frac{amm}{ax-gy}$.

De plus ſin. tot. (a). ſin. ang. $ATC\left(\frac{ax+gy}{l}\right)$ :: TM $\left(\frac{all}{ax+gy} - t\right)$. $MR = \frac{all-axt-gyt}{al}$. Et ſin. tot. ($a$) ſin. ang. MVS ou $AVD\left(\frac{ax-gy}{m}\right)$ :: $MV\left(t - \frac{amm}{ax-gy}\right)$. $MS = \frac{axt-gyt-amm}{am}$. Donc $C \times AC \times MR = dp \times l \times \frac{all-axt-gyt}{al} = \frac{all-axt-gyt}{a} \times dp$ (en mettant pour ll ſa valeur) $= \frac{axx+ayy+2gxy-axt-gyt}{a} \times dp$, & $D \times AD \times MS = dp \times m \times \frac{axt-gyt-amm}{am} = \frac{axt-gyt-amm}{a} \times dp$ (en mettant pour mm ſa valeur) $= \frac{axt-gyt-axx-ayy+2gxy}{a} \times dp$. Donc auſſi puiſque la ſomme de tous les produits $C \times AC \times MR$ doit être égale à la ſomme de tous les produits $D \times AD \times$

MS, l'on aura $\int xxdp + \int yydp + \frac{2}{a} \times \int gxydp - t \times \int xdp - \frac{t}{a} \times \int gydp = t \times \int xdp - \frac{t}{a} \times \int gydp - \int xxdp - \int yydp + \frac{2}{a} \times \int gxydp$; ce qui nous fournit $t = \frac{\int xxdp + \int yydp}{\int xdp} = \frac{\int \overline{xx+yy} \times dp}{\int xdp}$. On trouvera encore la même chose en ne considérant qu'une seule des deux sommes précédentes, en effaçant tous les termes où y n'a qu'une dimension, & égalant le reste à zero : on trouvera, dis-je, encore de cette maniere $t = \frac{\int \overline{xx+yy} \times dp}{\int xdp}$, qui est la même quantité que nous avons trouvée pour le centre d'oscillation dans le Mémoire du 25. Avril de l'année passée. Donc le centre d'oscillation & de percussion ne sont toujours qu'un seul & même point. *Ce qui est la seconde chose qu'il falloit ici démontrer.*

REFLEXIONS

Sur des Memoires touchant la Correction Gregorienne, communiquées par M. Bianchini à M. Cassini.

1704. 9. May. MOnsieur Bianchini, Camerier d'honneur du Pape, a trouvé dans la Bibliotheque Vaticane des Mémoires de ce qui s'est passé dans les Congrégations tenues sur le Calendrier sous le Pape Gregoire XIII.

Il témoigne que l'abrégé du Calendrier de Lylius, envoyé par le Pape l'an 1577. aux Princes & aux Académies principales, fut recu avec de grandes louanges, & qu'il jugea de l'avis presque de tous qu'il devoit être préféré aux autres.

Cependant on ne laissa pas de tenir encore des Congrégations sur le Calendrier l'an 1580. Le Cardinal Sirlet, le Patriarche d'Antioche, l'Evêque de Mont-Royal, M. Olivieri Auditeur de Rote, le Pere Clavius, Pierre Ciacconi, Antoine Lylius frere de Louis Auteur du Calendrier, & le Pere Ignace Dantes y arrêterent des hypotheses, parmi les-

quelles il y en a des nouvelles, qui n'ont pas été ſuivies ni dans le Calendrier de Lylius, ni dans celui de Clavius qui eſt en uſage préſentement, & d'autres qui ſont dans l'uſage commun.

Par la premiere hypotheſe, ſuivant l'uſage de l'Egliſe, le jour commence à minuit, & dure 24 heures.

Par la ſeconde hypotheſe, ſi la pleine Lune arrive aux ſix dernieres heures du jour, elle s'entend être du jour ſuivant.

Dans la troiſieme, on attribue au Concile de Nicée le Decret de célébrer la Pâque le Dimanche qui ſuit immédiatement le quatorzieme du premier mois, que l'on reconnoît être celui dont le quatorzieme arrive dans l'Equinoxe du Printems, ou le ſuit de plus près; on ſuppoſe que le quatorzieme précede immédiatement la Lune pleine, qu'on dit être le quinzieme de la Lune.

Dans la quatrieme, on reconnoît que cet Equinoxe, par les obſervations, arrive tantôt au 20, tantôt au 21 de Mars, & l'on veut que quand le quatorzieme de la Lune arrive au 20 Mars, il appartienne au premier mois, quoique la Pâque ne doive jamais être célébrée avant le 22 de Mars.

Dans la cinquieme, que la faute que l'on feroit en célébrant la Pâque au ſecond mois, ne ſeroit pas ſi grande que ſi on la célébroit au douzieme mois.

La ſixieme eſt, qu'à cauſe des hérétiques Quartadecimains, il eſt défendu abſolument de célébrer la Pâque le quatorzieme de la Lune.

La ſeptieme, que s'il y a de l'erreur dans un Cycle, elle eſt plus grande lorſque le lieu de la conjonction ou de l'oppoſition du Soleil & de la Lune anticipe, que quand il ſuit les nouvelles & les pleines Lunes.

La premiere de ces hypotheſes eſt commune & naturelle: le midi diviſant le jour compoſé de 24 heures par la moitié, ſa premiere partie commence à minuit précédent, la ſeconde finit à minuit ſuivant.

La ſeconde hypotheſe qui attribue au jour ſuivant la pleine Lune qui arrive aux ſix dernieres heures du jour, ne paroît pas conforme à la premiere, qui ne finit le jour qu'à minuit ſuivant.

Pour ce qui est de la troisieme, nous avons reconnu que la célébration de la Pâque fut autorisée immédiatement par le Concile de Nicée; & nous avons attribué aux Alexandrins, députés par le Concile de Nicée, la regle de la célébrer le Dimanche qui suit immédiatement le quatorzieme de la Lune; d'autant que même après le Concile de Nicée les Latins soutenoient encore leur regle ancienne, de ne pas la célébrer que le Dimanche qui suit le quinzieme, comme ils avoient pratiqué auparavant, jusqu'à ce que saint Leon Pape eut acquiescé à la détermination des Alexandrins.

Touchant le rapport du quatorzieme de la Lune avec la Lune pleine, nous avons remarqué que le plein de la Lune arrivoit tantôt le 14, tantôt le 15 & tantôt le 16 du mois lunaire Ecclésiastique, & que cela est conforme à la pratique du Concile de Nicée.

La quatrieme hypothese: que le quatorzieme de la Lune qui arrive au 20 Mars, appartient au premier mois, à cause que l'Equinoxe Astronomique arrive tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars, paroît être une hypothese toute nouvelle, diverse de la pratique du Concile de Nicée ou de ses députés, qui ne pouvoient pas ignorer que l'Equinoxe véritable arrivoit en ce temps-là, tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars. Et néantmoins ils prenoient toujours pour Equinoxe Ecclésiastique le 21 de Mars, & pour premier mois lunaire celui dont le quatorzieme arrivoit au 21 ou après; ce qui s'est observé même jusqu'à la Correction Grégorienne, quand l'Equinoxe Astronomique arrivoit au dixieme ou à l'onzieme de Mars, d'où il fut remis au 21; cette hypothese n'est pas non plus conforme à la Correction Grégorienne ni à la pratique d'aujourd'hui, qui tolere la différence d'un ou de deux jours entre l'Equinoxe Ecclésiastique & l'Astronomique, & regle la Pâque à l'Equinoxe Ecclésiastique fixé au 21 de Mars, le tenant autant d'accord avec l'Astronomique qu'il se peut par l'obmission de 3 jours en 400 années.

Il y a apparence que le Pape ne trouva pas bon qu'on

ſe conformât à cette hypotheſe nouvelle, pour ne pas préférer une ſubtilité plus grande à l'uſage ancien des ſaints Peres. Ainſi Clavius qui avoit ſigné cette hypotheſe, n'y eut point d'égard dans l'exécution.

A l'égard de la cinquieme & de la ſeptieme hypotheſe, elles ſont conformes à celles des anciens Peres contre l'uſage de ceux qui en ce temps-là prenoient pour premier mois un mois d'hyver, & pour premier jour du mois lunaire un jour qu'on voyoit encore la Lune dans ſon cours. Ils parloient contre ces anticipations extraordinaires qui étoient tolérées de pluſieurs, ainſi qu'il paroît par les Prologues de Théophile & de S. Cyrille.

Pour la ſixieme hypotheſe, qui eſt, qu'à cauſe des Quartadecimans, il eſt défendu de célébrer la Pâque au quatorzieme de la Lune; il nous a paru que cette défenſe ne regarde point le concours accidentel de notre quinzieme, dans lequel nous pouvons célébrer la Pâque avec la quatorzieme des Quartadecimans déterminée par une méthode différente de la nôtre, laquelle eſt la ſeule que nous devons reconnoître pour quatorzieme légitime, quand elle eſt conforme à la détermination du Concile de Nicée, & à la Bulle de Gregoire XIII.

Il y a apparence que la raiſon que les Alexandrins avoient de ne célébrer la Pâque qu'après le quatorzieme de la Lune, & celle que les Latins avoient, de ne la célébrer qu'après le quinzieme, étoit parce que la Réſurrection de Notre Seigneur que nous célébrons le jour de Pâque, n'arriva que le Dimanche après le quatorzieme de la Lune.

M. Bianchini propoſe une Période Paſchale de 1184 années, qu'il appelle *Clementine*, dont il tire les Epactes par une méthode particuliere, & il les compare avec celles qui réſultent de la Période de 11600 ans, que j'ai propoſée dans l'Aſtronomie Indienne, & avec celles que le Pere Bonjour a publiées.

DES ÉQUATIONS
DES MOIS LUNAIRES
ET DES ANNÉES SOLAIRES.

PAR M. CASSINI.

1704. 31. May. LEs inventions excellentes du temps passé méritent d'être mises dans leur jour, afin qu'elles ne soient pas négligées faute d'être éclaircies.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires proposées par les Grégoriens, sont aussi conformes aux Astronomiques qu'on le puisse souhaiter : leurs regles consistent en deux mots. Elles sont très-faciles à pratiquer, & aussi propres pour l'usage populaire, que pour l'Astronomique. Ceux qui auroient dû les employer n'en ont pas profité. Ils ont employé à leur place diverses Tables Astronomiques, qui ne sont pas si d'accord ensemble que ces Equations Grégoriennes le sont avec ces mêmes Tables : car elles sont comme moyennes entre celles qui sont employées indifféremment au même sujet. Clavius, Auteur de l'explication du Calendrier auroit été plus d'accord avec soi-même, sans s'éloigner de l'Astronomie, s'il se fût attaché uniquement à ces Equations qui lui étoient proposées.

Quoique les Astronomes calculent par leurs Tables les heures, minutes & secondes des nouvelles & des pleines Lunes, & même des Equinoxes, & ne les négligent pas même dans les observations, l'expérience continuelle fait connoître que diverses observations ne s'accordent pas toujours dans les minutes, dans les Eclipses de Lune qu'on emploie à la construction des Tables Lunaires, ni à un quart-d'heure près dans les observations des Equinoxes que l'on emploie à la construction des Tables du Soleil. Dans la

derniere Eclipſe de Lune totale, dont le temps étoit plus facile à déterminer à cauſe qu'elle entroit plus directement dans l'ombre que jamais, divers Obſervateurs très-habiles ne ſe ſont accordés enſemble dans la durée de l'Immerſion qu'à deux ou trois minutes près. On peut juger par là de la différence qu'il y aura eu dans les obſervations des Anciens, qui n'avoient pas de Lunettes d'approche pour diſtinguer aſſez bien les termes de l'ombre de la Lune, ni d'horloges aſſez propres pour meſurer le temps à minutes d'heure.

Les Tables Aſtronomiques ne ſont jamais plus exactes que les obſervations ſur leſquelles elles ſont fondées.

Quand les Tables ne different pas plus entr'elles que les obſervations ſur leſquelles elles ſont fondées, il n'y a point de raiſon de préférer les plus difficiles à conſtruire & à pratiquer, aux plus faciles, ou à une méthode qui n'ait pas beſoin de Tables ni de Livres pour être pratiquée, & qui donne comme le milieu entre les Tables les plus eſtimées.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires ont été introduites dans la Correction Grégorienne pour les accorder de temps en temps avec les Aſtronomiques, quand elle s'en éloigne environ d'un jour. Dans l'uſage Civil & Eccléſiaſtique, on tient un milieu entre la facilité populaire, & l'exactitude Aſtronomique, en compoſant les mois & les années de jours entiers, & tolérant des excès & des défauts dans les heures & dans les minutes, qui ſe recompenſent partie les uns les autres, & ſe réduiſent enfin à l'égalité avec les Aſtronomiques par l'addition ou ſouſtraction de quelques jours d'extraordinaire.

Au lieu de faire les mois Lunaires de 29 jours 12 heures & 44 minutes comme font les Aſtronomes, on eſt obligé de les faire d'abord alternativement de 30 jours, qui excedent les Aſtronomiques de 11 heures 16 minutes, & de 29 jours qui different des Aſtronomiques de 12 heures 44 minutes : mais deux de ce mois ſe récompenſent enſorte que leur ſomme ne differe de 2 mois Aſtronomiques que d'une heure & 28 minutes, dont on tient compte en certains temps,

interrompant cette alternative, & faisant deux mois de suite de 30 jours.

De même au lieu de faire les années Solaires de 365 jours & presque 6 heures comme les Astronomes les supposent, on en fait trois de suite de 365 jours, qui sont les communes, & la quatrieme de 366 jours, qui est la Bissextile; de sorte que la somme de 4 années Civiles est à peu-près égale à la somme de 4 années Astronomiques. Celle-ci est l'Equation Julienne des années Civiles, qui les rapproche plus des Astronomiques: mais parce que quatre années Civiles égalées par cette maniere excedent quatre années Astronomiques d'environ 43 minutes 12 secondes, qui en 400 ans font trois jours, on en retranche 3 jours en 400 années, qui est l'Equation Grégorienne du Soleil.

En comparant les mois Lunaires avec les années Solaires, on fait ces années de 12 mois Lunaires & onze jours. Ces onze jours sont l'Epacte Lunaire en une année Solaire supposée de 365 jours & un quart, quoique dans l'usage l'on ne fasse point réflexion à cette différence d'un quart de jour, attribuant la même Epacte indifféremment aux années communes & aux Bissextiles.

Une année portant l'autre, l'Epacte Civile & Ecclésiastique excede d'abord l'Astronomique de quelques heures: mais quand les Epactes de plusieurs années excedent 30 jours, on prend ces 30 jours pour un mois Embolismique, au lieu de prendre 29 jours & demi. Cette soustraction excessive rapproche l'Epacte Civile de l'Astronomique, de sorte qu'en 4 années qui en comprennent une Bissextile & une Embolismique, l'Epacte Civile & Ecclésiastique s'égale à l'Astronomique à une ou deux minutes d'heure près, ce qui arrive souvent deux fois de suite. Mais il y a aussi souvent deux Embolismiques en quatre années, qui troublent cette égalité par l'excès d'onze heures & 20 minutes.

Les Anciens ont supposé pendant quelque temps, qu'en quatre années Solaires il y ait 49 mois Solaires & demi, & par conséquent 99 mois en 8 années. Mais on y a de-

puis trouvé une différence qui monte à un jour & demi, ce qui a obligé de s'éloigner de cette hypothese. On s'est plus approché de la précision Astronomique, lorsqu'on a supposé que dix-neuf années Solaires Juliennes de 365 jours & un quart contiennent 235 mois Lunaires, & que 76 années Juliennes comprennent 940 mois Lunaires. Le Concile de Nicée se servit de cette hypothese dans la détermination des quatorziemes Paschales.

Mais les observations de 24 siecles comparées ensemble, ont fait connoître que quatre Cycles de 19 années Solaires Juliennes, qui en font un de 76 années, excedent 940 mois Lunaires de 5 heures 50 minutes, qui est l'Epacte & l'Equation Lunaire qui convient à ces 76 années.

Les Grégoriens ont déterminé cette Equation en raison de huit jours en vingt-cinq siecles. La partie proportionnelle de cette Equation dûe à un Cycle de 19 années, est d'une heure $27' \, 33'' \, 7''' \, 12''''$; ainsi 235 mois Lunaires s'accomplissent en 6939 jours 16 heures $32' \, 26'' \, 52''' \, 48''''$. Le mois Lunaire qui en résulte est de 29 jours 12 heures $44' \, 3'' \, 10'''$ $41'''' \, 34^{5}$. On peut construire sur ce fondement une Table des mois Lunaires, & des Epactes Astronomiques qui serviront pour tous les siecles.

La regle des Equations Lunaires Grégorienne attribue donc des Epactes aux intervalles composés de Cycles de 19 années Juliennes, auxquels les Anciens n'en attribuoient point. Et c'est dans cette Epacte inconnue aux Anciens, distribuée proportionellement aux années Solaires Juliennes en raison de 8 jours en 25 siecles, que consiste l'Equation Grégorienne de la Lune.

Quoique les termes de cette Analogie Grégorienne soient des siecles entiers & des jours entiers, elle se trouve très-conforme aux mois Lunaires moyens déterminés par des excellens Astronomes à jours, heures, minutes, secondes & tierces; & pour des intervalles encore plus grands que ceux qui sont échus depuis le commencement du monde jusqu'à présent, elle donne les Epactes qui s'accordent

à deux ou trois minutes près avec celles que l'on trouve par les bonnes Tables Aſtronomiques.

En 7600 années Juliennes qui comprennent 400 Cycles de 19 années, on trouve par cette Analogie pratiquée par la regle Arithmétique des proportions, l'Equation Grégorienne de 24 jours 7 heures 40 minutes & 48 ſecondes, qui eſt l'Epacte Grégorienne de ces années Juliennes.

Par les Tables Aſtronomiques employées par Clavius, auxquelles ſont aſſez conformes les Tables Rudolphines & celles de Riccioli, on trouve l'Epacte de 7600 années, au Chapitre 12 & 28 du Calendrier Grégorien, de 24 jours 7 heures 42′ 27″ 5‴, qui excede la Grégorienne d'une minute 19″ 5‴. Au Chapitre 14 du même Livre, on la trouve de 24 jours 7 heures 37′ 53″ 20‴ moindre que la Grégorienne de 2′ 54″ 40‴. Celle qui ſe trouve par l'Analogie Grégorienne ſans Tables, qui eſt de 24 jours 7 heures 40′ 48″, eſt donc moyenne entre celle qui ſe trouve par ces différentes Tables employées par le même Auteur, qui ſont ſi conformes à celles des autres Aſtronomes dont nous avons parlé, qu'elles n'en different tout au plus que de trois minutes dans un ſi grand intervalle, dans lequel cette différence eſt tout-à-fait inſenſible.

Cet intervalle excede de trois fois les plus grands intervalles qui ſe trouvent entre les obſervations modernes de la Lune & les plus anciennes que nous ayons, qui ne ſont pas ſi préciſes qu'il n'y ait ſouvent de l'ambiguité de quelque quart-d'heure, d'autant que les Anciens avoient de la peine à répondre des heures préciſes de leurs obſervations. Ainſi la différence de quelque demi-heure qu'il y auroit dans un triple intervalle entre les Epactes trouvées par ces Equations & celles qui ſe tirent de quelques Tables Aſtronomiques, paſſeroit pour inſenſible par rapport à la préciſion que l'on peut avoir juſqu'à préſent, en comparant les obſervations les plus recentes avec les plus anciennes.

L'accord des Epactes trouvées par l'Analogie Grégorienne ſans les ſecours des Tables Aſtronomiques pour un

si grand intervalle, est donc aussi précis que l'Astronomie d'aujourd'hui le puisse avoir avec certitude, par la comparaison des observations que nous avons jusqu'à présent.

La facilité de trouver ces Epactes par cette Analogie est grande : si l'on se contente de les avoir à heure pour de si grands intervalles, une opération par la regle ordinaire des proportions en très-petits nombres est suffisante.

Dans le cas proposé, on fera comme 25 siecles à huit jours. Ainsi 76 siecles à 24 jours & $\frac{8}{25}$ qui sont un peu moins de 8 heures, un vingt-cinquieme de jour ne differe d'une heure que de deux minutes 24''. Les vingt-cinquiemes fractions ordinaires dans cette Analogie peuvent donc passer pour des heures dans les calculs, quand on ne cherche point les minutes, dont on n'a pas toujours de besoin. Si l'on ne veut pas négliger les minutes, on n'a qu'à en ôter autant de fois 2' 24'' qu'il y a de vingt-cinquiemes, prenant le reste pour heures & minutes : huit fois 2' 24' font 19' 12'', qui ôtées de 8 heures font 7 heures 40' 48''; ainsi l'Equation dûe à 76 siecles, qui est son Epacte Grégorienne, se trouve de 24 jours 7 heures 40' 48'', & celle de 100 ans, est de 7 heures 40' 48''. Car 7500 années qui est le triple de 2500 demandent 24 jours.

Parmi 4 Periodes de 19 années Civiles Juliennes, il y en a toujours une qui n'a que 4 années Bissextiles : mais les Periodes de 76 années qui en comprennent 4 de 19 en ont toujours 19 Bissextiles, & sont égales entr'elles. Tous les intervalles composés de Périodes de 76 années Civiles ont les Epactes égales à leurs Equations : car l'Epacte Lunaire d'une Période d'année Civile est l'excès de ces années sur les mois Lunaires entiers qu'elles comprennent, & cet excès dans le Cycle de 19 années & dans ceux qui en sont composés, est l'Equation Lunaire Grégorienne.

Par l'Analogie Grégorienne, on trouvera l'Equation d'une Periode de 76 années de 5 heures 50' 12'' 28''' 48'''', qui est aussi son Epacte. La Table des Epactes Astronomi-

ques de Clavius insérée au Chapitre 28 du Calendrier, qui parmi celles qu'il emploie est la plus conforme à l'Analogie Grégorienne, la donne de 5 heures 50′ 13″ 20‴. Elle n'excede pas ici la Grégorienne d'une seconde entiere, mais seulement de 51‴ 12⁗, qui sont des fractions insensibles, & elles s'accordent aussi dans les secondes avec celle qui est insérée au Chapitre 13, que Clavius donne comme conforme aux Tables calculées par Moletius, par Magini & par Paul de Middelbourg, & à celle qu'il rapporte encore au Chapitre 25 du Calendrier. Mais dans la Table insérée au Chapitre 8 & au Chapitre 14, Clavius calcule cette Epacte de 5 heures 50 minutes 10″ 44‴. Celle qui se trouve par l'Analogie Grégorienne excede cette derniere d'une minute 44‴ 48⁗. Cette plus grande différence ne monte qu'à une minute & trois quarts en 4560 ans. On pourroit refaire ces Tables sur l'Analogie Grégorienne, s'il en valoit la peine. Mais pour l'usage Civil, & même pour l'Astronomique, il est indifférent de quelle de ces Tables l'on se serve : car la plus fine Astronomie d'aujourd'hui ne sauroit répondre de cette différence en tout l'intervalle qui est échu depuis le commencement du monde jusqu'à présent ; & pour des grands intervalles composés de Periodes de 76 années, on a plutôt fait de trouver les Epactes Astronomiques par le calcul tiré de l'Analogie Grégorienne, que d'avoir recours à un Livre pour les calculer par les Tables mêmes.

C'est une chose digne de remarque que les intervalles composés de 25 années, donnent les Equations Lunaires précises à secondes sans autres fractions, & que les intervalles composés de Périodes de 125 années, donnent les Equations précises à minutes. Que ceux qui sont composés de Périodes de 625 années, donnent les Equations précises à jours entiers. En 25 années, l'Equation Lunaire est d'une heure 55′ 12″; en 125 années, elle est de 9 heures 36 minutes, & en 625 années, elle est de deux jours entiers; ce qui facilite le calcul & la construction des Tables

bles des Equations Lunaires Grégoriennes & Astronomiques.

Ayant assigné à 2500. années l'Equation de huit jours, & prenant la moitié de ces nombres, il est aisé de voir qu'elle avoit augmenté de 4. jours entiers en 1250. ans qui étoient échus depuis le Concile le Nicée jusqu'au Pontificat de Grégoire XIII. tant suivant la regle, que suivant les Tables de Clavius, qui dans l'exécution ne les augmenta que de trois jours.

Cette Equation Grégorienne remet les nouvelles Lunes en 400. années Juliennes au même jour & à la même heure, à une demi-minute près sous le même méridien.

Viete reprochoit à Clavius de n'avoir pas fait mention dans son Apologie de cette période de 340 . années. Clavius pouvoit lui répondre qu'on trouve cette période marquée dans ses Tables des Epactes inserées dans son Apologie, où il ne donne à 3400. années qu'une minute & 11. secondes d'Epactes; & néanmoins Clavius lui répond qu'il ne sauroit faire mention de ce qui n'est pas, & qui ne se trouve point écrit d'aucun Auteur de mérite, quoiqu'il ne nie point qu'elle n'approche beaucoup de la vérité. Une minute & 11″ de différence en 3400 années doit passer pour insensible dans l'Astronomie, & d'autant plus dans l'usage Ecclésiastique. Clavius même a calculé la Table des Fêtes mobiles pour une de ces périodes de 3400 années, qui commence par l'année 1600, & finit par l'année 5000.

Des Epoques Grégoriennes.

Après avoir démontré la conformité de l'Analogie Grégorienne, qui regle les Equations des mois Lunaires & des Epactes, avec les Tables Astronomiques les plus célebres, il reste à examiner la conformité des Epoques de ces Equations, qui sont les principales d'où l'on peut tirer toutes les autres.

Les Astronomes prennent pour Epoque de leurs Tables

quelque année, & quelque jour mémorable, & une heure commode ſous quelque méridien célebre. Il n'importe pas quelle année ni quel jour ou heure l'on prenne, pourvû que l'on ſache le rapport qu'elle a avec l'Epoque uſuelle. La plus célebre de toutes les Epoques eſt préſentement l'année même de Jeſus-Chriſt ſuivant l'uſage vulgaire, qui, dans le rang des années Juliennes, eſt ſuppoſée Biſſextile & premiere des Cycles de 19. années, marquée du nombre d'Or I, ſuivant l'ordre qui s'obſerve préſentement depuis le Concile de Nicée.

Il y a des Aſtronomes qui dans leurs Tables prennent pour Epoque des Epactes Aſtronomiques le midi qui précéda le premier de Janvier de cette année de Jeſus-Chriſt, & d'autres qui prennent le minuit qui précéda ce même jour; d'autres qui prennent le midi du même jour. Il y en a d'autres qui prennent le midi du dernier jour de la même année, d'autres le minuit ſuivant, & d'autres le midi du premier jour de Janvier ſuivant. Il y a enfin de ceux qui prennent pour Epoque des années Biſſextiles, le midi du premier Janvier, & des années communes, le midi précédent, afin qu'entre les années communes & les Biſſextiles, il n'y ait différence qu'en Janvier & Février; au lieu que ſuivant les autres méthodes, il n'y a point de différence en ces deux mois : mais il y a la différence d'un jour aux autres dix mois de l'année Biſſextile. Dans le Calendrier Grégorien on aſſigne la même Epacte au premier de Janvier & au premier de Mars, tolérant dans l'année Biſſextile trois mois Lunaires de ſuite de 30. jours, cet excès récompenſant le défaut d'autres mois.

Il y auroit de la commodité & plus de juſteſſe à prendre toujours pour Epoque des Epactes, le premier de Mars qui ſuit toujours l'intercalation du jour dont le mois de Février eſt prolongé aux années Biſſextiles. C'eſt auſſi le mois où arrive l'Equinoxe du Printemps, que l'on emploie à déterminer le premier mois Lunaire dans lequel arrive la Pâque.

L'on voit aſſez que les Epoques des mois Lunaires Ec-

cléſiaſtiques & de leurs Epactes, ne ſauroient s'accorder ſans réduction avec les Epoques de divers Aſtronomes, qui ne s'accordent pas tous dans la même Epoque, ni dans le jour, ni dans l'heure, ni dans le méridien, d'autant que le choix en eſt arbitraire.

Les Epactes annuelles Eccléſiaſtiques, qui conviennent au nombre d'Or courant pendant un ou deux Siecles, ont particulierement cette ſujettion, qu'il faut qu'elles s'accommodent aux Epactes diſpoſées dans le Calendrier à chaque jour des mois, pour marquer la nouvelle Lune au jour du mois où elles ſont placées. Si l'on changeoit cette diſpoſition dans le Calendrier, il faudroit auſſi changer les Epactes annuelles aſſignées au même nombre d'Or dans le Cycle de 19. années. En changeant les Epactes ſous les mêmes nombres d'Or ſans changer les Epactes dans le Calendrier, on trouveroit les nouvelles Lunes en différens jours du même mois.

L'Epacte d'une année trouvée par le nombre d'Or, peut être différente de l'Epacte de la même année trouvée par les Tables Aſtronomiques, & s'accorder avec elle en montrant dans le Calendrier la nouvelle Lune au même jour que l'Epacte Aſtronomique la donne ſuivant les préceptes des Tables.

Dans la Correction Grégorienne on aſſigna 7 jours d'Epacte à la premiere année des Cycles des trois premiers Siecles de Jeſus-Chriſt. La Lune eut ſept jours accomplis d'Epacte Aſtronomique le premier jour de Mars de l'année même de Jeſus-Chriſt Biſſextile premiere d'un Cycle de 19 années ſur le midi à un méridien plus Oriental que Rome d'une heure & 17 minutes, comme eſt à peu près celui de Nicée.

C'eſt un Epoque célebre des Epactes Lunaires, qui moyennant le Cycle de 19 années & les Equations Grégoriennes, ſert à trouver aiſément toutes les autres Epactes avant & après.

Suivant ces Equations, l'Epacte ordinaire augmente d'un jour en 312 ans & demi. Mais pour la commodité popu-

laire on a trouvé à propos de l'augmenter 7 fois d'un jour de 300. ans en 300. ans, & la huitieme fois d'un jour en 400 ans, qui font en tout huit jours en 2500 ans.

A ce compte, après avoir pris pour Epoque des Epactes l'année de Jesus-Christ, on auroit dû les augmenter d'un jour l'année 300. Clavius marque l'Equation à l'année 320, & Lilius à l'année 325, qui fut celle du Concile de Nicée; ce qui est une licence prise contre la regle ordinaire de faire les Equations aux centiemes années toujours pratiquée de l'un & de l'autre Auteur. Pour le reste du Siecle du Concile de Nicée, & pour les deux Siecles suivans, les Tables Grégoriennes donnent aux premieres années des Cycles l'Epacte huit, qui étant placée au 23 de Mars, y montre la nouvelle Lune Ecclésiastique en ces premieres années.

Nous avons remarqué que la nouvelle Lune Astronomique arrivoit aussi ordinairement au 23 de Mars aux premieres années des Cycles de ce temps-là, qui furent la 304, 323, 342, 361, 380 & 399 de Jesus-Christ. Mais que sous le même méridien elles arriverent en différentes heures du même jour en ces différens Cycles, jusqu'à ce qu'elles montoient au soir du 22, d'où elles retournoient le Cycle suivant au 23 de Mars.

Nous les avions comparées d'abord au méridien d'Alexandrie, où les Tables de Ptolomée avoient été construites, supposant que ces Tables pouvoient avoir été consultées, dans la détermination des nouvelles Lunes Ecclésiastiques; ce que nous avons fait pour entrer dans les desseins que le Concile pouvoit avoir eu de les conformer à l'Astronomie de ce temps-là, autant qu'il le jugeoit convenable à l'usage de l'Eglise.

Nous les comparerons présentement au méridien de Rome, employant notre Epoque ordinaire qui suppose la conjonction moyenne de la Lune avec le Soleil à ce méridien sur le point de midi le premier de Janvier de l'an 32 de Jesus-Christ; ce qui s'accorde à une ou deux minutes près avec les Tables Astronomiques les plus excellen-

tes; & ſuppoſant le moyen mouvement des Tables corrigées par l'Analogie Grégorienne, nous avons trouvé que la nouvelle Lune de Mars arrivoit alors aux premieres années du Cycle le 23. de ce mois, comme on voit ici.

Conjonctions moyennes de la Lune avec le Soleil au Siecle du Concile de Nicée aux premieres années du Cycle pour le méridien de Rome.

L'année	304 de J. C. le	23 de Mars à	0^h	$6^{min.}$	du matin.
L'année	323 le	23 de Mars à	4^h	$38^{min.}$	du ſoir.
L'année	342 le	23 de Mars à	9^h	$11^{min.}$	du matin.
L'année	361 le	23 de Mars à	1^h	$43^{min.}$	du matin.
L'année	380 le	22 de Mars à	6^h	$16^{min.}$	du ſoir.
L'année	399 le	23 de Mars à	10^h	$48^{min.}$	du matin.

On voit qu'au Siecle du Concile de Nicée, les nouvelles Lunes de Mars, aux premieres années des Cycles réduites au méridien de Rome, arrivoient ordinairement au 23. de ce mois, & que de ſix Cycles, il n'y en a que le penultieme, dont la premiere année eût la nouvelle Lune le ſoir du 22 de Mars à un quart-d'heure de la nuit ſuivante, d'où elle retournoit le Cycle ſuivant au 23.

Ainſi dans le Calendrier ancien le nombre d'Or I. placé au 23 de Mars montroit la nouvelle Lune Eccléſiaſtique conforme à l'Aſtronomique aux premieres années des Cycles au Siecle du Concile de Nicée, & l'Epacte huit qui dans le Calendrier Grégorien de Lilius & dans celui de Clavius eſt placée au 23. de Mars, où elle marque la nouvelle Lune, dans les Tables Grégoriennes de ces deux Auteurs, eſt bien attribuée au nombre d'Or I. au Siecle du Concile de Nicée, quand les nouvelles Lunes Aſtronomiques de ces premieres années arrivoient ordinairement au 23 Mars. On pourra donc juger que les nouvelles Lunes Eccléſiaſtiques ſeront remiſes au même état qu'elles avoient été au Siecle du Concile de Nicée, quand elles concour-

ront avec les Aſtronomiques de la même maniere qu'elles concouroient au Siecle du Cycle de Nicée, avec les différences qui réſultent néceſſairement d'un Cycle à l'autre.

Il n'y a pas aucune regle Eccléſiaſtique de rapporter les nouvelles Lunes plutôt à un méridien qu'à l'autre, quoique dans leurs Epoques elles ſe trouvent aſſez proche du méridien de Rome. Elles s'accommodent dans la ſuite à d'autres méridiens en diverſes années du même Cycle, aux mêmes années de divers Cycles. Cette variation eſt naturelle; on n'a pas entrepris de l'éviter dans la Correction Grégorienne, où pendant un ou deux Siecles on attribue la même Epacte à la même année de différens Cycles, quoique dans cet intervalle les heures des nouvelles Lunes varient beaucoup ſous le même méridien, duquel on les rapproche, quand à la fin des Siecles elles s'en ſont éloignées d'un jour ou environ.

Suivant le projet Grégorien l'an 1900 l'Equation de la Lune ſera 13, & l'Equation du Soleil contraire ſera auſſi 13, & ainſi l'Epacte Grégorienne ſera nulle. Cette année ſera donc conſidérable non-ſeulement pour finir le 19 Siécle, & être la premiere du centiéme Cycle de 19. années après l'Epoque de J. C. qui fut la premiere d'un Cycle; mais auſſi principalement pour n'avoir point d'Epacte Grégorienne, & avoir par conſéquent la nouvelle Lune Eccléſiaſtique & l'Aſtronomique au premier de Janvier & de Mars, où l'Epacte nulle eſt marquée dans le Calendrier.

Elle ſera donc naturellement une nouvelle Epoque des Cycles & des Epactes, qui exemptera la poſtérité d'avoir recours aux Epoques éloignées. C'eſt delà qu'on pourra prendre non-ſeulement les Cycles de 19 années, comme on les prend préſentement de l'Epoque de J. C. mais auſſi les Equations de la Lune & du Soleil.

OBSERVATION

Sur un battement de veines semblable au battement des arteres.

PAR M. HOMBERG.

LE battement des arteres suit à peu près les contractions du cœur, selon les portions du sang qui en sont poussées alternativement & par secousses dans les arteres : mais ce sang étant ressorti des artéres par leurs extrémités capillaires & pressé ensuite dans les veines, il y coule uniformément & sans secousses, perdant entierement les pulsations dont on s'appercevoit pendant qu'il couloit dans les arteres. Ceci s'observe ordinairement dans tous les animaux, qu'ils soient malades ou en bonne santé. Je ne me souviens pas d'avoir vû aucun Auteur qui ait remarqué un mouvement pareil aux veines que nous remarquons aux arteres ; j'ai eu le hazard d'en observer un que je rapporte par la singularité du cas. 1704. 11. Juin.

Une Dame âgée d'environ trente-cinq ans étant malade depuis quinze ou seize ans des poûmons, à ce qu'on croyoit, me priat de l'assister de mes conseils dans le dernier temps de sa vie: ses principaux symptomes étoient un asthme cruel & fréquent, un très-grand mal de tête qui ne la quittoit jamais, accompagné d'une insomnie perpétuelle, des douleurs dans la poitrine très-vives & sans relâche, & au moindre effort qu'elle faisoit, son asthme la prenoit avec une palpitation du cœur très-violente, qui duroit quelquefois une heure ou une heure & demie, outre beaucoup d'autres accidens très-facheux, dont je ne fais point mention, qui changeoient & qui se succédoient les uns aux autres.

Tous ces symptomes redoubloient, particulierement son asthme, & mettoient la malade à la mort à chaque fois

que ses ordinaires étoient accoutumés de paroître, & qui avoient cessé peu de temps avant que je l'aie vûe.

Je ne marquerai pas les remedes que plusieurs personnes habiles lui avoient faits devant moi, ni ceux que je lui ai ordonnés pendant deux ans que je l'ai traitée avec grand soin, sans la pouvoir guérir, ne faisant rien à l'observation dont il s'agit.

La malade étant morte & ayant été ouverte, l'on a trouvé toutes les parties de la tête dans leur état naturel & sans aucun défaut, quoiqu'elle ait eu un coup violent à la tête à l'âge de douze ans dont elle a pensé mourir, & qu'on a toujours soupçonné être la premiere cause de sa maladie. Les parties du bas ventre étoient extremement flétries, aussi-bien que les poûmons, sans être autrement gâtées. Son estomac étoit très-petit, & ne paroissoit pas pouvoir contenir la valeur d'une chopine. Son cœur étoit une fois plus grand qu'il ne devoit être, & flétri comme une poche de cuir mollasse: les cavités en étoient fort amples, & les parois fort minces: il y avoit dans chaque tronc des arteres un polype attaché aux parois internes du cœur, dont celui qui bouchoit l'aorte, ayant été arraché, avoit plus de deux pieds de long sans les extrémités qui étoient restées dans les branches de cette artere: le tronc de ce polype étoit d'une chair fibreuse, vermeille & ferme comme de la vraie chair, de la longueur d'environ six ou sept pouces: le reste changeoit insensiblement, prenant la couleur & la consistance du sang caillé.

Dans le temps que cette Dame étoit le plus agitée des palpitations du cœur, qui accompagnoient toujours ses accès d'asthme, on sentoit aux veines des bras & du col un battement très-sensible, dont la fréquence étoit un peu différente de celle des arteres, mais qui suivoit exactement les violentes secousses que l'on sentoit que le cœur se donnoit; & quand cet accès étoit fini, on ne s'appercevoit plus du battement à ces veines. Ceci arrivoit ordinairement une fois ou deux en vingt-quatre heures, & quelquefois plus souvent. Je me suis imaginé que ce battement

ment de veines ait pu ſe faire de cette maniere : le ſang couloit ſans aucun obſtacle dans le cœur, parce qu'il n'y avoit pas de polype dans les veines : ce ſang ſortoit du cœur avec embarras, parce que les troncs des arteres étoient bouchés par les polypes : le cœur étoit donc continuellement rempli de ſang, qui en dilatoit & amincisſoit les parois : cette dilatation étant douloureuſe au cœur en a cauſé des contractions convulſives, ce qui faiſoit ſans doute la palpitation du cœur : ces contractions convulſives s'étant jointes aux contractions naturelles du cœur, ont comprimé le ſang contenu dans ſes cavités, plus violemment que par les ſeules contractions naturelles : ces violentes contractions ont repouſſé par ſecouſſes le ſang dans les veines, leurs valvules étant forcées par l'effort violent dont le cœur les preſſoit : ce ſang repouſſé par ſecouſſes dans les veines, les a gonflées par intervalles, en conſervant fort ſenſiblement les impreſſions de ces ſecouſſes, ce qui a imité dans les veines les plus proches du cœur, une pulſation approchante de celle que l'on ſent aux arteres ; & comme ces pulſations étoient ſeulement cauſées par les contractions convulſives du cœur, elles ſuivoient exactement ces contractions, en quoi elles étoient différentes des pulſations des arteres, qui m'ont toujours paru avoir des contractions propres & indépendantes du cœur. L'on pourroit comparer ce repouſſement ſurnaturel du ſang dans les veines, au gonflement & au repouſſement des eaux coulantes des rivieres par les hautes marées.

Le gonflement extraordinaire des veines qui s'obſervoit toujours dans cette malade, cauſé par les arteres bouchées, nous donne occaſion d'expliquer facilement tous les ſimptomes dont elle étoit affligée.

Son aſthme n'eſt provenu que de la trop grande quantité de ſang qui occupoit les poumons, & qui par conſéquent n'admettoit pas une ſuffiſante quantité d'air dont il avoit beſoin.

Les veines du cerveau trop gonflées ont comprimé le

cerveau, & en partie dérangé, ce qui a causé son mal de tête continuel ; & comme la douleur toujours réiterée réveille continuellement, elle a souffert une insomnie perpétuelle.

Les douleurs aiguës dans la poitrine, qui ne la quittoient jamais, ont été, selon toutes les apparences, l'effet de la dilatation douloureuse du cœur & des poumons, produite par la trop grande quantité de sang qu'ils contenoient.

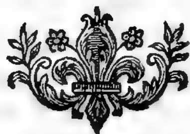
Le volume du sang qui occupoit douloureusement les parties qui en étoient inondées, étant augmenté par les fermentations menstruales, redoubloit toutes les incommodités de la malade dans le temps que ses ordinaires devoient paroître ; & cela, d'autant plus que ses ordinaires étoient arrêtés, parce que le gonflement de la masse du sang, ordinaire dans cette occasion, se faisant, mais non pas assez fort pour forcer les extrémités des arteres, qui devoient en laisser échapper une partie, ne faisoit que presser davantage & augmenter les douleurs, lesquelles n'ont jamais été soulagées que par la saignée ; & même la saignée ayant précédé ce gonflement, les douleurs ne se sont pas augmentées.

J'ai observé un fait particulier à cette Dame, qui est, qu'elle ne prenoit presque pas de nourriture. Elle a vécu plusieurs mois sans prendre autre chose qu'environ un demi-septier de bouillon maigre par jour, c'est-à-dire, une décoction simple de quelque herbe potagere dans de l'eau avec un peu de sel, & elle ne buvoit environ qu'une chopine d'eau cuillerée à cuillerée pendant les vingt-quatre heures.

Il est étonnant qu'avec si peu de nourriture une personne ait pu vivre sans diminuer considérablement. Voici comment je m'imagine que cela ait pu se faire : nous ne sommes obligés de prendre de la nourriture que pour réparer ce que l'insensible transpiration sépare de notre substance. La transpiration m'a toujours paru se faire plus ou moins, selon que le sang contenu dans les arteres est poussé

avec plus ou moins de force ou de quantité dans les parties qui doivent être nourries, & que selon cette force la nouvelle matiere nourriciere se plaçant, elle pousse & chasse l'ancienne par tous les vaisseaux excrétoires.

Nous avons trouvé dans notre malade, non-seulement les embouchures, mais aussi tous les gros canaux des arteres presque bouchés par des polypes, qui ont premierement admis fort peu de sang dans les arteres : secondement les arteres étant remplies d'un corps solide comme le polype, n'ont pas pû se contracter librement, en sorte qu'il s'y est poussé foiblement fort peu de sang à la fois; ainsi l'ancienne matiere nourriciere n'étant déplacée que lentement & en petit nombre, il ne s'est presque pas fait de transpiration dans notre malade, & par conséquent elle n'a pas eu besoin de beaucoup de nourriture, c'est-à-dire, de réparer la diminution de sa substance que la transpiration non empêchée auroit pû causer. Nous voyons à peu près arriver la même chose aux Viperes enfermées, qui vivent un an entier sans manger, & à certains animaux dans les pays froids, qui dorment presque tout l'hiver sans prendre de nourriture, & sans diminuer considérablement de substance; parce que ne faisant aucun exercice, ils ne donnent pas d'occasion à la transpiration, & ils conservent par-là la plûpart de la graisse qu'ils avoient au commencement de l'hiver.



QUE TOUS LES BAROMETRES, tant doubles que ſimples qu'on a conſtruits juſqu'ici, agiſſent non-ſeulement par le plus ou le moins de poids de l'air, mais encore par ſon plus ou moins de chaleur; & le moyen de prevenir dorénavant ce défaut dans la conſtruction des Barometres doubles, & d'en corriger l'erreur dans l'uſage des Barometres ſimples.

PAR M. AMONTONS.

1704. 18. Juin. IL eſt à propos avant toute choſe de rapporter le détail de quelques expériences pour en déduire enſuite, s'il eſt poſſible, une conſtruction qui puiſſe remédier à l'altération que la chaleur cauſe dans le poids du mercure dont les Barometres ordinaires ſont remplis.

PREMIERE EXPERIENCE.

Les Thermometres dont il eſt parlé à la fin de la Connoiſſance des Temps de 1704. étant à 54 pouces 5 lignes, on a empli de Mercure un Aréometre dans lequel il en eſt entré 18 onces 7 gros 63 grains peſant. Après avoir vuidé l'Aréometre on l'a rempli d'eſprit de vin: il y en eſt entré 1 once 1 gros 28 grains. Le mercure, l'eſprit de vin & le Thermometre avoient été un temps conſidérable, comme de pluſieurs jours, dans le même lieu l'un proche de l'autre.

Il ſuit de cette expérience, que le poids du mercure eſt à celui de l'eſprit de vin en maſſe égale, environ comme $16\frac{1}{4}$ à 1, lorſque nous n'expérimentons ni un grand froid ni un grand chaud.

SECONDE EXPERIENCE.

Les mêmes Thermometres étant à 54 pouces 11 lignes, on a rempli un petit verre de Thermometre ordinaire plein de mercure, il y en est entré en tout 757 grains pesant: la grosseur du tube étoit telle, que sur la longueur de 11 lignes il contenoit 18 grains pesant. Sur ce pied un tube de pareille grosseur & de 38 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$ de long, auroit contenu les 757 grains pesant de mercure. Les Thermometres étant descendus à 50 pouces 11 lignes, le petit Thermometre à mercure étoit baissé de 2 lignes justes; d'où l'on doit conclurre que du grand chaud au grand froid de notre climat communément pris, c'est-à-dire, dans le temps que mes Thermometres parcourent depuis 50 jusqu'à 58 pouces de leur graduation, le mercure augmente son volume d'environ $\frac{1}{115}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid, & qu'en volumes égaux il diminue de son poids dans le grand chaud aussi, de $\frac{1}{115}$ de celui qu'il auroit dans le grand froid.

TROISIEME EXPERIENCE.

Les Thermometres étant à 54 pouces, on a mis de l'esprit de vin dans un tube de verre scellé par un bout: il occupoit dans ce tube 32 pouces 4 lignes en long; on a ensuite scellé l'autre bout du tube, & on l'a laissé en expérience. Les Thermometres étant descendus à 50 pouces, l'esprit de vin du tube étoit baissé de 7 lignes $\frac{1}{4}$; d'où il suit que du grand froid au grand chaud de notre climat communément pris, l'esprit de vin augmente son volume d'environ $\frac{1}{27}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid.

Il suit encore des trois expériences ci-dessus, que dans le grand froid de notre climat, le poids du mercure est à celui de l'esprit de vin environ comme 16 à 1.

Ceci établi, si nous supposons que dans le grand froid l'espace entre les surfaces du mercure des deux boîtes du Barometre double est de 28 pouces 8 lignes: un de ces

pouces contrebalancera ou fera équilibre à 16 pouces d'esprit de vin, & le dessus de ces 16 pouces d'esprit de vin marquera pour lors dans son tube en cet endroit, que l'atmosphere égale les 27 pouces 8 lignes restans.

En prenant au-dessus & au-dessous de ce point, des parties égales de 16 lignes, chacunes de ces parties seront analogues aux lignes de mercure du Barometre simple; c'est-à-dire, que l'esprit de vin du tube étant à la premiere division au-dessous de celle qui marque 27 pouces 8 lignes, marquera que l'air pesera alors 27 pouces 9 lignes, & seulement 27 pouces 7 lignes lorsque l'esprit de vin sera à la premiere division au-dessus de celle qui marque 28 pouces 8 lignes.

Il faut cependant observer que chacunes de ces parties de 16 lignes doivent être diminuées de $\frac{32}{18}$ de ligne, si l'ouverture du tube que contient l'esprit de vin, est la moitié de celle d'une ligne, & que le diametre de la boîte soit d'un pouce, dont la raison est que l'esprit de vin, qui entre dans ce tube, ne sauroit sortir de la boîte, qu'il ne fasse descendre le vif-argent d'une quantité qui égale $\frac{1}{18}$ de ligne; ce qui fait une différence de $\frac{1}{9}$ de ligne dans la hauteur du mercure pour chaque partie, & qu'il faut $\frac{16}{9}$ d'esprit de vin pour équilibrer $\frac{1}{9}$ de mercure.

Le froid étant supposé toujours le même, & le Barometre étant ainsi réglé, il est évident qu'il marquera précisément tous les changemens qui arriveront au poids de l'atmosphere, avec cet avantage sur le Barometre simple, qu'il les marquera au moins quatorze fois aussi sensiblement: mais dans les grandes chaleurs de notre climat, ces 28 pouces 8 lignes de mercure, qui dans le grand froid faisoient équilibre avec le poids de l'atmosphere, peseront $\frac{1}{115}$ moins, & devroient par conséquent, pour continuer à contrebalancer la même pesanteur d'air, être augmentés d'environ 3 lignes, qui sont à peu près le $\frac{1}{115}$ de 28 pouces 8 lignes, sans quoi l'esprit de vin baisseroit dans son tube de 48 lignes moins $\frac{48}{18}$ de ligne, c'est-à-dire, d'un peu plus de 3 pouces $\frac{3}{4}$.

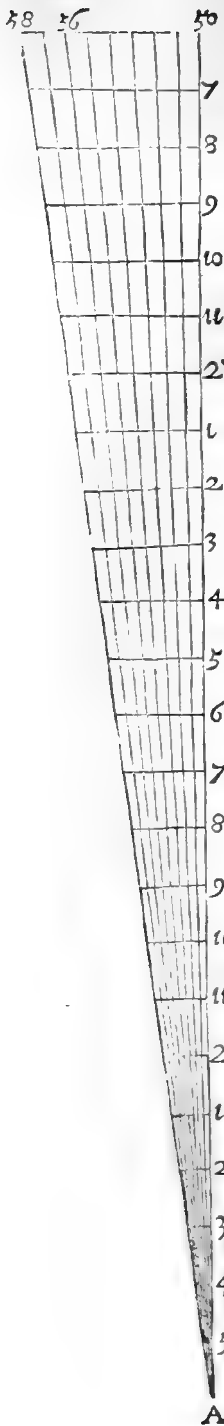
Cette augmentation de 3 lignes à la hauteur de la colonne de mercure, ne se sauroit faire que la surface du mercure de la boîte inférieure ne baisse d'une ligne & demie : car alors cette ligne & demie de mercure étant chassée dans la boîte supérieure, fera une hauteur totale de mercure de 28 pouces 11 lignes entre les surfaces du mercure des deux boîtes. Or il faudroit, pour empêcher que cet abaissement du mercure dans la boîte inférieure n'apportât aucun changement à la hauteur de l'esprit de vin du tube, que la partie de l'esprit de vin, qui est dans la boîte inférieure, se dilatât assez pour remplir cet espace d'une ligne & demie que le mercure abandonne ; ce qui arrivera nécessairement, si on donne à la partie de la boîte qui contient l'esprit de vin, une capacité égale à celle d'un cylindre de même diametre que la boîte, & de 40 lignes $\frac{1}{2}$ de haut, puisque ces 40 lignes $\frac{1}{2}$ contiennent 27 fois 1 ligne & demie, & que l'esprit de vin par la troisieme Expérience ci-devant rapportée, augmente son volume de $\frac{1}{27}$ du grand froid au grand chaud.

Il reste maintenant à considérer les changemens que la chaleur peut apporter à l'esprit de vin contenu dans le tube, suivant qu'il s'y trouve à des hauteurs différentes, & que les degrés de chaleur varient.

Premierement, il est maintenant bien certain que tant que le poids de l'atmosphere arrêtera l'esprit de vin au bas du tube qui le contient, quelque changement qui arrive à la chaleur de l'air, l'esprit de vin dans le tube ne changera pas de situation, & que toute l'action de la raréfaction de la liqueur se fera du côté de la boîte supérieure.

Il est encore bien évident que dans le grand froid, quelque hauteur qu'ait l'esprit de vin dans le tube qui le contient, il marquera toujours précisément l'augmentation ou la diminution du poids de l'atmosphere, puisque c'est dans l'état du grand froid qu'on suppose que le Barometre a été réglé.

Il n'y a donc uniquement que les différentes hauteurs



de l'esprit de vin dans le tube, hors le temps du grand froid, qui peut apporter quelque altération dans la précision de ce Barometre; & quoique cette altération dans les plus grandes hauteurs de l'esprit de vin dans le temps des plus grandes chaleurs ne puisse aller au plus qu'à environ 14 lignes, & qu'elle est très-peu considérable dans tous les autres temps où la chaleur est moindre, voici cependant de quelle maniere on en pourra faire la correction lorsqu'il s'agira de précision dans les observations.

Si dans le tube qui contient l'esprit de vin, il y étoit monté par le peu de pesanteur de l'atmosphere dans le temps des grandes chaleurs à la hauteur de 28 pouces, il y auroit alors sur cette hauteur de 28 pouces, un pouce de correction à faire; parce qu'alors ces 28 pouces ne peseroient qu'autant que 27 pouces dans le temps du grand froid. C'est pourquoi, si l'on prend ce tube de 28 pouces pour l'une des jambes d'autour l'angle droit d'un triangle rectangle, & qu'à cette hauteur de 28 pouces on tire une ligne d'un pouce perpendiculaire au tube, qui fasse l'autre jambe de l'angle droit dudit triangle; cette derniere jambe étant divisée en autant de parties égales que le Thermometre contient de degrés de l'hiver à l'été, & numérotés de même, par exemple, en 8 avec les mêmes chiffres, & que de chacune de ces parties on mene des lignes droites à l'extrémité de l'autre jambe, ensorte qu'elles partagent le triangle en huit triangles égaux, il n'y aura plus que de toutes les divisions de cette premiere jambe, mener des lignes paralleles à la seconde jambe: ces paralleles seront divisées chacune en autant de parties qu'elle, par les lignes menées de ses divisions à l'extrémité de la premiere jambe, & toutes ces divisions seront analogiques aux degrés du Thermometre, & indiqueront la correction qu'on doit faire à la liqueur, c'est-à-dire, combien on doit retrancher de sa hauteur.

EXEMPLE.

Le Thermometre étant à 56 pouces, la liqueur du Barometre à 27, on retranchera de la hauteur de la liqueur une

une quantité égale à la partie de la parallele 27 comprise entre les lignes 50 *A* & 56 *A*, & ainsi des autres.

Pour ce qui est du Barometre simple, comme toute l'étendue de la marche est bornée en un trop petit espace pour qu'une échelle semblable à la précédente pût servir utilement à faire la correction nécessaire, on peut se servir de la Table suivante, qui marque de combien une colonne de mercure de 28 pouces 7 lignes s'allongeroit ou diminueroit à tous les degrés de chaleur indiqués par mon Thermometre.

Cette augmentation ou diminution est exprimée dans cette Table par des $\frac{1}{32}$ de ligne. Ainsi, par exemple, vis-à-vis 55 pouces 5 ligne on trouve 65, ce qui veut dire que dans le temps que mes Thermometres marquent 55 pouces 5 lignes, il faut diminuer la hauteur du mercure du Barometre simple d'une quantité égale à 2 lignes $\frac{1}{32}$ de ligne.

Il est encore bon d'avertir ici que quoique 28 pouces 9 lignes ne soient pas la hauteur moyenne du Barometre simple, cette hauteur étant le plus ordinairement de 27 pouces 6 lignes; on peut néantmoins se servir utilement de cette Table, sans craindre de tomber dans aucune erreur sensible.

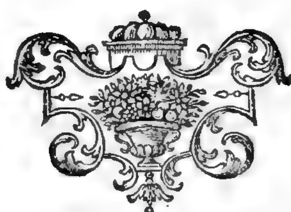
TABLE DES HAUTEURS DE MERCURE qu'il faut ajouter ou ôter de celle du Barometre simple, suivant les différens degrés de chaleur indiqués par mon Thermometre.

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.
49 pouc.	0 lign.	ajoutez	12 32es de ligne.
49	1		11
49	2		10
49	3		9
49	4		8 ou $\frac{1}{4}$ de ligne.
49	5		7
49	6		6
49	7		5
49	8		4

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.	
49 pouc.	9 lign.	ajoutez	3	32es de ligne.
49	10		2	
49	11		1	
50	0		0	
50	1	ôtez	1	
50	2		2	
50	3		3	
50	4		4	
50	5		5	
50	6		6	
50	7		7	
50	8		8	ou $\frac{1}{4}$ de ligne.
50	9		9	
50	10		10	
50	11		11	
51	0		12	
51	1		13	
51	2		14	
51	3		15	
51	4		16	ou $\frac{1}{2}$ de ligne.
51	5		17	
51	6		18	
51	7		19	
51	8		20	
51	9		21	
51	10		22	
51	11		23	
52	0		24	ou $\frac{3}{4}$ de ligne.
52	1		25	
52	2		26	
52	3		27	
52	4		28	
52	5		29	
52	6		30	
52	7		31	
52	8		32	ou 1 ligne.
52	9		33	
52	10		34	
52	11		35	
53	0		36	
53	1		37	
53	2		38	

Degrés du Thermometre.		Hauteurs à corriger.
53 pouc.	3 lign.	ôtez 39 32es de ligne.
53	4	40 ou 1 ligne $\frac{1}{4}$.
53	5	41
53	6	42
53	7	43
53	8	44
53	9	45
53	10	46
53	11	47
54	0	48 ou 1 ligne $\frac{1}{2}$.
54	1	49
54	2	50
54	3	51
54	4	52
54	5	53
54	6	54
54	7	55
54	8	56 ou 1 ligne $\frac{3}{4}$.
54	9	57
54	10	58
54	11	59
55	0	60
55	1	61
55	2	62
55	3	63
55	4	64 ou 2 lignes.
55	5	65
55	6	66
55	7	67
55	8	68
55	9	69
55	10	70
55	11	71
56	0	72 ou 2 lignes $\frac{1}{4}$.
56	1	73
56	2	74
56	3	75
56	4	76
56	5	77
56	6	78
56	7	79
56	8	80 ou 2 lignes $\frac{1}{2}$.

Dégrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.	
56 pouc.	9 lign.	ôtez	81	32es de ligne.
56	10		82	
56	11		83	
57	0		84	
57	1		85	
57	2		86	
57	3		87	
57	4		88	ou 2 lignes $\frac{3}{4}$.
57	5		89	
57	6		90	
57	7		91	
57	8		92	
57	9		93	
57	10		94	
57	11		95	
58	0		96	ou 3 lignes.
58	1		97	
58	2		98	
58	3		99	
58	4		100	
58	5		101	
58	6		102	
58	7		103	
58	8		104	ou 3 lignes $\frac{1}{4}$.
58	9		105	
58	10		106	
58	11		107	
59	0	ôtez	108	ou 3 lignes $\frac{1}{8}$.



NOUVELLE STATIQUE
AVEC FROTTEMENS ET SANS FROTTEMENS,
OU
Regles pour calculer les Frottemens des machines dans l'état de l'équilibre.

PREMIER MEMOIRE,

Qui contient tout ce qui se fait sur des plans inclinés.

PAR M. PARENT.

De l'angle que doit faire une ligne avec un plan pour glisser dessus.

1° SOit un plan rude *FG* contre lequel une puissance *A* pousse la verge solide *AB* sous l'inclinaison *ABG*; si l'on prend sur *AB* la partie *CB* pour exprimer la puissance *A*, & qu'ayant mené la parallele *CE* & la perpendiculaire *CD* à *FG*, on divise l'effort fait selon *CB* dans les 2 *CE*, *CD*; ce dernier marquera la quantité d'effort dont la puissance *A* presse le plan *FG*, lequel effort cause le frottement en *B*, & *CE* exprimera en même-temps la quantité d'effort dont la puissance *A* agit parallelement à *FG* pour vaincre ce frottement. De sorte qu'on peut envisager si l'on veut l'effort *CD* comme un poids qui pese en *B*, & l'effort *CE* comme une force qui tirant ce poids vers *F* le tient tout prêt à partir, en supposant l'angle *ABG* tel, que *AB* soit toute prête à glisser. Cela étant, il est évident que la tangente *CD* de l'inclinaison de la verge *AB* sur le plan *FG*, doit être au sinus total *BD* ou *CE*, comme le poids de la verge *AB* couchée sur *FG* à la force qu'il faudroit pour commencer à vaincre son frottement sur le plan *FG*, si on la tiroit parallelement à ce plan. De sorte que si l'on fait l'angle *ABG* un peu plus grand, la verge ne pourra glisser; 1704. 25. Juin. FIGURE I.

quelque effort que l'on fasse. Et si au contraire on fait cet angle *ABG* moindre, la verge *AB* ne pourra s'arrêter, quelque peu d'effort qu'on employe. On appellera dorénavant *ABC l'angle d'équilibre.*

On peut dire si l'on veut pour le rapport du frottement de *AB* sur *FG* à sa pesanteur celui de 7 à 20, que nous avons démontré dans cette Assemblée le 9. Janvier 1700, ou prendre tout d'un coup (pour abréger) celui de 1 à 3, à cause que les frottemens ne sont pas précisément les mêmes pour tous les corps, & que ce rapport est à peu près un milieu entre les plus grands & les moindres, puisqu'il convient au fer, au cuivre, au plomb & au bois enduits d'oing, & combinés entr'eux.

De l'angle que doit faire un plan avec l'horison, afin qu'un corps posé dessus commence à glisser.

FIG. II. 2°. De même lorsqu'on aura un corps *DHE* sur un plan incliné *AB*, ayant pris sur la direction *PE* de son centre de gravité *P* la partie arbitraire *PE* pour marquer son poids, mené la parallele *PG* & la perpendiculaire *PF* à *AB*, & divisé l'effort *PE* dans les 2 *PG*, *PF*, ce dernier marquera la quantité dont le poids *DHE* presse ce plan, & *PG* l'effort qu'il fait pour glisser & vaincre le frottement causé par l'effort *PF*. De sorte qu'il est constant que quand l'angle *ABC* est tel, que ce corps est prêt à glisser, l'effort *PG* doit être à l'effort *PF*, comme le frottement de ce corps sur *AB* supposé horisontal est à sa pesanteur, en le supposant tiré parallelement à *AC*. Or à cause des paralleles *PE*, *AC*, les angles *PEF*, *BAC* étant égaux, & les angles *PFE*, *ACB* droits, les triangles *PFE*, *ACB* sont semblables. Donc $PF \mid FE = PG \parallel BC \mid CA$; c'est-à-dire, que pour que le corps *DHE* soit prêt à glisser, il faut que le sinus total *BC* soit à la tangente *CA* de l'élevation du plan *AB* sur l'horison *BC*, comme *PF* à *FE* ou *PG*, ou comme le poids de ce corps à son frottement sur *AB* supposé horisontal.

De ſorte que pour peu que *AB* ſoit plus élevé, le corps *DHE* gliſſera auſſi-tôt; & pour peu qu'il le ſoit moins, le corps *DHE* y demeurera en repos, comme ſur un plan horiſontal.

Nous appellerons le plan *AB* qui tient le corps prêt à gliſſer *plan d'équilibre*, & l'angle *ABC l'élevation d'équilibre*.

Il eſt évident que ſi l'angle *ABC* étant moindre que *l'élevation d'équilibre*, la direction *PE* du corps *DHE* ſortoit hors de ſa baſe du côté de *E*, il tomberoit en roulant ſeulement vers *B*: mais ſi cette élevation étoit plus grande; la direction *PE* tombant ſur la baſe *HE* du corps, il gliſſeroit ſeulement embas. Enfin ſi la direction *PE* tomboit hors la baſe *HE*, le plan *AC* étant au-deſſus de *l'élevation d'équilibre*; alors le corps *DHE* rouleroit, & gliſſeroit en même-temps vers le bas du plan.

De la Force néceſſaire pour tirer ſelon quelque direction que ce ſoit un corps ſitué ſur un plan qui ſoit incliné à ſouhait.

3°. Si l'on a un corps peſant *GDE* à tirer ſur un plan *AC* incliné ſous un angle quelconque *ACB*, ayant pris ſur ſa direction *DF* pour marquer ſon poids, & diviſé cet effort dans un parallele *DG* & dans un perpendiculaire *DE* au plan, comme dans les deux articles précédens, on prendra encore ſur la direction *DM* de la force motrice *M* la partie *DI* pour marquer cette force; on menera la parallele *IL* à *AC* ſur *DE* en *L*, & la perpendiculaire *IH* ſur *DG* prolongée, & diviſant l'effort *DI* dans les 2 *IL*, *IH*; $DL = IH$ marquera la quantité de force dont *M* preſſe le plan *AC*, & *DH* celle avec laquelle elle fait effort pour vaincre la force oppoſée *DG* du poids *GDE*, & le frottement qui naît des preſſions *DE*, *DL*. FIG. III.

Appellant donc *DF*, *p*; *DI*, *f*; *CB*, *b*; *AB*, *h*; & ſuppoſant que *DM* coupe *AC* en *M*, on aura *DE* pour la tangente de l'angle donné *DME*, & *ME* pour le ſinus

total; & l'on nommera DE, t, & EM, s. Or à cauſe des paralleles LI, EM, on aura ($DL \mid LI \mid DI \parallel DE \mid LM \mid DM$.) D'où l'on tirera les Analogies $AC = \sqrt{b^2+h^2} \mid CB = b \parallel DF = p \mid \left(GF = \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = DE.\right)$ Et $AC = \sqrt{b^2+h^2} \mid AB = h \parallel AF = p \parallel \left(DG = \frac{pb}{\sqrt{b^2+h^2}} = EI\right)$: Et $DM = \sqrt{s^2+t^2} \mid ME = s \parallel DI = f \mid LI = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}} = DH$. Et enfin $DM = \sqrt{s^2+t^2} \mid DE = t \parallel DI = f \mid \left(DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$. Faiſant donc encore comme le poids π du corps GDE, eſt à ſon frottement φ ſur le plan AC ſuppoſé horiſontal; ainſi les deux preſſions enſemble DE, $DL = \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}$ à un quatrieme terme $\left(\frac{pb\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{f\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}}\right)$; on aura la force néceſſaire pour vaincre le frottement qui naît des preſſions DL, DE, en tirant parallelement a AC; mais il faut outre cela vaincre la force DG. Il faut donc 1°. que le ſeul effort DH ſoit égal à ce frottement total, & à DG enſemble, ce qui donne l'égalité ſuivante: $\left(\frac{pb\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{ft\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$. D'où l'on tire en tranſpoſant cet autre $\left(\frac{\frac{pb\varphi}{2\pi} + ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs - \frac{\varphi}{\pi}ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$; & enfin $\left(f = \frac{\overline{\frac{b\varphi}{\pi} + h}\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times s - \frac{\varphi t}{\pi}} \times p\right) = \left(p \times \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} \times \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s}\right)$ lorſque ($\varphi = 0$).

2°. Si l'on ſuppoſe que DM paſſe entre DH, & EDN au-deſſus de DH; alors $DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}$ auroit le ſigne — dans l'égalité précédente; ce qui donneroit dans ce cas

($f =$

$\left(f = \frac{\overline{\frac{b\varphi}{\pi} + h\sqrt{s^2+t^2}}}{\sqrt{b^2+h^2} \times \overline{s + \frac{\varphi}{\pi}}} \times p\right)$. Ce qui eſt aiſé à voir.

3°. Si DM paſſoit entre DE & DG au-deſſous de DE, la force DH s'uniſſant alors à la force DG, on auroit l'égalité $\left(\frac{pb\varphi + ft\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}\,\pi\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ au lieu de celle du premier cas; d'où l'on tireroit $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}pb - ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs - \frac{\varphi}{\pi}ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ qui donneroit $\left(f = \frac{\overline{\pm\frac{\varphi}{\pi}b \mp h}\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times \overline{\pm s \mp \frac{\varphi}{\pi}t}} \times p\right)$.

4°. Si DM paſſoit entre DG & DN au-deſſous de DN en DP, le ſecond terme de l'égalité précédente $\left(\frac{ft\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ auroit le ſigne (—) ce qui donneroit alors $\left(f = \frac{\overline{+\frac{\varphi}{\pi}b - h} \times \sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times \overline{s - \frac{\varphi}{\pi}t}} \times p\right)$.

5°. Si dans le ſecond cas ci-deſſus DM tomboit ſur DF prolongée en deſſus en DO, prenant t pour ſinus total & s pour tangente, les rapports $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}b + h}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ & $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}t + s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ feroient alors les mêmes; ce qui donneroit ſeulement $(f = p)$ comme on le ſait.

6°. Mais ſi DM tomboit ſur DF vers le bas, on auroit dans le troiſieme cas encore $f=p$, c'eſt-à-dire, f arbitraire comme p, parce qu'alors les rapports $\left(\frac{\pm\frac{\varphi}{\pi}b \mp h}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ & $\left(\frac{\pm s \mp \frac{\varphi}{\pi}t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$, prenant t & s comme dans le cas précédent; $b\frac{\varphi}{\pi}$, devant dans celui-ci être $= h$, $\left(\frac{\varphi}{\pi}t = s\right)$.

7°. Si dans le premier cas DM étoit parallele à CB, les angles DMF, ACB, étant égaux, on auroit l'Analo-

gie : $b \mid h \parallel s \mid t$. Ce qui donneroit $\left(f = \frac{\frac{\varphi}{\pi} b + h}{b - \frac{\varphi}{\pi} h} \times p\right)$ & $\left(= \frac{h}{b} \times p\right)$, quand $\varphi = o$.

8°. Mais dans le quatrieme cas où la puiſſance tire ſelon DP, on auroit $\left(f = \frac{\pm \frac{\varphi}{\pi} b \mp h}{b + \frac{\varphi}{\pi} h} \times p\right)$.

9°. Si dans le premier & le ſecond cas DM eſt parallele au plan AC tirant ſelon DH, $t = DE$ ſera $= o$ par rapport à $EM = S$; ce qui donnera ſimplement .... $\left(f = \frac{\frac{\varphi}{\pi} b + h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$ & $\left(= \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$, quand $(\varphi = o)$.

Soit $b = 30$, $h = 1$, $\varphi = 5$, $\pi = 7$, & $p = 3000$ livres, on aura avec frotement $f = 2243$ livres au lieu de 700 livres, comme on le trouve dans les Mémoires de l'Académie des Sciences en 1699. page 207.

10°. Mais ſi dans le troiſieme & quatrieme cas DM eſt parallele à AC tirant vers le bas ſelon DG, on aura $\left(f = \frac{\pm \frac{\varphi}{\pi} b \mp h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$.

11°. Si DM dans le troiſieme cas tomboit ſur DE tirant vers E, on auroit alors $(s = o)$ & t infinie; ce qui donneroit $\left(f = \frac{h - \frac{\varphi}{\pi} b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi} p\right)$ ($=$ l'infini) lorſque $(\varphi = o)$.

12°. Si dans le quatrieme cas DM tombe ſur DN tirant vers N, on aura toujours $(s = o)$, & t infinie; ce qui donneroit $\left(f = \frac{-h + \frac{\varphi}{\pi} b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi} p\right)$.

13°. Si $h = o$, ou ſi le plan AC eſt l'horiſon DM tirant en bas entre DH & DE comme dans le premier cas, on aura $\left(f = \frac{\varphi \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s - \varphi t} \times p\right)$ $(= o$, lorſque $\varphi = o)$.

14°. Si AC étant horifontal, DM paffe au-deffus de DH, comme dans le fecond cas, on aura $\left(f = \frac{\varphi p \sqrt{s^2+t^2}}{\pi s + \varphi t}\right)$ $(= o$, lorfque $\varphi = o)$.

15°. Si AC étant toujours horifontal, DM tombe fur DH, S étant alors infinie, on aura feulement $\left(f = \frac{p\varphi}{\pi}\right)$ comme on l'a fuppofé.

16°. Si AC eft vertical, on aura dans le premier cas $b = CB = o$; ce qui donnera auffi $\left(f = \frac{\pi \sqrt{s^2+t^2}}{\pi s - \varphi t} \times p\right)$ $\left(= \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s} \times p\text{, lorfque } \varphi = o\right)$.

17°. Si AC étant toujours vertical, DM tire en bas comme dans le troifieme cas, on aura encore $(b = o)$, ce qui donnera $\left(f = \frac{\pi p \sqrt{s^2+t^2}}{\varphi t - \pi s}\right)$.

18°. Enfin fi AC étant toujours vertical, DM tombe fur DE, on aura $s = o$, ce qui donnera $f = \frac{\pi p}{\varphi}$, & f infinie quand $\varphi = o$.

Une verge étant pofée dans un angle, trouver le point où il faut fuſpendre un corps, pour commencer à la faire gliſſer d'un côté ou d'autre.

4°. Soient encore deux plans rudes inclinés CA, BA, FIG. IV.
fur lefquels on ait pofé la verge folide & rude GF, à laquelle il faut fufpendre le poids N en H; enforte que cette verge foit prête à gliffer d'un côté ou d'un autre, & cela fans avoir égard à fon poids. Pour trouver le poids H, on le partagera par penfée en deux autres I & L, que l'on concevra fufpendus en G & F, & qui foient entre eux réciproquement comme les diftances FH, GH; on prendra fur les directions FL, GI les parties FQ, GW qui expriment ces poids; on menera les perpendiculaires FT, $GÆ$, aux plans CA, BA, & fur ces plans & fur leurs perpendiculaires les perpendiculaires QS, QT, WK, $WÆ$, afin de divifer les efforts FQ, GW, dans les efforts FT, FS; $GÆ$, GK. On prendra auffi fur GF prolongée, fi l'on veut, les parties FP, GX égales entr'elles, pour

marquer l'effort que cette ligne fait ſelon ſa longueur vers *F* & vers *G*; & menant les perpendiculaires *PO*, *PV*, *XY*, *XZ*, ſur les plans & ſur leurs perpendiculaires, on diviſera les efforts *FP*, *GX*, dans les efforts *FO*, *FV*; *GY*, *GZ*, & on conſiderera que quand le point *H* eſt tel que *FG* doive gliſſer vers *B*, demeurant cependant en équilibre, l'effort que *G* fait ſelon *GY* doit vaincre l'effort oppoſé de *I* ſelon *GK* plus le frotement qui naît des preſſions *GZ*, *GÆ*; & l'effort de *L* ſelon *FS* doit vaincre l'effort contraire de *FG* ſelon *FO* plus le frotement qui naît des preſſions *FV*, *ET*, d'où nous tirerons l'inconnue *GH*.

Mais quand le point *h* eſt tel que *G* doive gliſſer vers *A*, alors l'effort *GK* de *I* doit vaincre l'effort contraire *GY*, plus le frotement qui vient des preſſions *GZ*, *GÆ*; & l'effort *FO* de *GF* doit en même-temps vaincre l'effort contraire *FS* de *L* plus le frotement produit par les charges *FV*, *FT* du plan *AC*.

Soit donc appellée la baſe *AD* du plan *AB*, *b*; ſa hauteur *BD*, *h*; le rapport du poids de *FG* à ſon frotement, en la tirant directement ſur *AB* ſuppoſé horiſontal, $\left(=\frac{\pi}{\varphi}\right)$ la baſe *AE* du plan *AC*, *B*; ſa hauteur *CE*, *H*; le rapport du poids de *FG* à ſon frotement ſur *AC* pris comme ci-deſſus $\left(=\frac{P}{F}\right)$. Soient auſſi les longueurs arbitraires *AC*, *AB*; $=c$, menez les perpendiculaires *FR*, *GM* ſur *BA*, *CA*, appellés *GM*, *T*; *FM*, *S*; *GR*, *s*; *FR*, *t*; *GF*, *q*; la force dans *GF*, *f*; *GH*, *x*, & le poids *N*, *a*; on aura $HF=q-x$; ce qui donnera l'Analogie : $GF=q \mid HF=q-x \parallel a=N \mid I=\left(\frac{aq-ax}{q}\right)$, d'où l'on tirera $\left(L=N-I=\frac{ax}{q}\right)$. On aura auſſi à cauſe des triangles rectangles ſemblables, & des paralleles : $GF=q$ eſt à $FM=S$, comme la force $FP=f$, eſt à l'effort $\left(FO=\frac{fS}{q}\right)$; & $GF=q$, eſt à $GM=T$, comme la force $FP=f$, eſt à l'effort $\left(FV=\frac{fT}{q}\right)$. On aura auſſi, comme $AC=c$, eſt à $CE=H$; ainſi la force $FQ=\frac{ax}{q}$ à l'effort

$FS = \frac{Hax}{cq}$; & comme $AC = c$, eſt à $AE = B$, ainſi la force $FQ = \frac{ax}{q}$, à l'effort $\left(FT = \frac{Bax}{cq}\right)$. Faiſant encore comme P eſt à F, ainſi l'effort $FV + FT = \frac{fT}{q} + \frac{Bax}{cq}$, à un quatrieme terme, on aura $\left(\frac{FTf}{qP} + \frac{BaxF}{cqP}\right)$ pour tout le frotement en F. Ce qui donnera dans le premier cas l'effort FS égal à tout ce frotement plus l'effort FO, ou $\left(\frac{Hax}{cq} = \frac{FTf}{qP} + \frac{BFax}{cqP} + \frac{fs}{q}\right)$, d'où l'on tire $\left(\frac{\overline{PH - FB}}{SP + TF} \times \frac{ax}{c} = f\right)$.

Faiſant de même comme $GF = q$ eſt à $GR = s$, ainſi la force $GX = f$ à l'effort $GY = \frac{fs}{q}$; & comme $GF = q$ eſt à $FR = t$, ainſi la force $GX = f$ à l'effort $GZ = \frac{ft}{q}$; & comme $BA = c$ eſt à $BD = h$, ainſi la force $GW = \frac{aq - ax}{q}$ à $\left(GK = \frac{haq - hax}{cq}\right)$; & comme $AB = c$ eſt à $AD = b$; ainſi $GW = \frac{aq - ax}{q}$ à $\left(GÆ = \frac{baq - bax}{cq}\right)$; & enfin comme π eſt à φ, ainſi les deux preſſions enſemble $GZ + GÆ = \frac{ft}{q} + \frac{baq - bax}{cq}$ à un quatrieme terme $\left(\frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq}\right)$, on aura tout le frotement en G. Egalant donc dans le premier cas l'effort GY à ce frotement total, & à GK, on aura l'égalité $\left(\frac{fs}{q} = \frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq} + \frac{haq - hax}{cq}\right.$; d'où l'on tire $\left(f = \frac{\pm haq\pi \mp hax\pi \pm baq\varphi \mp bax\varphi}{\overline{\pm s\pi \mp t\varphi}\, c}\right)$.

Enfin égalant ces deux valeurs de f, on en tire auſſi $\left(x = \frac{\overline{h\pi + t\varphi} \times \overline{St + TF} \times q}{\overline{PH - FB} \times \overline{\pm S\pi \mp t\varphi} \times \overline{\pm h\pi \pm b\varphi} \times \overline{SP \pm TF}}\right) \left(= \frac{Shq}{sH + Sh}\right)$ lorſque φ & F ſont $= 0$.

Pour le ſecond cas on a au lieu de la premiere égalité ci-deſſus : $\left(\frac{Sf}{q} = \frac{FBax}{Pcq} + \frac{FTf}{Pq} + \frac{Hax}{cq}\right)$, d'où l'on tire $\left(f = \frac{\overline{HP + FB}}{SP - ET} \times \frac{xa}{c}\right)$, & au lieu de la 2^e^ $\left(\frac{haq - hax}{cq} = \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq}\right.$

$+ \frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{sf}{q}$), d'où l'on tire ($f = \frac{\pi haq - hax\pi - baq\varphi + bax\varphi}{t\varphi c + s\pi c}$); & comparant ces deux valeurs de f, on en tire la valeur de $Gh =$ ($x = \frac{\overline{\pi h - b\varphi} \times \overline{SP - FT} \times q}{\overline{HP + FB} \times \overline{t\varphi + s\pi} + \overline{SP - FT} \times \overline{h\pi - b\varphi}}$) ($= \frac{Shq}{Hs + hS}$) lorsque φ & F sont $= o$, comme ci-dessus.

Il est évident que si l'on veut avoir la partie Hh (qu'on pourroit appeller *Aquinétique*, puisqu'un corps suspendu dans toute son étendue y demeure en repos), on n'a qu'à prendre les différences des deux valeurs GH, Gh, ou des deux x ci-dessus, qui sera $= o$, lorsque φ & F sont $= o$.

Lorsque AB est un plan horisontal, & AC un plan vertical, les lignes BD, AE étant alors $= o$, $AB = AD = AC = CE$; $GR = S = GM = T$, & $FR = t = FM = S$, la premiere valeur de x se change en celle-ci: ($x = \frac{\overline{PS + TF}}{T} \times \frac{\varphi}{P\pi + F\varphi} \times q$) $= HG = o$, lorsque φ & F sont $= o$; & toute cette partie GH est *aquinétique* & $= o$, lorsque φ & F sont $= o$.

Trouver l'élévation d'une échelle, afin qu'un homme étant tout au haut, elle soit prête à glisser dans un plan vertical.

FIG. V. Si l'on suppose que GF soit une échelle appuyée contre un mur vertical CM, N le poids du corps d'un homme situé tout au haut en F, & qu'on veuille que cette échelle demeure stable dans la situation la plus droite qu'il se puisse; on supposera que cet homme étant en F, le centre de gravité tant de l'homme que de l'échelle soit en H. Ainsi prenant sur GF le centre de gravité & de l'échelle, nommant $G\&$, a, & $F\&$, $q-a$, le poids de l'échelle e, & celui de l'homme H. On aura à cause du centre de gravité commun $e \mid h \mid\mid FH \mid H\&$, & $e + h \mid h \mid\mid F\& = q - a \mid$ ($\frac{hq - ha}{e + h} = H\&$); ce qui donnera $GH = \frac{ae + ah + qh - ah}{e + h} = \frac{ae + qh}{e + h}$, & cette valeur étant égalée à x ci-dessus, donnera l'égalité suivante: ($\frac{ae + qh}{e + h} = \frac{PS + TF}{T} \times \frac{\varphi}{P\pi + F\varphi} \times q$). Dans

laquelle substituant la valeur de $T = GM = \sqrt{q^2 - s^2}$, il vient cette autre égalité $\left(\frac{ae + qh}{e + h} - \frac{F\varphi q}{P\pi + F\varphi} = \frac{P\varphi qs}{P\pi + F\varphi \sqrt{q^2 - s^2}} \right)$ & $\left(\frac{ae + qh}{e + h} \times \overline{P\pi + F\varphi} - F\varphi p = \frac{P\varphi qs}{\sqrt{q^2 - s^2}} \right)$ & $\left(\frac{aeP\pi + aeF\varphi + qhP\pi - F\varphi qe}{e + h} = \frac{P\varphi qS}{\sqrt{q^2 - s^2}} \right)$, & quarrant le tout, & nommant qb^2 le premier membre de cette équation, on a $\left(q^2 b^4 = \frac{P^2 \varphi^2 q^2 s^2}{q^2 - s^2} \right)$, & $(b^4 q^2 = \overline{P^2 \varphi^2 + b^4} \times s^2)$, & enfin $\frac{b^4 q^2}{P^2 \varphi^2 + b^4} = s^2$, ou $\left(s = \frac{b^2 q}{\sqrt{P^2 \varphi^2 + b^4}} \right)$ FM desirée, qui est le sinus de l'angle FGM, GF étant prise pour sinus total. On a $FM = FG$ lorsque $\varphi = o$, ce qu'on connoît d'ailleurs.

Trouver la situation d'une échelle, dans laquelle elle est prête à glisser, par sa propre pesanteur dans un plan vertical.

Si l'on veut avoir la situation dans laquelle l'échelle est prête à glisser par son seul poids, on supposera le poids N de l'homme $= h = o$; ce qui donnera $(qb^2 = aP\pi + aF\varphi - F\varphi q)$ dans l'égalité ci-dessus, & dans la valeur de s.

Enfin si l'on suppose en même-temps que $a = G$ & $= \frac{1}{2} GF = \frac{q}{2}$, & toujours $h = o$, on aura $\left(qb^2 = \frac{qP\pi}{2} - \frac{qF\varphi}{2} \right)$ & $\left(b^2 = \frac{P\pi - F\varphi}{2} \right)$ & $\left(b^4 = \frac{\overline{P\pi - F\varphi}^2}{4} \right)$; ce qui changera la valeur de s ci-dessus en cette autre $\left(s = \frac{q \times \overline{P\pi - F\varphi}}{\sqrt{4P\varphi + \overline{P\pi - F\varphi}^2}} \right)$ qui donne $(s = \frac{4}{5} q)$, en supposant $(\pi \mid \varphi \mid\mid P \mid F \mid\mid 3 \mid 1)$. On a encore $(s = q)$ ou $FM = FG$ lorsque $\varphi = o$.

Trouver la situation d'une échelle ou d'un prisme posé de travers contre un mur dans laquelle il est prêt à tomber.

5°. Soit encore AB une verge solide fixe par un de ses bouts sur le sol en B, & s'appuyant de l'autre A contre un FIG. VI.

mur vertical *CEAF*. Soit *BC* une perpendiculaire au mur menée du point *B* dans le plan horisontal, & *CE* une verticale menée sur le plan vertical. Je suppose de plus que la droite solide *AB* soit mobile autour de *CB* comme axe, & qu'elle soit tellement panchée à l'égard de la verticale *CE*, qu'elle soit prête à glisser de *E* vers *A*, & à tomber; & je demande quelle est son obliquité dans cet état à l'égard de *CE*.

Pour cet effet je décris du point *C* comme centre avec l'intervalle *CA* un arc de cercle qui rencontre *CE* en *E*; je mene la perpendiculaire *AD* sur *CE*, & je cherche quelle est la valeur de l'arc *AE* en degrés, ou quel est son sinus *AD*. Et afin d'y parvenir je considere que quelque poids *O* qu'on suspende à la verge *AB*, & en quelque endroit *Q* qu'on l'attache, il n'y apportera aucun changement; & lorsqu'elle sera une fois prête à tomber, elle le sera toujours, quoi qu'on y ajoute. Car en quelque endroit *Q* qu'on attache ce poids, il fera la même chose que s'il étoit partagé en deux autres *F*, *P*, suspendus en *A* & *B*, qui fussent entr'eux dans le rapport réciproque de *BQ* à *QA*, puisqu'alors *Q* seroit le centre de gravité de ces deux poids *P* & *F*. Or l'effort du poids *P* seroit entierement anéanti par la résistance du point *B*. Donc en quelque endroit qu'on suppose *Q*, il ne fera pas un autre effet, que si on le suspendoit en *A*, à l'égard du renversement de *AB*. Supposant donc une partie du poids de la verge, ou du poids de cette verge & du poids *O* considérés comme un seul *F* suspendue en *A*, menant le rayon *CA* & la tangente *AI* à l'arc *EA*, prenant sur *AF* la partie *AG* pour exprimer ce poids, menant sur *AC*, *AI* les perpendiculaires *GH*, *GI*, je divise l'effort *AG* dans les efforts *AH*, *AI*; & élevant encore la perpendiculaire *HM* au plan *CEA* qui rencontrera *BA* comme en *M*, & divisant la résistance de la verge *BA* ou du point fixe *B* selon *BA* dans les deux efforts *MH*, *HA*, je considere que l'effort *MH* fait tout le frotement en *A* qui doit être vaincu par l'effort *AI* du poids *F*, puisque *AI* est la route du point *A*.

A l'égard

A l'égard de l'effort AH du poids F, il eſt égal, & par conſéquent anéanti par l'effort contraire HA de la réſiſtance B, puiſqu'on ſuppoſe que le point B eſt immobile.

Nommant donc F ou AG, p; AB, l; CB, d; CE ou AC, r; AD, x; on aura $CD = \sqrt{r^2-x^2}$; & $AC=r=\sqrt{l^2-d^2}$, à cauſe des angles droits ADC, ACB. De plus les angles alternes ACD, CAF, dans les triangles rectangles ACD, CAF, donneront l'Analogie : $r=AC \mid CD=\sqrt{r^2-x^2} \mid\mid AG=p \mid \left(\frac{p\sqrt{r^2-x^2}}{r}=AH\right)$: & $AC=r \mid AD = x \mid\mid AG=p \mid GH=\left(AI=\frac{px}{r}\right)$. De plus les triangles rectangles AHM, ACD, ſemblables à cauſe de l'angle commun A, donneront l'Analogie : $AC=r \mid CB=d \mid\mid AH=\frac{p\sqrt{r^2-x^2}}{r} \mid \left(HM=\frac{pd\sqrt{r^2-x^2}}{r^2}\right)$.

Enfin ſuppoſant que le poids de AB eſt à ſon frotement ſur le plan AEC ſuppoſé horiſontal en la tirant parallelement à ce plan, comme π eſt à φ, on multipliera la valeur de HM ci-deſſus par le rapport $\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$, ce qui donnera $\left(\frac{pd\varphi}{\pi r^2}\right)\sqrt{r^2-x^2}$ pour le frotement en A, qu'il faut égaler à l'effort AI du poids F; ce qui donne l'égalité $\left(\frac{pd\varphi\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}=\frac{px}{r}\right)$, d'où l'on tire $(d\varphi\sqrt{r^2-x^2}=\pi r x)$, & quarrant chaque membre on a $(d^2\varphi^2r^2-d^2\varphi^2x^2=\pi^2r^2x^2)$ & $\left(\frac{d^2\varphi^2r^2}{\pi^2 r^2+\varphi^2d^2}=x^2\right)$, & enfin $\left(\frac{d\varphi r}{\sqrt{\pi^2r^2+\varphi^2d^2}}=x\right)$ deſirée; dans laquelle valeur ſubſtituant, ſi l'on veut, la valeur de $r=\sqrt{l^2-d^2}$, on trouve $\left(x=\frac{d\varphi\sqrt{l^2-d^2}}{\sqrt{\pi^2l^2-\pi^2d^2+\varphi^2d^2}}\right)(=o$, lorſque $\varphi=o)$, comme on le ſait d'ailleurs.

Si l'on ſuppoſe $\frac{\varphi}{\pi}=\frac{1}{3}$, on aura $(-\pi^2d^2+\varphi^2d^2=-2\pi^2d^2)$, ce qui donnera $\left(x=\frac{d\sqrt{l^2-d^2}}{\sqrt{3l^2-2d^2}}\right)$, & $AC \mid AD \mid\mid \sqrt{l^2-d^2} \mid$

$\frac{8\sqrt{l^2-d^2}}{\sqrt{3l^2-2d^2}} \| \sqrt{3l^2-2d^2} \mid d$, & $\left(AD = \frac{d \times AC}{\sqrt{3l^2-2d^2}}\right)$.

On voit que la valeur du poids $F=p$ n'entre point dans la composition de x ; ce qui confirme ce qu'on a avancé au commencement de cette Analyse, que tel que fût le poids F, l'arc AE seroit toujours le même, tandis que BC, BA, demeureroient les mêmes.

Si l'angle ABC étoit de 45^d, on auroit $(\sqrt{l^2-d^2}=d)$ & $(2d^2=l^2)$, ce qui donneroit $(x=\frac{d^2}{\sqrt{2l^2}}=\frac{d^2}{\sqrt{4d^2}}=\frac{d^2}{2d}=\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}AC=AD)$ ce qui donneroit l'arc AE de 30^d.

Si l'angle ABC est de 60^d, & BAC de 30, on aura $(BC=\frac{1}{2}AB)$ & $(BC^2=d^2=\frac{1}{4}AB^2=\frac{1}{4}l^2)$, ce qui donnera $(\sqrt{l^2-d^2}=\sqrt{\frac{3}{4}l^2}=\frac{l}{2}\sqrt{3})$, & $(\sqrt{3l^2-2d^2}=\sqrt{\frac{10}{4}l^2}=\frac{l}{2}\sqrt{10}$; ce qui donneroit $\left(x=\frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{10}d\sqrt{30}\right)\frac{AC}{\sqrt{10}}=AD$, & l'arc AE de 18^d 27. minutes.

Enfin si l'angle ABC est de 30^d ou BAC de 60, on aura $(BC=d, \sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{2}l^2}=\sqrt{\frac{3}{4}l^2})$, & $(2d^2=\frac{3}{2}l^2)$ & $(\sqrt{3l^2-2d^2}=\sqrt{\frac{3}{2}l^2})$, & enfin$\left(x=AC\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)$: & $(\sqrt{2} \mid 1 \| AC \mid AD=x)$ ou $(2 \mid 1 \| AC^2 \mid AD^2.)$ Donc l'arc AE seroit alors de 45^d.

On peut remarquer que si $d=CB=o$, $AD=o$; & que si $d=CB=l=AB$, alors $(AD=AC)$, c'est-à-dire, que le point A seroit alors sur la ligne horisontale CR.

SECOND MEMOIRE.

Trouver la force avec laquelle il faut pousser un coin, pour séparer un corps ou directement, ou sur un point fixe, ou sur deux.

1704. 2. Juillet. 1°. SI au lieu de concevoir que la puissance M (1. *Fig.*) tient le poids D en équilibre sur le plan incliné AC en tirant horisontalement, tandis qu'une autre puissance N

arrête le plan incliné en le repoussant selon l'horisontale *NO*, comme dans le premier Memoire; on suppose que la puissance *M* retient seulement le poids *D*, tandis que la puissance *N* pousse le plan incliné *ACB* sous ce poids; le plan incliné *ACB* s'appellera alors un coin rectangle. Or il est évident que les deux puissances *M* & *N* étant opposées doivent être égales, puisqu'elles sont en équilibre entr'elles. Donc les mêmes dénominations subsistant, comme dans l'article 3. du premier Mémoire, on aura la puissance $\left(N = \frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} = f\right)$ comme dans le 7e cas de cet article 3. A quoi il faudra ajouter le frotement causé par le poids *D*, & même par le plan *ACB* sur le plan horisontal *PQ* $\left(= \frac{\overline{D + ACB} \times \varphi}{\pi}\right)$.

2°. Si l'on joint ensemble deux coins égaux semblables au précédent dans la droite *BC* pour en composer le coin scalene *ACa* (2. *Fig.*), que l'on introduise ce coin dans la fente *TOt*, d'un corps *TQPt*, dont on veut écarter les deux portions *TQÆ*, *tPÆ*, en les faisant glisser sur le plan horisontal *QP*; on cherchera premierement la résistance que ces deux parties font à être séparées directement dans leur partie commune *OÆ* selon la droite *YXy* perpendiculairement à *OÆ*; à quoi on ajoutera la résistance qui vient du frotement de la partie *TQÆ* sur le plan *QP*, lorsqu'elle s'écarte de la partie *tPÆ*, savoir $\left(\frac{\varphi}{\pi} \times TQÆ\right)$, & on appellera ces deux résistances ensemble *p*, parce qu'elles font le même effet ici que le poids *D* du cas précédent. On partagera ensuite la force motrice *M* ou *f* en deux égales, qu'on appliquera à chaque moitié du coin *ABC*, *aBC*; alors ce cas deviendra tout semblable au précédent, en regardant la surface dans laquelle les deux coins s'appuient l'un sur l'autre, comme le plan horisontal *PQ* du cas précédent; ce qui donnera pour chaque force qui doit être appliquée aux moitiés *ABC*, *aBC*, du coin

$\left(\frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h} \times p\right)$. Donc la force totale *M ou f* de firée $\left(= 2p \times \frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h}\right)$, ce qui donne auſſi $\left(p = \frac{f}{2} \times \frac{\pi b - \varphi h}{\varphi b + \pi h}\right)$. On a auſſi $\left(f = \frac{2ph}{b}\right)$ & $\left(p = \frac{fb}{2h}\right)$, lorſque $\varphi = o$.

3°. Mais lorſqu'il faut ſéparer les parties *TQÆ*, *tPÆ* (3. *Fig.*) ſur un point fixe *Æ*, l'effort *M* eſt très-différent du précédent; & pour le trouver je le ſuppoſe partagé en deux parties égales, & chaque moitié appliquée à chaque demi-coin *ABC*, *aBC*, comme ci-deſſus agiſſante ſelon les directions verticales *ND*, *nd*, qui paſſent par les centres de gravité *D*, *d*, des faces *TI*, *ti*, du coin. Je prens ſur ces verticales les parties arbitraires *ND*, *nd*, qui marquent ces deux forces ou $\frac{1}{2}f$. Je mene les perpendiculaires *HDL*, *hdl*, à ces faces, & je diviſe chacun des efforts *ND*, *nd*, dans les perpendiculaires & paralleles *NT*, *NH*, *nt*, *nh*, aux faces *AC*, *ac*; je mene encore les perpendiculaires *DE*, *de*, à l'axe du coin *BC*, & je prens deſſus les parties *De*, *de*, qui expriment les réſiſtances que ces deux coins rectangles ſe font l'un à l'autre dans leur baſe commune *BC*. Je diviſe de même les efforts *ED*, *ed*, dans les paralleles & perpendiculaires *EG*, *EF*, *eg*, *ef*, aux faces du coin, & je conſidere que les efforts *HD*, *GD*, *hd*, *gd*, font tout le frotement en *D*, *d*, & que les efforts *NH*, *nh*, de *M* doivent vaincre ces frotemens, & outre cela les efforts contraires *EG*, *eg*, de la réſiſtance *BC*.

Je réduis enſuite par penſée toutes les réſiſtances des parties de *OÆ* dans leur centre *X* agiſſantes ſelon la perpendiculaire *YXy* à *OÆ*, en ſuppoſant que ces parties ſont au moins un peu extenſibles (puiſque l'expérience nous apprend qu'il n'y a point de corps qui n'ait du reſſort, & que les filets de verre même ſont fort ſenſiblement extenſibles); & prolongeant les directions *HGDL*, *hgdl*, & *TD*, *td*, je mene deſſus les perpendiculaires *ÆL*, *Æl*; *ÆR*, *Ær*; & je conſidere que l'effort *NH* diminué de l'effort contraire *EG*, & multiplié par ſon levier *ÆR* ſe

joint à l'effort de *OÆ* selon *YXy* multiplié par son levier *ÆX* pour équilibrer l'effort *HD* plus l'effort *GD* multipliés par leur levier commun *ÆL*, les premiers agissant autour de *Æ* du sens contraire des derniers, & de même pour l'autre face *aC* du coin.

Ceci étant établi, j'appelle p la résistance en *YXy* multipliée par *ÆX*; *ÆL*, a; *ÆR*, d; *AM*, h; *MC*, b; *AC*, c; $ND = nd, \frac{1}{2}f$; & *DE*, x. Or les triangles rectangles *NDT*; *ACM*, *DEF*, semblables en ce sens, donnent les Analogies:

$AC = c \mid CM = b \parallel ND = \frac{1}{2}f \mid \frac{fb}{dc} = DT = NH$, & $AC = c$, $AM = h \parallel ND = \frac{f}{2} \mid NT = DH = \frac{hf}{2}$. On aura aussi: $AC = c \mid AM = h \parallel DE = x \mid DF = \frac{hx}{c} = EG$, & $AC = c \mid CM = b \parallel DE = x \mid EF = DG = \frac{bx}{c}$, supposant aussi que π est à φ, comme le poids du coin *AC* à son frotement sur la face *TO* du corps à fendre supposée horisontale, en tirant parallelement à cette face, on aura l'Analogie, comme π est à φ, ainsi les pressions *DH* plus *DG* ensemble $\left(= \frac{hf}{2c} + \frac{bx}{c}\right)$ à un 4e terme $\left(\frac{hf\varphi}{2c\pi} + \frac{bx\pi}{c\pi}\right)$ qui sera la valeur du frotement causé en *D* par les pressions *DH*, *DG*.

Egalant donc maintenant l'effort *NH* aux deux frotemens *DH*, *DG*, & à l'effort contraire *EG*, on a l'égalité $\left(\frac{\pi fb}{2c\pi} = \frac{hf\varphi + 2bx\varphi + 2hx\pi}{2c\pi}\right)$. D'où l'on tire $\left(\frac{\pi fb - hf\varphi}{2b\varphi + 2b\pi} = x\right)$.

On aura aussi l'équilibre $(\overline{HD + GD} \times ÆL = \overline{NH - EG} \times ÆR + p)$; c'est-à-dire, $\left(\frac{ahf + 2abx}{2c} = \frac{fbd - 2hxd + 2cp}{2c}\right)$. D'où l'on tire $(2abx + 2hdx = fbd + 2cp - ahf)$, & $\left(x = \frac{fbd + 2cp - ahf}{2ab + 2hd}.\right)$

Enfin égalant le premier x avec le second, on aura l'égalité $\left(\frac{\pi fb - hf\varphi}{b\varphi + h\pi} = \frac{fbd + 2cp - ahf}{ab + hd}\right)$, & $(2cpb\varphi + 2cph\pi = \overline{ah^2\pi + ab^2\pi - ch^2\varphi - db^2\varphi} \times f)$, & enfin $\left(f = \frac{2cp \times \overline{b\varphi + h\pi}}{\overline{a\pi c^2 - ch^2 - db^2} \times \varphi}\right)$

& $\left(f = \frac{2p \times \overline{b\varphi + h\pi}}{\overline{a\pi - c\varphi} \times c}\right)$ en ſuppoſant $AC = ÆR$, ce qui eſt libre.

On auroit donc auſſi $\left(p = \frac{fc}{2} \times \frac{\overline{a\pi - c\varphi}}{b\varphi + h\pi}\right)$, ce qui ſe réduit à $\left(f = \frac{2ph}{ac}\right)$ & $\left(\frac{fac}{2h} = p\right)$ lorſque $(\varphi = 0)$.

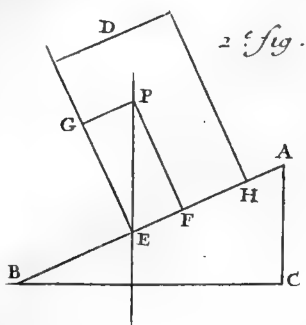
4°. Si au lieu d'un point fixe *P*, on ſuppoſoit que le corps à fendre fut ſitué ſur le plan horiſontal *Qq* (4. *Fig.*) ſans pouvoir gliſſer, enſorte que ſes deux moitiés duſſent s'écarter l'une de l'autre en tournant ſur leurs extrémités *Q*, *q*, comme points fixes; ayant prolongé les directions *HD*, *hd*, des faces du coin, on meneroit deſſus les perpendiculaires *QÆ*, *qæ*, & ayant multiplié la réſiſtance en *X* par la diſtance perpendiculaire *QY*, *qy*, de points *Q*, *q*, à ſa direction *YXy*, on meneroit encore les perpendiculaires *QV*, *qu*, aux faces du coin prolongées, & ayant nommé *QÆ*, *a*; *QV*, *d*, & le produit de la réſiſtance *X* par *QY*, *p*, & le reſte demeurant comme ci-deſſus, on auroit encore *f* & *p* des mêmes valeurs, comme il eſt évident.

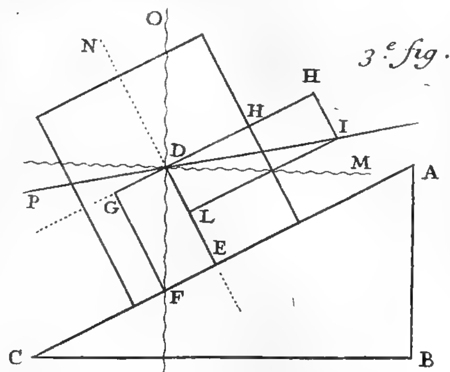
SUITE DU SECOND MEMOIRE,

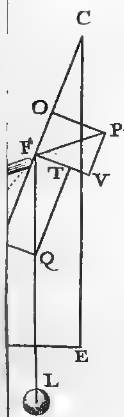
Qui comprend ce qui ſe fait ordinairement avec la vis ancienne ou à écrou, & la vis-ſans-fin.

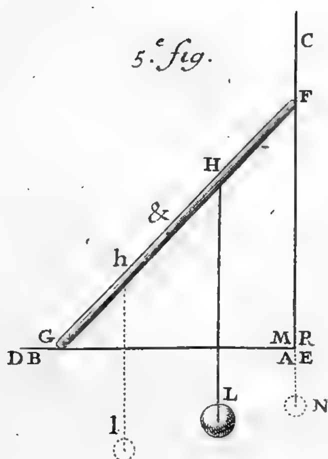
De la Force de la vis ancienne, y compris les frotemens contre ſon écrou, & contre ſa baſe.

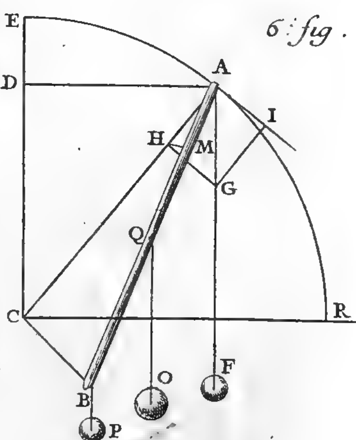
5°. Soit encore un plan incliné (5. & 6. *Fig.*) dont *AB* ſoit la hauteur, & *CB* la baſe, & *DCA* un autre plan incliné tout ſemblable & égal au précédent, dont *AD* ſoit la baſe, & *CD* la hauteur, qui ſoit poſé ſur le premier en ſens renverſé, enſorte que leurs hypotenuſes *AC* ſe couvrent. Si l'on met ſur le plan *ADC* un poids *E*, on pourra le concevoir diſtribué à tous les points du plan *AC*; & ſi l'on ſuppoſe qu'une puiſſance *F* pouſſe le plan incliné *ACB* ſelon la droite *FG* parallele à la baſe *CB*, tandis qu'une autre puiſſance *G* égale à la premiere retient le plan incliné *ACB*



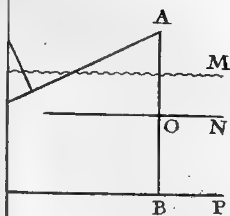


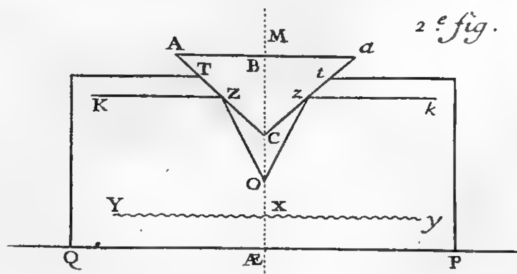


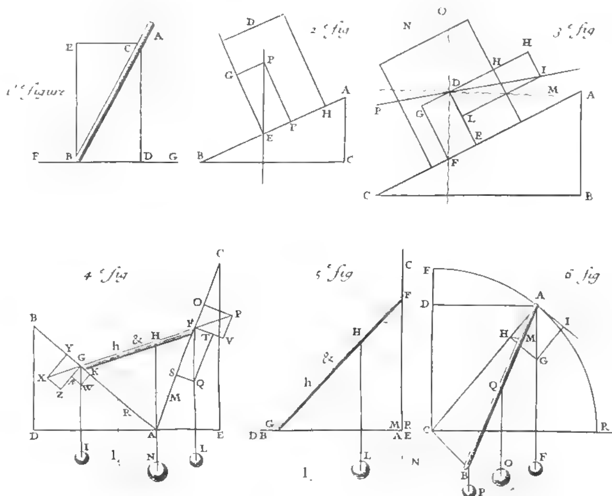




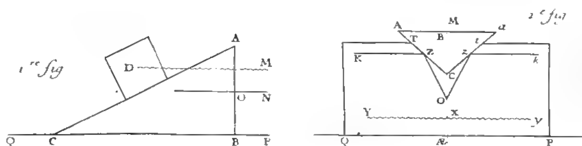
Second memoire







Second memoire



ſelon la même *GF*; alors *ACB* ſera ſeulement regardé comme un plan incliné, & *ADC* comme un poids. Mais ſi l'on conçoit *G* pouſſante, & *F* ſeulement réſiſtante, *ACB* ſera alors regardé comme un coin. Et de même s'il s'agit de preſſer des corps *E* ou *I*, qui ſoient de côté ou d'autre des baſes des plans inclinés *AD*, *CB*, alors ces plans ſont ſimplement regardés comme des coins; les plans inclinés ne ſe diſant qu'à l'égard des poids à élever, & non pas à l'égard de toutes ſortes de preſſions.

Si l'on tourne maintenant le rectangle *ADCB* (5. *Fig.*) ſur un cylindre droit, enſorte que ſes côtés *CB*, *AD*, ſoient paralleles aux circuits de ſes baſes, la droite *AC* ſera changée dans une véritable hélice ou vis; de ſorte que ſi *CB* eſt égale en longueur au circuit d'une des baſes développée, *AC* formera la longueur d'un des pas de l'hélice, & *AB* ſa hauteur; ou ſi *AB* eſt égale à toute la hauteur du cylindre, telle qu'elle ſoit, *AC* ſera égale à la longueur de l'hélice entiere, & *CB* au circuit de ſa baſe pris autant de fois qu'il y a de pas dans la vis.

Suppoſant donc que la puiſſance *F* ou *G* agiſſe toujours ſelon une tangente à la ſurface du cylindre laquelle ſoit parallele à ſa baſe, la force ſera la même ou pour faire monter le plan incliné *ADC* ſur *ACB*, ou pour introduire le coin *ACB* ſous le plan incliné *ADC*, que ſi ces deux plans étoient encore ſur un même plan. De ſorte que ſi la preſſion *E* ou *I* qu'il faut produire ſelon *EI*, c'eſt-à-dire, ſelon l'axe de la vis, eſt donnée $= p$, & qu'on veuille trouver la force f néceſſaire pour pouſſer le plan incliné *ADC*, ou le coin *ACB*, c'eſt-à-dire, pour faire tourner ou la vis ou l'écrou, on aura ſelon le ſeptieme cas de l'article 3. du 1r Memoire $\left(f = \frac{\overline{\varphi b + \pi h}}{\pi b - \pi h} \times p\right)$. Ou ſi f eſt donnée, & qu'on veuille connoître l'effort p, qu'elle eſt capable de produire ſelon la longueur du cylindre de la vis, on aura $\left(p = f \times \frac{\overline{\pi b - \varphi h}}{\varphi b + \pi h}\right)$. Où h ſignifie ou la hauteur d'un des pas, & b le centre de la baſe; ou h la hauteur entiere de la vis, & b le cercle de la

base multiplié par le nombre des pas ; ou enfin h la tangente de l'élévation de la vis sur le cercle de sa base, & b le sinus total; π & φ marquant toujours le rapport du poids de l'écrou à son frotement sur le plan incliné de la vis supposé horisontal. On aura $\left(\frac{hp}{b}=f\right)$ & $\left(\frac{bf}{h}=p\right)$ lorsque $\varphi=o$.

Où il faut remarquer que nous n'avons point égard au frotement causé par les résistances E ou I contre un des collets de l'écrou ou de la vis, selon que l'un des deux est mobile.

Et pour avoir égard à ce frotement, on considerera que le frotement du collet CB de la vis (par exemple) contre la sole GH ne se fait pas également dans tous ses points, comme si l'on tiroit ce collet en ligne droite sur GH; mais chaque point de ce collet résiste plus ou moins, selon qu'il est plus ou moins éloigné de l'axe de la vis, & cela à l'égard de la force motrice qu'on suppose toujours appliquée au centre de gravité de la face de la vis ou de l'écrou. On pourroit penser aussi que les points de ce collet devroient résister encore à proportion de leurs vitesses particulieres autour de l'axe. Mais on verra par les expériences suivantes, que dans le commencement du frotement, ces vitesses n'ont nul effet. Il reste donc que le centre du frotement du collet soit le même que son centre de gravité g, en supposant ce collet développé sur sa tangente ce en $bcde$ (*Fig.* 7. & 8.)

Appellant donc d la distance du milieu de la face d'un des pas de la vis à son axe AB; e la distance ag du même axe au centre de frotement, & $\left(\frac{F}{P}\right)$ le rapport du frotement de ce collet sur GH à sa pesanteur, on aura pour son frotement comparé à la force motrice supposée au centre des pas $\left(\frac{pef}{dP}\right)$ ce qui donnera enfin $\left(f=\frac{\varphi b+\pi h}{\pi b-\varphi h}+\frac{Fe}{Pd}\times p\right)$ & $\left(p=\frac{dfP\times\overline{\pi b-\varphi h}}{dP\times\overline{\varphi b+\pi h}+Fe\times\overline{\pi b-\varphi b}}\right)$, & $\left(f=\frac{hp}{b}\right)$ ou $\left(p=\frac{bf}{h}\right)$ lorsque φ & F sont $=o$, comme ci-dessus.

De la

De la force de la vis-ſans-fin, y compris les frottemens contre la dent de la roue, contre ſon collet, & contre celui de la vis.

6°. Suppoſant encore que *D* (*Fig. 9. & 10.*) ſoit une dent de la roue d'une vis-ſans-fin, qui obligée de ſe mouvoir ſelon la droite *DG* tangente au cercle de cette roue, par la preſſion que lui fait la partie *AC* de la vis; ſoit *CB* (*Fig. 9.*) une portion du circuit de la vis-ſans-fin qui répond à *AC*, & *AB* une parallele à ſon axe; enſorte que *ACB* eſt un triangle rectangle dont *AC* eſt l'hypotenuſe, & *CB* la baſe. Si l'on conçoit la force motrice appliquée au circuit de la vis-ſans-fin, la vis deviendra un coin *ABC* rectangle en *B*, pouſſé par une puiſſance ſelon ſa baſe *BC*, ou ſelon ſa parallele *OE*, entre la dent *D* qui tient lieu de poids, & le collet de ſon arbre, dont la réſiſtance contre ſon paillier eſt marquée par le corps ſolide *QP*, le long duquel on ſuppoſe le coin *ABC* gliſſer. De même la dent *D* ne ſauroit qu'avancer ſelon *DG*, étant retenue par la preſſion du collet de ſa roue contre ſon paillier, que je repréſente par le corps ſolide *EF* contre lequel elle eſt obligée de gliſſer. De ſorte que la puiſſance *N* a non-ſeulement le poids *D* à faire avancer ſelon *DG*, mais encore les frottemens en *AC*, en *BC*, & en *EF* à vaincre. C'eſt pourquoi on ne ſe trompe pas lorſqu'on croit communément que cette machine eſt une de celles où les frottemens ſont les plus grands.

Nommant donc toujours le ſinus total *BC*, b; la tangente *AB* de l'angle *ACB* de la vis & de ſa baſe h; l'effort avec lequel la dent eſt portée contre le coin *ACB* ſelon *GD* par le poids à vaincre p; $\frac{\pi}{\varphi}$ le rapport du poids de cette dent à ſon frottement ſur *AC* ſuppoſé horiſontal, & la force *Nf* le rapport du poids du plan *ACB* à ſon frottement contre $QB = \frac{P}{F}$, & enfin $\frac{p}{F}$ le rapport du poids de la dent à ſon frottement contre *EF*; c le rayon de ce frottement pris comme ag dans l'article précédent, & g celui de la roue *DHI*; x le frottement en *CB* multiplié par e, & diviſé par d, comme dans la vis précédente.

Pour avoir en D le frottement contre EF, il eſt évident qu'il faudra prendre tout l'effort contre $EF = f - x$, & le multiplier par le rapport $\left(\frac{Fc}{Pg}\right)$; & comme ce frottement eſt conçu réſiſter ſelon GD, ou dans le même ſens que la dent D, il faudra l'ajouter à l'effort de cette dent ; ſavoir à p, afin d'avoir toute la preſſion contre $QP = f - x \times \frac{cF}{gP} + p = \left(\frac{fFc - xcF + pgP}{Pg}\right)$. Multipliant donc cette preſſion contre QP par le rapport $\left(\frac{Fe}{Pd}\right)$, on aura le frottement contre CB ou à la circonférence de la vis $= \left(x = \frac{\overline{fFc - xcF + pgP}}{PgPd} \times Fe\right)$. D'où l'on tirera l'égalité $(PPxdg = \overline{Ffc - Fxc + Fpg} \times Fe)$, qui donne $\left(x = \frac{\overline{Ffc + Pgp}}{PPdg + FFcc} \times Fe\right)$.

Or l'effort N ayant à vaincre le frottement en $CB = x$, & le poids D plus ſon frottement ſur AC, avec ſon frottement en EF ; ſi on retranche de l'effort f le frottement x, & qu'on regarde le poids D, & ſon frottement en EF, comme un ſeul poids agiſſant ſelon GD, l'effort $f - x$ devra être le même que le premier effort f de l'article précédent ; ſavoir $\left(\frac{\overline{\varphi b + \pi h}}{\pi b - \varphi h} \times p\right)$, en ſubſtituant au lieu de p la valeur $\left(f - \frac{xcF}{Pg} + p\right)$, c'eſt à-dire, le poids D plus ſon frottement ſur EF, ce qui donnera l'égalité $\left(f - x = \frac{\overline{\varphi b + \pi h}}{\pi b - \varphi h} \times \frac{\overline{Fcf - Fcx + Ppg}}{Pg}\right)$. D'où l'on tire $(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi h} = \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{Fcf + Ppg} + \overline{\overline{\pi b - \varphi h} \times Pg - \overline{\varphi b - \pi h} \times Fc} \times \frac{\overline{Ffc + Ppg} \times Fe}{PPdg + FFce})$, en ſubſtituant la valeur de x ci-deſſus.

Or on tire delà cette autre égalité $(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi h} \times \overline{PPdg + FFce} - \overline{\varphi b - \pi h} \times \overline{PPdg + FFce} \times Fcf - \overline{\pi b + \varphi h} \times PFFfceg + \overline{\varphi b + \pi h} \times FFcfe = \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{PPdg + FFce} \times Ppg + \overline{\overline{\pi b - \varphi h} \times Pg - \overline{\varphi b - \pi h} \times Fc} \times PFpeg)$.

D'où l'on tire en réduisant ($P^2 Pg^2 df \times \overline{\pi b - \varphi b} - PPFcdgf \times \overline{\varphi b + \pi h} = \overline{\varphi b + \pi h} \times P^2 Ppg^2 d + \overline{\pi b - \varphi h} \times P^2 Fpg^2 e$), qui donne enfin en divisant $\left(f = \frac{\overline{\overline{\varphi b + \pi h} \times Pd + \overline{\pi b - \varphi h} \times Fe}}{\overline{Pg \times \overline{\pi b - \varphi h} - Fc \times \overline{\varphi b + \pi h}}} \times \frac{Ppg}{Pd} \right)$ qui se réduit à $\left(\overline{\frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h} + \frac{Fe}{Pd}} \times p \right)$ quand $F = o$, comme dans l'article précédent.

On aura aussi $\left(p = \frac{Pfd}{Pg} \times \frac{\overline{Pg \times \overline{\pi b - \varphi h} - Fc \times \overline{\varphi b + \pi h}}}{\overline{Pd \times \overline{\varphi b + \pi h} + Fe \times \overline{\pi b - \varphi h}}} \right)$, lorsque f sera donnée.

SUITE DU SECOND MEMOIRE.

Expériences pour les frottemens des corps, dont les parties se meuvent avec différentes vitesses, lues le 7. *Juillet* 1703.

7°. J'ai pris deux planches *ABCD*, *FGHI*, (*Fig.* 11.) de 4 pouces en quarré, & tirées d'une même piece, que j'ai fait raboter tout du long avant de la couper.

1°. Chacune de ces pieces étant chargée d'un poids de 6 livres *NL*, & tirée avec un ressort *MP* sur un tapis fort uni, résistoit de 11 quarterons, la table qui portoit le tapis étant fort horisontale ; & lorsqu'on mettoit les deux ais l'un sur l'autre, comme en *X*, & les deux poids par dessus, il falloit 22 quarterons de force pour commencer à les mouvoir sur le même tapis en tirant de même.

2°. Lorsqu'on mettoit les deux ais à côté l'un de l'autre, ensorte qu'ils se touchoient, avec un des poids *N* dessus, comme en *Y*, il falloit 13 quarterons pour les mouvoir sur un plan incliné en tirant parallelement à ce plan, & en les mettant l'un sur l'autre, & le même poids *N* par-dessus, comme en *Z*, il ne falloit précisément que le même poids de 13 quarterons. Ce qui prouve que la grandeur de la surface qui frotte ne change pas le frottement, mais seulement le poids dont elle est chargée.

3°. J'ai appliqué les deux mêmes ais contre un levier *AB*, *FG*, ſoutenu contre le point fixe *E*, & ayant poſé ſur chacun les mêmes poids *N* & *L* de ſix livres, j'ai tourné une ficelle *OM* autour d'un des ais, que j'ai tirée avec le même reſſort *MP* toujours parallelement à la table qui étoit alors horiſontale & couverte du même tapis. De plus les milieux *O* & *Q* de *AB*, & *FG* étoient d'abord également éloignés de l'appui *E*, & j'ai trouvé que pour commencer à mouvoir ces deux poids, il falloit encore préciſément 22 quarterons, comme quand les ais étoient l'un ſur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, & les 2 poids par-deſſus.

4°. Ayant enſuite diviſé la diſtance *QO* du levier en 3 parties égales, j'en ai donné 2 à *QE*, & une à *EO*, afin que les viteſſes de ces 2 ais fuſſent entr'elles comme 2 à 1; & j'ai trouvé qu'il falloit 34 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de 33 qu'il auroit fallu trouver, en prenant 11 pour *N*, & 22 pour *L*, ſelon la proportion de leurs diſtances à *E*; ce qui étoit preſque inſenſible avec le reſſort dont je me ſervois.

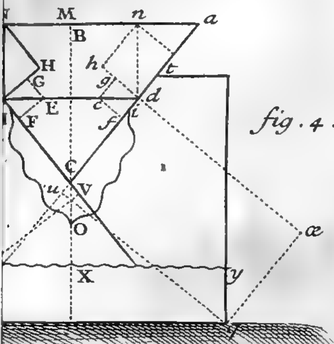
Et ayant enſuite donné 2 parties à *EO*, & une ſeulement à *EQ*, il a fallu 16 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de $16\frac{1}{2}$, en prenant toujours 11 pour *N*, & $5\frac{1}{2}$ pour *L*, ſelon le rapport des diſtances au point fixe *E*.

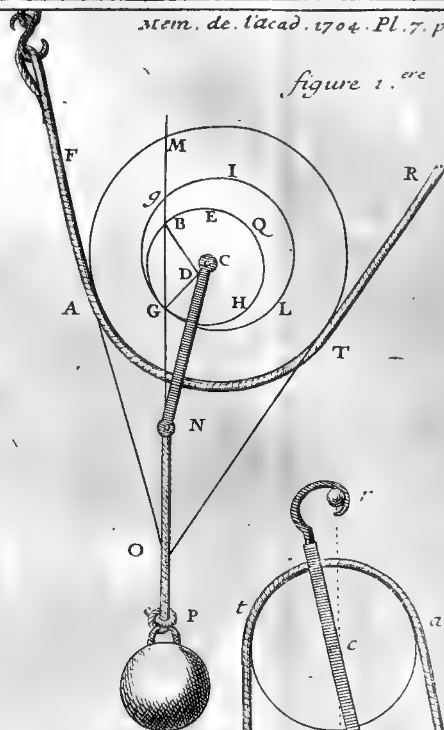
5°. J'ai enſuite diviſé *OQ* en 4 parties égales, & en ayant donné 3 à *QE*, & 1 à *EO*, il a fallu 46 quarterons pour les mouvoir, au lieu de 44, en prenant toujours 11 pour *N*, & 33 pour *L*, ſelon la proportion des parties *QE*, *EO*.

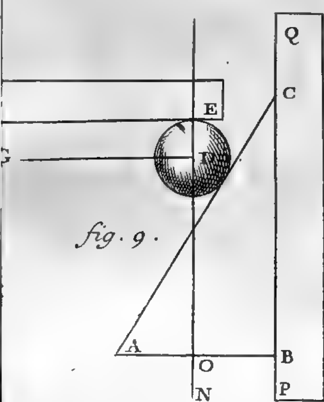
Et ayant donné une ſeule partie à *QE*, & 3 à *EO*, j'ai trouvé qu'il falloit 14 quarterons $\frac{1}{2}$, au lieu de $14\frac{2}{3}$, prenant toujours 11 pour *N*, & $3\frac{2}{3}$ pour *L*, ſelon la proportion de 3 à 1, ou de *EO* à *EQ*.

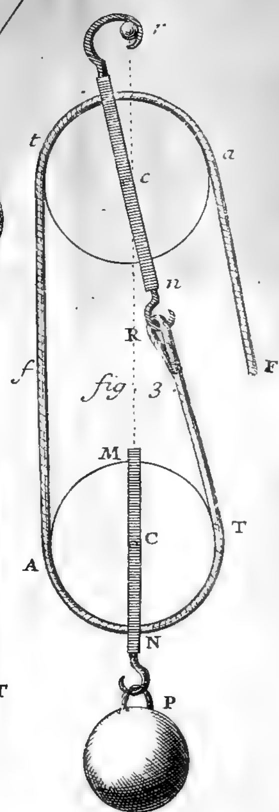
6°. Enfin j'ai diviſé *QO* en 5 parties, & en ayant donné 3 à *QE*, & les 2 autres à *EO*, il a fallu 27 quarterons pour commencer à faire le mouvement, au lieu de $2\frac{1}{2}$, donnant 11 quarterons à *N*, & $16\frac{1}{2}$ à *L*, ſelon le rapport $\frac{2}{3}$.

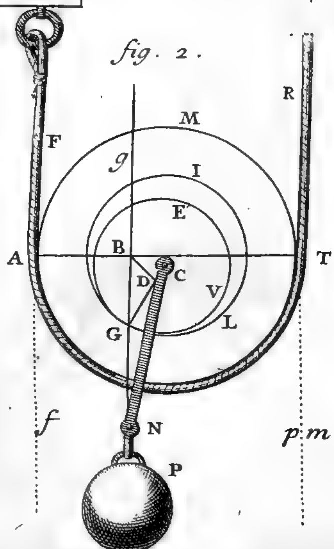
Et ayant donné au contraire 2 parties à *QE*, & 3 à *EO*, il a fallu 18 quarterons pour commencer à les mouvoir,

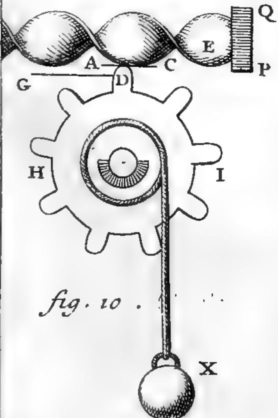

fig. 4.

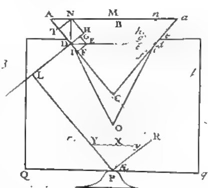

figure 1.ere

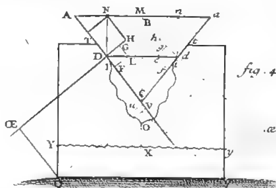

fig. 9.

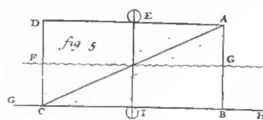

fig. 3.

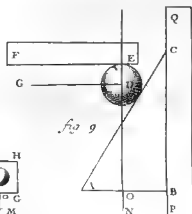

fig. 2.

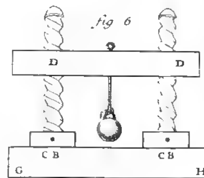

fig. 10.

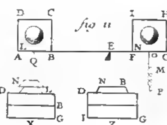

fig 3
A N M n a
B
T H
D G
I F
L
C
O
Y X R
Q P q

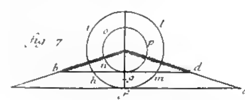

A N M n a
B
T H
D G L d
C
Œ
O
Y X y
fig. 4

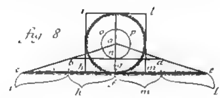

D E A
fig 5
F G
G C I B H

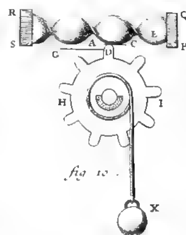

Q
F E C
G D
fig 9
O B
N P

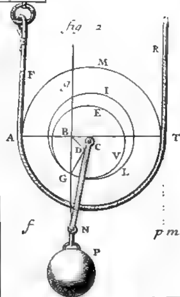

fig 6
D D
C B C B
G H

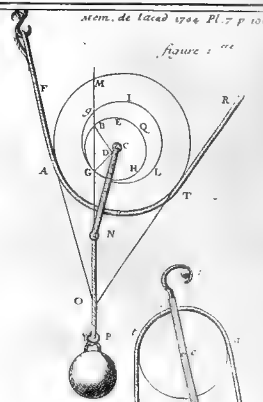

D C fig 11 I H
L E N
A Q B F G
M
P
D B
X G
D N B
I Z G

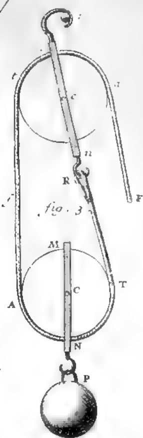

fig 7


fig 8


D
B
I Y
M Y
P
R Q
S P
G A C
H I
fig 10
X


fig 2
R
M
F
I
E
A B T
C
D V
G L
f p m
N
P


figure 1
F
M
I
R
B E
Q
C
D
A G H L
T
N
O
P


n
R
F
fig. 3
M
C
A T
N
P

au lieu de 18 $\frac{1}{3}$, en donnant 11 à *N*, & 7 $\frac{1}{3}$ à *L*, ſelon le rapport de *EO* à *EQ*, ou de 3 à 2.

Or toutes ces expériences font voir que les différentes viteſſes inſenſibles n'alterent point le rapport des diſtances.

OBSERVATIONS

DE LA

DERNIERE ECLIPSE DE LUNE.

PAR M. CASSINI.

LA derniere Eclipſe de Lune qui eſt arrivée le 17 de Juin de cette année 1704, n'a pas été obſervée à Paris, parce que l'horiſon étoit couvert de nuages à l'endroit où la Lune ſe leva, lorſqu'elle étoit prête de ſortir entierement de l'ombre. 1704. 5. Juillet.

Nous en avons deux obſervations, une qui a été faite à Modene par le Pere Fontana, Theatin, très-verſé dans les obſervations Aſtronomiques. Les nuages ne lui permirent pas de l'obſerver auſſi-tôt que la Lune fut levée. Il la vit entre les nuages à 8 heures 3 minutes pendant un très-petit eſpace de temps, lorſqu'elle recouvroit ſa lumiere, & qu'il y reſtoit environ 9 doigts d'Eclipſe. Il la vit vers la fin de l'Eclipſe, lorſqu'il étoit difficile de diſtinguer l'ombre de la pénombre ; & autant que cette difficulté le lui permit, il jugea que la fin arriva à $8^{h}\,53'$. Il lui reſta encore quelque ſcrupule ſur l'horloge dont il ſe ſervoit, qu'il ne vérifia point après l'obſervation.

L'autre obſervation de cette Eclipſe a été faite par Meſſieurs de Plantade, Bon, & de Clapies à Montpellier.

Elle s'accorde avec celle de Modene dans la grande difficulté qu'il y avoit à diſtinguer l'ombre de la pénombre ; ce qui empêcha de déterminer la grandeur des phaſes.

Autant qu'il fut permis par les nuages qui interrompoient l'obſervation, on la vit pendant 29 minutes & de-

mie ; au lieu qu'à Modene on la vit pendant cinquante minutes.

La fin à Montpellier fut marquée à 8h 15′ 6″. La fin de la pénombre à 8h 18′ 40″.

Il feroit inutile de comparer enfemble ces temps des Obfervateurs, puifque le Pere Fontana ne donne pas la fienne pour affurée, tant par la difficulté de diftinguer le terme de l'ombre, que pour n'avoir pas rectifié l'horloge par la hauteur d'une étoile fixe.

On peut plus compter fur celle de Montpellier, où l'horloge avoit été réglée par les obfervations correfpondantes du Soleil, & rectifiée deux fois après l'Eclipfe par les hauteurs de la Lire, qui donnoit l'heure dans la même feconde que la pendule.

Cette derniere Eclipfe de Lune eft arrivée fix mois & demi après la derniere Eclipfe du Soleil, dont nous obfervâmes le commencement à l'Obfervatoire Royal le 8 Decembre 1703 à 4 heures précifes du foir. Les autres circonftances de cette obfervation ont été rapportées diftinctement dans le Livre des Connoiffances des Temps de l'année 1704.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M. MANFREDI,

Sur une Eclipfe de Venus par la Lune, obfervée à Bologne le 30 Juin 1704. & rapportée par M. Maraldi.

1704. 19. Juillet. HIer le 30 Juin après midi, je finis une obfervation affez finguliere de l'occultation de Venus par la Lune en plein jour, & dans une diftance du Soleil d'environ 17 degrés. La Lune la toucha felon mon obfervation avec une Lunette de dix pieds ½ à 4 heures 30′ 15″, & elle

la couvrit toute entiere à 4 heures 30′ 33″. Mais suivant l'observation de M. Stancari, le centre de Venus fut caché par la Lune à 4ʰ 30′ 18″, & toute Venus fut couverte à 4ʰ 30′ 33″ avec une Lunette de huit pieds. Comme l'on ne voyoit point la Lune même par des Lunettes qu'avec une grande peine, & par rapport à Venus qu'on savoit lui être fort voisine, aussi-tôt que Venus fut cachée l'on ne vit plus la Lune; aussi il ne fut pas possible d'en observer l'Emersion.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune faite à Bologne le 17 Juin 1704, par Messieurs Manfredi & Stancari, & rapportée par M. Maraldi.

LEs observations des Taches ont été faites avec une excellente Lunette de dix pieds. Le temps est marqué à l'heure vraie après midi. 1704. 19. Juillet.

8ʰ	40′	47″	La Lune commence à sortir des nuages, & Proclus est sorti de l'ombre.
8	41	2	Mare Crisium commence à sortir de l'ombre.
8	42	0	L'ombre à la moitié de Mare Crisium.
8	42	22	Hermes se découvre.
8	43	0	Messale se découvre.
8	43	42	Cléomédes se découvre.
8	44	31	Mare Crisium se découvre entierement.
8	47	15	La fin de l'Eclipse.

Observations des doigts avec une Lunette de douze pieds, qui avoit un Micrometre à son foyer.

8ʰ	2′	20″	La Lune est éclipsée de huit doigts 35′, & la Lune se cache aussi-tôt.
8	39	57	La partie éclipsée de la Lune est de 1 doigt 45′
8	41	17	. . . . elle est de 1 . 17

8^h	$42'$	$17''$	. . . .	1^{doigt} $9'$
8	43	42	. . . .	0 50
8	47	$\frac{1}{4}$	Fin de l'Eclipse.	
9^h	0		Le diametre de la Lune passa par un cercle horaire en $2'$ $33''$.	

Occultation de l'Etoile β dans le Scorpion faite par la Lune le 15 Juin 1704, & observée par M. Stancari.

9	19	0	Temps vrai après midi, le diametre de la Lune étoit de $32'$ $53''$.
9	49	42	L'étoile est cachée par la Lune.
10	59	2	L'étoile sort du bord de la Lune en ligne droite avec Prostarchus & la partie supérieure de Langrenus.

REPONSE DE M. DE LAGNY

AUX REMARQUES

DE M. CHAZELLES

Sur son Mémoire Hydrographique.

1704. 1. Août. LEs Remarques de M. Chazelles ayant été imprimées dans les Mémoires de l'Académie de 1702, & mon Mémoire ne l'ayant été qu'avec ceux de 1703 en mon absence & sans ma participation, je n'ai pu y répondre plutôt.

Voici par où il commence.

1°. *La supposition de la rondeur de la terre dans la construction des Cartes & dans l'usage de la Navigation, que M. de Lagny veut abandonner, fondé sur les observations de sa mesure faite par Snellius, par Riccioli & par M. Picart, me paroît suffisamment prouvée par l'apparence de son ombre dans les éclipses de Lune, & par la figure sphérique de toutes les Planetes.* Ce sont les propres termes de M. Chazelles.

Je

Je répons premierement, que dans la construction des Cartes réduites & dans l'usage de la Navigation, j'ai supposé la rondeur de la terre. Cela est évident par le Theoreme géométrique, sur la construction de ces Cartes, rapporté dans les Mémoires de 1703, pages 99 & 100 : car j'y suppose pour méridien un cercle, & non pas une ellipse. Ce Theoreme est la seule chose essentielle de mon Mémoire, & c'est la seule dont il n'a point parlé. Comment M. Chazelles peut-il donc supposer que j'abandonne l'hypothese de la rondeur de la terre ? J'ay seulement touché en passant les raisons qui paroissent prouver sa sphéroïdité.

Je répons en second lieu, que l'*apparence de son ombre dans les Eclipses de Lune* prouve plutôt pour que contre la figure elliptique. Hevelius, dans sa Sélénographie, a remarqué qu'un diametre de l'ombre étoit beaucoup plus petit qu'il n'auroit dû l'être, suivant l'hypothese ordinaire; & dans les Journaux de Leipsik de 1686, page 52, & de 1687, page 157, on rapporte des observations sur cette ombre qui prouvent au contraire la sphéroïdité de la terre.

Enfin, *la figure sphérique de toutes les Planetes* n'est qu'un simple préjugé pour la sphéricité de la terre, & cela seulement dans l'hypothése de Copernic, où la terre est elle-même une Planete. C'est une Analogie, une pure vraisemblance qui ne peut rien prouver contre des observations exactes qui établiroient le contraire. D'ailleurs nous ne sommes assurés qu'à peu près de la sphéricité des Planetes : elles sont si éloignées & nous paroissent si petites, qu'elles pourroient être elliptiques, & nous paroître sphériques, parce que les deux angles sous lesquels nous verrions leur grand & leur petit axe ne différeroient pas sensiblement.

Jupiter a paru longtemps elliptique.

2°. M. Chazelles prétend qu'on peut aisément accorder Snellius & le P. Riccioli, quoique la différence de leurs observations aille à neuf milles Italiques par degré. *Il n'y a*, dit-il, *pour cela qu'à faire quelques petites corrections tant dans leurs mesures actuelles que dans les opérations Trigonométriques & Astronomiques, telles que l'inégalité du terrain, & la petitesse ou le défaut des instrumens peuvent laisser supposer.* Le P.

Riccioli a pris la peine de le faire par le moyen de quelques ſuppoſitions & corrections qu'on n'a pas de peine à lui accorder.

Il faut être bien prévenu pour raiſonner de cette maniere. *Il n'y a qu'à faire quelques ſuppoſitions, &c.* M. Chazelles peut voir la réfutation de cette prétendue conciliation dans la Diſſertation de M. Eiſenſchmid *de figura telluris elliptico-ſpheroïdica*, pag. 27 & 28.

3°. Après avoir tâché de concilier ces deux Auteurs, M. Chazelles veut auſſi concilier Riccioli & M. Picart. Il rejette la différence qui ſe trouve entre leurs obſervations ſur *l'erreur que peut avoir cauſé la réfraction dans la hauteur apparente des deux termes*, & ſur la *fineſſe des diviſions des inſtrumens de M. Picart.* Il ſeroit, je crois, aſſez difficile à M. Chazelles de prouver que les inſtrumens de Riccioli n'étoient pas diviſés avec autant de *fineſſe* que ceux de M. Picart. M. Chazelles auroit pû dire avec plus de raiſon que les inſtrumens de M. Picart avoient un avantage conſidérable ſur ceux de Riccioli, parce que M. Picart avoit ajouté des Lunettes à ſes inſtrumens. A l'égard de la réfraction, c'eſt une ſuppoſition purement arbitraire. Mais à quoi aboutiſſent toutes ces conjectures ſur les erreurs de Snellius & de Riccioli, puiſqu'il n'en veut conclurre que l'égalité des degrés de latitude, & que ſuivant les dernieres obſervations de M. Caſſini que M. Chazelles approuve, ſi M. Picart lui-même avoit fait des obſervations à Boulogne & en Hollande, il auroit dû trouver des grandeurs ſenſiblement différentes ? M. Chazelles veut-il que ces degrés ſoient égaux & inégaux tout enſemble ?

4°. Il s'attache enſuite à faire l'éloge des obſervations de M. Picart, & en cela je ſuis tout-à-fait de ſon ſentiment. Mais quand il ajoute : *Tout cela fait ſentir que la grandeur trouvée d'un degré de la terre eſt à cent toiſes près la véritable*, il me permettra de lui demander ce qu'il entend par ces mots, *tout cela fait ſentir.* Ce n'eſt point par ſentiment qu'on juge de ces ſortes de choſes, comme on juge d'une piece d'éloquence ou de poëſie. Il faudroit par un calcul exact fixer des limites d'erreurs fondées ſur l'expérience des plus

habiles Obſervateurs : par exemple, de tant de ſecondes ſur chaque angle obſervé, tant de pieds ſur tant de toiſes meſurées actuellement, & prendre enſuite toutes ces erreurs par excès & par défaut, on auroit de cette maniere des limites juſtes de la certitude des obſervations. Mais encore une fois, la grandeur trouvée d'un degré de latitude terreſtre par M. Picart, ne peut être la véritable qu'entre les paralleles où il a obſervé.

5°. M. chazelles ſe repentant en quelque maniere de l'approbation qu'il avoit donnée aux obſervations de M. Caſſini, ajoute qu'*on peut attendre avant que de prendre ſon parti, que les obſervations pour le méridien aient été achevées du côté du Nord, comme elles le ſont du côté du Sud.* Si l'on avoit des obſervations faites en Afrique ou en Amérique proche de l'Equateur, on auroit raiſon de dire qu'*elles ſont achevées du côté du Sud.* C'eſt là où la différence doit être plus ſenſible, en comparant ces obſervations avec celles qu'il faudroit faire proche du pole en Suede ou en Laponie, &c.

6°. *Les ſécantes augmentent autant les unes ſur les autres que les ſinus des complémens de latitude.* Si l'on prend ces termes à la rigueur, c'eſt un paralogiſme, & la propoſition eſt évidemment fauſſe. Il confond la raiſon & la proportion géométrique avec la raiſon & la proportion arithmétique. Les ſécantes augmentent beaucoup plus, & indéfiniment plus les unes ſur les autres que le ſinus de complémens. Il falloit dire, *les ſécantes croiſſent en même raiſon que les ſinus de complémens.*

7°. M. Chazelles ſe donne beaucoup de peine pour prouver qu'*il faut s'accommoder à la portée des Pilotes : que leurs calculs ne ſont pas capables de l'exactitude géométrique : qu'il eſt inutile de rechercher cette exactitude dans une partie du calcul, lorſque les autres parties ne peuvent pas l'avoir.* Je ſoutiens au contraire, & c'eſt une maxime de la derniere évidence, que lorſqu'on ne peut pas être exact en tout, il faut l'être du moins dans la *partie qui eſt ſuſceptible de cette exactitude.* C'eſt même un motif pour redoubler notre attention & notre exactitude.

Je conviens avec M. Chazelles de l'incertitude de l'estime, de celle du rhumb de vent, de la dérive, &c. Mais que conclut tout cela contre la plus grande exactitude des Cartes réduites? Je veux bien ſuppoſer avec lui que la conſtruction que je propoſe paſſe la portée ordinaire des Pilotes : mais l'uſage n'en ſera en rien plus difficile pour eux, & c'eſt uniquement de quoi il s'agit. Mon Theoreme en eſt-il moins vrai, ou moins digne de l'attention des Géometres? C'eſt plus en Géometre qu'en Hydrographe que je l'ai propoſé. Je dis plus, l'erreur des Cartes réduites peut devenir très-ſenſible proche des poles, parce que la raiſon des deux ſommes du nombre infini de ſécantes compriſes entre chaque deux arcs prochains y differe très-ſenſiblement de la raiſon ſimple des deux ſécantes de ces mêmes arcs, & l'erreur pourra être du ſimple au double, au triple & au centuple, & à l'infini.

8°. *L'Arbaleſtrille eſt le meilleur inſtrument qu'on employe à la mer.* Je ne vois pas pourquoi M. Chazelles, contre le ſentiment des plus habiles Hydrographes, préfere l'Arbaleſtrille au Quartier Anglois.

9°. *Les meilleurs Pilotes abandonnent les Tables des Sinus; les Tables Loxodromiques, &c.* Il devoit dire : *Le commun des Pilotes*, ce n'eſt pas habileté, c'eſt *ignorance* ou *pareſſe*.

10°. *L'on ſeroit trop heureux ſi toute l'erreur ſe trouvoit dans la ſuppoſition qu'on fait en ſe ſervant du Quartier de réduction, que le chemin du Vaiſſeau eſt l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, &c.* Les erreurs du Quartier de réduction ſont ſi conſidérables, que dans quelques exemples rapportés par certains Auteurs qui ſont entre les mains de tous les Pilotes, elles vont à dix & douze degrés de différence en longitude. Après cela peut-on dire qu'*on ſeroit trop heureux, &c.*

11°. Ma Remarque ſur les ſondes de haute comme de baſſe mer ne paroît praticable à M. Chazelles que dans les Cartes particulieres & Topographiques, & dans les Cartes générales on doit, dit-il, ſe contenter de celles de baſſe mer. C'eſt déja quelque choſe que ma Remarque puiſſe être utile pour les Cartes particulieres. Mais peut-on nier que

même dans les Cartes générales où l'on marque un si grand nombre de sondes de basse mer, il ne fût très-facile & très-utile d'y marquer une seule fois en chiffre romain dans chaque Port & à l'embouchure des rivieres la sonde de haute mer? Où est l'embarras, & l'utilité n'est-elle pas évidente?

12°. *On peut marquer les courans par des traits.* M. Chazelles remarque que cela ne se peut à l'égard des courans qui ne sont pas réglés. Hé, qui en doute! La comparaison que je fais des vents alisés qui sont marqués de même dans des Cartes Angloises, ne fait-elle pas voir que je n'ai entendu parler que des courans réglés? On ne sauroit marquer sur une Carte le cours des vents irréguliers; on ne peut pas non plus y marquer ceux des courans qui varient : mais on le pourroit, & on le devroit faire à l'égard des courans réglés & sensibles. M. Chazelles ne niera pas qu'il n'y en ait, les uns en tout temps, les autres par rapport à l'heure, à l'âge de la Lune; & on pourroit les marquer tous, les premiers absolument suivant leur direction, les autres avec des marques respectives au temps où ils arrivent. Ce que M. Chazelles rapporte de l'irrégularité des courans sur la côte de Poitou, ne prouve donc rien absolument contre moi.

Je conclus que mon Théoreme sur la construction des Cartes réduites, & toutes mes Remarques sur les Cartes marines en général subsistent en leur entier.

Il faut remarquer par rapport à ce Théoreme que dans les pages 99 & 100 des Mémoires de 1703, il faut entendre par le mot d'hyperbole équilatere, une hyperbole formée par la somme des sécantes du quart de cercle, de même que l'hyperbole ordinaire est formée par les sécantes du triangle rectangle. C'est la Courbe *AQRS*, &c. qui est l'hyperbole dont j'entens parler, & la Courbe *AKLM*, &c. est l'hyperbole ordinaire.



TROISIEME MEMOIRE.

Des Poulies & de leurs Tourillons.

PAR M. PARENT.

1704. 1. Août. 1°. SOit une poulie *AMT* (*Fig.* 1.) ſoutenue ſur la corde *FATR*, *GIL* un trou autour du centre de la poulie qui ſert de paillier, *GEH* le tourillon fixe avec la chape *CN* dont *G* ſoit le centre, *P* le poids ſuſpendu à la chape par la corde *PN*, *G* le point d'attouchement du tourillon & du paillier lorſque la puiſſance motrice *F* tirant la corde *AF* a mis le tourillon *GEH* en état de commencer à gliſſer, de ſorte que *G* ſoit le plan d'équilibre du tourillon : il eſt évident que la verticale *PN* étant continuée paſſera par *G*, puiſque *G* eſt le point de ſuſpenſion de *P*. On ne doit pas douter non plus qu'ayant prolongé les directions *FA*, *RT*, elles ne ſe coupent ſur *NP* comme en *O*, puiſqu'autrement le poids *P* ne ſeroit pas ſoutenu par les puiſſances *F* & *R*, & ne demeureroit pas en repos, comme on le ſuppoſe. L'équilibre étant donc ainſi établi entre *PE* & *R*, & entre *P* & le frottement du plan *G*; il eſt évident que ſi l'on prend ſur *ON* prolongée la partie *BG* pour marquer le poids *P*, que l'on mene le rayon *CG*, & ſur *CG* la perpendiculaire *BD*; *BD* ſera à *DG*, comme le frottement du tourillon ſur le paillier *IGL* eſt à ſa peſanteur.

De plus le poids *P* étant ſoutenu par les deux puiſſances *F*, *R*, il eſt évident que la verticale *GP* eſt leur direction compoſée. Puis donc que dans l'état de l'équilibre tout eſt fixe, ſi l'on veut regarder le tourillon *GEH* comme immobile & fixe, & la puiſſance *F* comme vaincante la puiſſance *R* autour du point fixe *G*, on tombera dans le cas où les deux puiſſances *F* & *R* appliquées à la circonférence d'une même roue, font équilibre entr'elles autour d'un tourillon *GEH* immobile, qu'on examineradans le Mémoire ſuivant.

Mais comme en tirant la corde *AF* pour amener le

tourillon GEH ſur le plan d'équilibre G, les directions FA, RT, qui d'abord faiſoient des angles égaux en O avec NP, changent continuellement pour en faire d'inégaux; cela pourroit apporter quelque difficulté à déterminer la force F, qui ne ſeroit pas récompenſée par le peu de fruit qu'on en retireroit. C'eſt pourquoi nous ſuppoſerons maintenant les directions AF, RT, toutes deux verticales ou paralleles à GP (*Fig.* 2.) qui eſt le cas le plus d'uſage, réſervant le cas général pour le Mémoire ſuivant.

Menant donc la droite AT qui ſera parallele à l'horiſon, comme il eſt aiſé de le voir, & prolongeant la verticale PG ſur AT en B, menant BD perpendiculaire à CG, on aura les triangles rectangles ſemblables CGB, BGD, à cauſe de l'angle commun G. C'eſt pourquoi ſuppoſant que BD ſoit à DG, comme f à p; appellant AC ou CT, a; CG, b; F, x; & P, m; on aura l'Analogie $BG \mid BD \mid\mid \sqrt{p^2+f^2} \mid f \mid\mid CG = b$ $\left(CB = \frac{bf}{\sqrt{p^2+f^2}}\right)$, d'où l'on tirera $\left(BT = \frac{a\sqrt{p^2+f^2}+bf}{\sqrt{p^2+f}}\right)$. Mais on a par les principes de Statique l'Analogie: $AT = 2a \mid BT = \frac{a\sqrt{p^2+f^2}+bf}{\sqrt{pm+f}} \mid\mid P = M \mid \left(\frac{am\sqrt{p^2+f^2}+mbf}{2a\sqrt{p^2+f^2}} = F\right)$, qui devient $\left(F = \frac{2}{2}\right)$ quand $f = 0$, comme on le voit.

Si l'on veut avoir R, on aura par les mêmes principes de Statique l'Analogie: $AT = 2a \mid AB = \frac{a\sqrt{p^2+f_2}-fb}{\sqrt{p^2+f_2}} \mid\mid P = M \mid \left(R = \frac{am\sqrt{p^2+f_2}-fmb}{2a\sqrt{p^2+f^2}}\right)$, qui devient $\frac{m}{2}$ lorſque $f = 0$.

Donc $F \mid R \mid\mid a\sqrt{p^2+f^2}+fb \mid a\sqrt{p^2+f^2}-bf$.

On aura donc auſſi $\left(m = \frac{2aF\sqrt{p^2+f_2}}{a\sqrt{p^2+f_2}+bf}\right) = P$, lorſque F ſera connue, & m inconnue; ou $\left(m = \frac{2a\sqrt{p_2+f^2}R}{a\sqrt{p^2+f^2}-fb}\right)$.

2. Si l'on veut ſuppoſer au contraire que la puiſſance f

tirant de haut en bas soutienne le poids p ou m au moyen de la corde fMp passée par-dessus la poulie AMI (*Fig.* 3.), on aura $\left(F = \frac{mbf + am\sqrt{p^2+f^2}}{a\sqrt{p^2+f^2} - fb}\right)$, qui se réduit à m lorsque $f = o$.

Et si l'on veut comparer cette valeur avec celle de F du premier cas de cet article, on verra que F dans le premier cas est à F dans le second réciproquement, comme $(a\sqrt{p^2+f^2} - fb)$ est à $2a\sqrt{p^2+f^2}$, c'est-à-dire, comme 1 à 2 lorsque $f = o$.

On aura donc aussi dans ce 2[d] cas $\left(\frac{aF\sqrt{p^2+f^2} - fFb}{a\sqrt{p^2+f^2} + bf} = m\right)$ lorsque F sera connue, qui donne aussi $F = m$, quand $f = o$.

3°. Lorsque le tourillon GEH (*Fig.* 1.) sera fixe avec la poulie (ce qui réussit toujours mieux dans la pratique), le seul changement qui arrivera, est que l'attouchement g sera sur la partie opposée du paillier de la chape au point où la direction PN la rencontre, à cause que PNG fait des angles égaux en G & g, avec la circonférence du paillier $GgIL$. Donc puisque les angles des directions FAO, RAO, avec GPO seront les mêmes, & P le même que dans le premier cas, il est évident que les puissances F & R seront encore les mêmes.

Au reste nous avons supposé le diametre du tourillon à fort peu près égal à celui de son paillier comme dans l'usage ordinaire, laissant le reste aux curieux Géometres.

Des Mouffles ou Poulies composées à plaisir.

4°. Enfin si l'on a un poids P (*Fig.* 30.) suspendu à une poulie AMT par sa chape MCN au moyen de la corde fAT, qui passant par-dessous AMT va s'attacher d'un bout R à la chape mcn d'une seconde poulie amt suspendue en r, & qui tournant ensuite par-dessus amt, est tirée par la force F, en telle sorte que les tourillons C & c de ces

ces deux poulies soient prêts à glisser ; on trouvera la force F, en cherchant d'abord celle qu'il faut mettre en f pour soutenir le poids P donné, comme dans le premier cas. Regardant ensuite la force connue f comme un poids à soutenir par la force F, par dessus la poulie amt, on aura comme dans le second cas la force F capable de soutenir f, & par conséquent P ; & ainsi d'un plus grand nombre de poulies tant supérieures qu'inférieures.

Au reste il est évident que les tourillons Cc doivent être les moindres qu'il soit possible, puisque si dans quelqu'une des valeurs de F ci-dessus on suppose ($b=o$), les frottemens s'évanouiront.

Il resteroit d'examiner la résistance causée par la dureté des cordages ; mais nous remettrons ceci à un autre Mémoire, comme étant d'un autre nature.

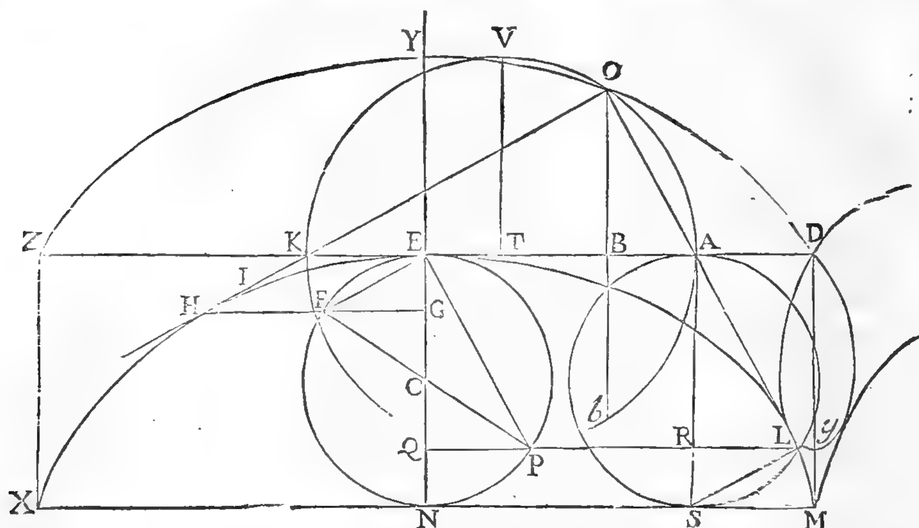
DESCRIPTION D'UN LIEU GEOMETRIQUE,

Où sont les sommets des angles égaux formés par deux Touchantes d'une Cycloïde.

PAR M. DE LA HIRE.

SOit une Cycloïde $XELM$ dont le cercle générateur est EPN ; la base XM, & l'axe EN. Soit achevé le rectangle XD sur la base XM. De quel point A on voudra de la ligne ED soit mené AL touchante de la Cycloïde en L ; & sur ED soit pris AK égale à ED ; & sur AK pour diametre soit décrit le cercle $bAOK$. Ayant prolongé LA jusqu'au cercle AOK en O ; du point O soit abaissé OBb perpendiculaire sur ED, & du point A soit aussi abaissé AS perpendiculaire sur NM. Si l'on décrit sur AS le demi-cercle générateur ALS, on sait par les propriétés de la Cycloïde, que ce cercle passera par le 1704. 26. Juillet.

point touchant L, & que la partie de la base SM sera égale à l'arc SL, qui sera aussi égal à AD. Mais ayant mené LS & LRQ parallele à MN, le triangle LRS sera semblable au triangle ARL & au triangle OBA.



Il s'ensuit donc de là que l'arc AO ou Ab du cercle AOK est semblable à l'arc SL du demi cercle SLA; & par conséquent il y aura même raison du diametre AS au diametre AK, que de l'arc SL ou de la ligne droite AD, à l'arc AO, ou que de la corde SL à la corde AO.

La ligne $LRPQ$ étant parallele à la base XM, rencontrera au point P le cercle générateur EPN dont le diametre est placé sur l'axe de la Cycloïde, & EP sera parallele à AL, & PN parallele à LS.

Mais si par le point P du cercle générateur & par son centre C on mene le diametre PCF qui rencontre le cercle en F, & qu'on tire ensuite la corde EF; & que par le point F on mene la ligne GFH parallele à NM qui rencontre la Cycloïde en H, on fait que la ligne HI parallele à EF touchera la Cycloïde en H.

Je dis maintenant que cette ligne HI étant prolongée

passera par le point K, & ensuite par le point O du cercle AOK.

Par la construction AK est égale à DE, & par conséquent EK sera égale à AD qui est égale à l'arc SL ou NP ou EF. Mais l'arc EF est égal à FH; donc EK est égale à HF: mais HI & FE sont paralleles; donc HI passe en K en formant le parallelograme $EFHK$. HK doit aussi passer en O: car les deux lignes HIK, LAO sont paralleles aux deux lignes EP, EF qui forment un angle droit dans le demi cercle PEF, elles formeront donc aussi un angle droit par leur rencontre; & comme elles passent par les extrémités du diametre KA du cercle AOK, elles se rencontreront nécessairement en O sur sa circonférence.

Il s'ensuit donc de là que les deux touchantes OL, OH de la Cycloïde menées du point O, feront un angle droit dans ce point O.

Je dis maintenant que tous les points comme O d'où deux touchantes menées à la Cycloïde contiennent un angle droit, sont dans la courbure d'une Cycloïde $ZYDy$, qui est le lieu de ces angles droits qui sont faits par les touchantes de la Cycloïde proposée.

Je dis de plus que cette Cycloïde a pour cercle générateur le cercle AOK dont le diametre KA est égal à la circonférence du demi cercle générateur de la Cycloïde proposée: mais que cette Cycloïde est une Cycloïde raccourcie, & qu'il n'y a que la portion DYZ qui est au-dessus de la ligne DE, qui passe par le centre de son cercle générateur, dont tous les points servent à mener deux touchantes à la Cycloïde proposée.

Par la démonstration précédente il est évident que tous les points comme O seront tous dans la circonférence du même cercle AOK: mais dans des différentes positions de son diametre KA sur la ligne DE.

Nous avons vû que la ligne AD, où l'arc SL sera toujours à l'arc AO dans une même raison, qui est celle des diametres AS à AK, ou EN à NM, ou ED.

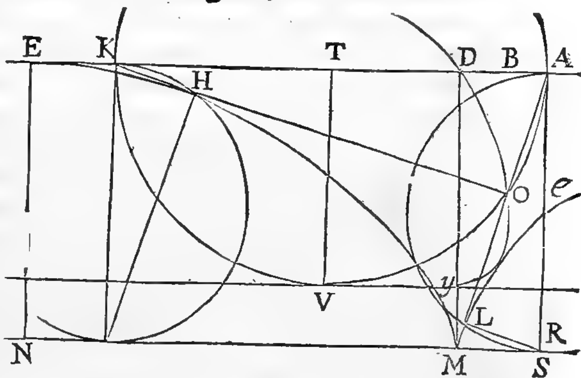
Si l'on place donc le diametre du demi cercle AOK sur

DE, & que le point décrivant *O* étant en *D*, le diametre & le centre se meuvent sur *DE* d'un mouvement égal à celui que le point décrivant de la Cycloïde proposée feroit sur son cercle générateur si elle commençoit en *M* en allant par *L* en *E*, ou égal à celui qui feroit le centre du cercle *A L S*: car dans la Cycloïde *MLE*, le mouvement du centre du cercle générateur sur une ligne parallele à sa base, est égal à celui du point décrivant, ensorte que quand le point décrivant de la Cycloïde *M L E* aura parcouru l'arc *S L*, l'extrémité de son diametre qui étoit en *M* aura parcouru la partie *M S* de sa base, laquelle est égale à l'arc *S L*; & de même l'extrémité *A* du diametre *A D* du cercle générateur du lieu *D O Y* aura parcouru la partie *D A* égale à *S M* : mais le point décrivant *O*, qui étoit d'abord en *D*, aura parcouru l'arc *A O* qui aura même raison à *D A* ou à l'arc *S L*, que son diametre *A K* au diametre *E N*; alors la ligne menée du point *O* au point *L* qui passera par *A*, touchera la Cycloïde proposée en *L*, ce qui est évident par ce qui a été démontré ci-devant. Mais si dans le même-temps que le demi cercle générateur s'est mu de *M* en *S*, le demi cercle générateur *EFN* dont le diametre étoit posé sur l'axe, s'est mu de *E* en *K* sur *E K* égale à *S M*, le point décrivant ayant parcouru l'arc *E F* égal à l'arc *S L*, ou à *S M*, ou à *E K*, ce point décrivant sera sur la Cycloïde en *H*, & la ligne menée du même point *O* au point *H* sera aussi touchante en *H*, ce sera par tout de même. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit par là que lorsque le point décrivant *O* de la Cycloïde *DOY* sera venu en *Y* sur l'axe *NE* de la Cycloïde proposée ; alors le point décrivant *S* & le point décrivant *E* de la Cycloïde proposée chacun sur leur demi cercle, seront venus dans la ligne parallele à la base, laquelle passe par le centre *C*; & les deux touchantes menées du point *Y* rencontreront la Cycloïde dans ces points, & feront un angle droit en *Y*.

Mais comme la Cycloyde n'est point une ligne terminée, & qu'on peut l'imaginer continuée à l'infini, en sup-

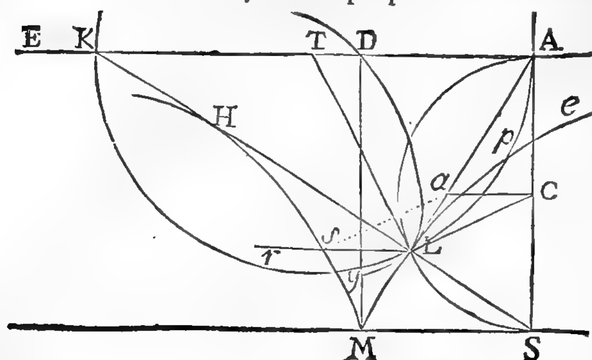
posant que le cercle générateur se meuve toujours d'un même mouvement, & le point décrivant aussi; ce qui, à la vérité, ne sera qu'une même Cycloïde répétée, dont l'une recommencera sur la base commune où la précédente finira : aussi si l'on acheve la Cycloïde du lieu, qui est une Cycloïde raccourcie, car elle aura sa demi base égale à son axe; ce qui se fera en achevant son cercle générateur, & supposant que son diametre *AK* se meuve toujours sur *ED*, pendant que le point décrivant *O* parcourt le cercle, & l'un & l'autre dans les mêmes raisons qu'auparavant, il arrivera que de tous les points de la partie du lieu qui est au delà de *MD*, on pourra mener deux touchantes, l'une à une des Cycloïdes, & l'autre à celle qui la suit immédiatement, lesquelles touchantes feront un angle droit dans ce point du lieu d'où les touchantes sont menées, ce qui se démontrera comme le cas précedent, & ce qu'on peut voir dans cette Figure, où l'on a fait la même construction au-delà de la ligne *DM* qu'on avoit faite de l'autre côté, & où le point *y* est le commencement de la Cycloïde du lieu sur sa base : car du point *O* on peut mener la touchante *OH* à la Cycloïde *MHE*, & la touchante *AOL* à l'autre Cycloïde *MLe*.



Mais comme la Cycloïde du lieu peut être continuée ou répétée comme l'autre, il arrivera qu'il y aura toujours deux points sur le lieu, d'où l'on pourra mener la même touchante à la Cycloïde proposée; & du point *y*, qui est le commencement de la Cycloïde du lieu sur sa base, on peut mener une touchante à chaque Cycloïde, laquelle sera la même que celle qui est menée du point *Y*,

où le lieu rencontre l'axe de la proposée.

Enfin l'on doit remarquer que la Cycloïde du lieu touchera la Cycloïde proposée : car les deux cercles générateurs ayant toujours le point *A* commun sur la ligne *DE* dans toutes leurs différentes positions en se mouvant, comme il paroît par la génération : aussi la ligne *K S* y demeurera toujours la même ; & cette



ligne *K S* passant en *L* où les deux cercles se coupent, lorsque le point *L* sera sur la Cycloïde proposée, il sera aussi sur celle du lieu : car les arcs *S L*, *A L* des générateurs seront semblables, & ce sera ce point *L* dans cette position qui formera le point touchant des deux Cycloïdes, & la ligne *A L* les touchera toutes deux dans ce même point ; ce que je démontre comme il suit.

Lorsque le point décrivant de la Cycloïde proposée *M L e* sera arrivé en *L*, c'est-à-dire, lorsque l'arc *SL* sera égal à la partie de la base *SM*, & que le cercle générateur sera en *A L S*, & son diametre en *A S*, on sait que la ligne *A L* touche la Cycloïde *M L e* au point *L*. Mais alors le cercle générateur du lieu *y L D* sera dans la position *A L K* ; si l'on mene donc les rayons *T L*, *C L* au point commun *L*, l'angle *T L C* sera droit, & puisque le point décrivant du lieu étant en *L* se meut d'un mouvement composé de deux autres, l'un par *L C* touchante de son cercle générateur, & l'autre par *L r* parallele à *K A* ; pendant que le mouvement par *L r* sera égal à *A D* ou à l'arc *S L* par la génération du lieu, le mouvement par *L C* doit être égal à l'arc *L p A*. Mais l'arc *S L* est à l'arc *L p A* qui lui est semblable, comme leurs rayons, ce qui est comme

LC à LT, ou comme leurs cordes semblables SL, AL. Enfin si par le centre C on mene Ca parallele à AK qui rencontre AL en a, on aura à cause des triangles semblables ACa, ALS, aC ou sL son égale sur Lr, à CA ou CL son égale, comme SL à LA; donc AaL est touchante de la Cycloïde du lieu au point L.

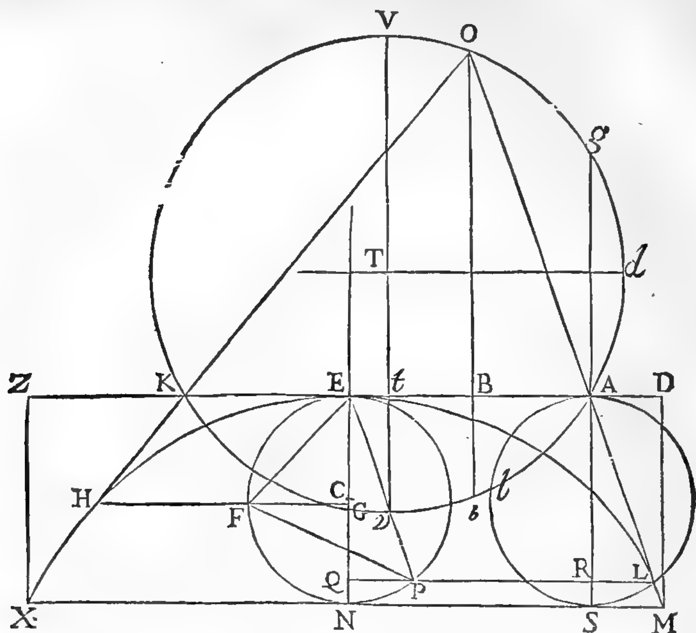
Il me reste maintenant à chercher le lieu du sommet de tous les angles aigus & obtus égaux entr'eux, lesquels sont formés par les touchantes d'une Cycloïde.

La Cycloïde XEM étant décrite comme ci-devant par le moyen du cercle générateur $EPNF$, dont le diametre est posé sur l'axe de la Cycloïde EN, & le rectangle DX étant achevé; si de quel point L on voudra de la Cycloïde on mene la ligne LQ parallele à la base, laquelle rencontre l'axe en Q, & le cercle générateur en P; du point E ayant mené la corde EP, on fait que la ligne LAO parallele à EP, touchera la Cycloïde en L. *Voyez la Figure suivante.*

Mais du point A ayant abaissé AS perpendiculaire sur la base NM, & sur cette ligne ayant décrit le cercle générateur ALS, il est évident aussi qu'il rencontrera la Cycloïde en L, & que l'arc SL ou NP, ou bien les lignes SM ou AD seront d'une même grandeur, & par conséquent la ligne EA sera égale à l'arc EP.

Soit maintenant l'angle PEF dans le cercle générateur, lequel soit proposé pour celui que les touchantes de la Cycloïde doivent faire, soit qu'il soit obtus ou aigu, comme il est représenté dans la Figure; & soit pris sur DZ la grandeur AK égale à l'arc PEF du cercle générateur, & sur AK soit décrit le cercle $AVKv$, dont l'arc AVK reçoive des angles égaux à l'angle proposé PEF.

Il est évident que si par le point F on mene la ligne FH parallele à la base MX qui rencontre la Cycloïde en H, & que par le point H on mene HK parallele à FE, laquelle touchera la Cycloïde en H, cette ligne HK étant prolongée, rencontrera la touchante LAO sur le cercle en O; & par conséquent ces deux touchantes HK, LA contiendront un angle LOH égal à l'angle proposé



P E F. Car les deux touchantes *H K*, *L A* doivent faire un angle égal à l'angle *P E F*, puiſqu'elles ſont paralleles aux deux lignes *PE*, *FE* qui font ce même angle ; & de plus cet angle doit être ſur le cercle en *O*, puiſque les lignes *A O*, *K O* s'appuient ſur la corde d'un arc *A O K* qui doit recevoir cet angle.

On voit donc par-là que toutes les touchantes de la Cycloïde qui contiendront un angle égal à l'angle propoſé, feront toutes à la circonférence d'un même cercle *A O K*, dont la même corde *A K* ſera toujours placée ſur *D Z* : car cette corde ſera toujours égale à un arc égal à *PE F*, quelque diſpoſition que puiſſent avoir ces touchantes, puiſque l'angle *PE F*, en quelque endroit qu'il ſoit dans le cercle générateur, ſera toujours à une circonférence égale à *PE F*, ou appuyé ſur une corde égale à *PF.*

Maintenant ſi l'on abaiſſe *O B b* perpendiculaire ſur *KA*, l'arc

l'arc *Ab* dans le cercle *KOAb* fera femblable à l'arc *PN* ou *LS* du cercle générateur ; c'eft pourquoi dans toutes les différentes pofitions de la corde *KA* fur *ZD*, & à proportion que le point *A* s'approchera de *D*, le point *O* defcendra fur l'arc *OVA*, enforte qu'il y aura toujours même raifon du mouvement du point *O* fur fon cercle *KVA*, que du mouvement du point décrivant *L* de la Cycloïde fur fon cercle générateur ; & les arcs de ces mouvemens feront entr'eux en même raifon que les cordes des femblables qui foutiennent ces arcs, comme la corde *SL* à la corde *Ab* ou *Og*, ou bien comme le diametre du cercle générateur *EN*, au diametre *Vv* du cercle *KOA*.

Il s'enfuit donc delà que le point *O* fe meut par la compofition de deux mouvemens, l'un par le tranfport du point *A* de la corde *KA* du même cercle *KOA* fur la ligne *ZD* prolongée tant qu'on voudra, & l'autre par le mouvement du point *O* fur la circonférence du cercle *KOA*. Et les mouvemens de ces deux points étant toujours en même raifon; favoir, celui du point *A* comme les arcs *SL*, & celui du point *O* comme les arcs femblables *Ab*, la Courbe que décrit le point *O* fera une Cycloïde, qui eft le lieu cherché.

Il eft facile à voir par ce qui a été démontré de l'angle droit, & par la génération de cette Cycloïde, qu'elle eft toujours raccourcie, foit que l'angle propofé foit obtus ou aigu, puifque la corde *AK* étant égale à l'arc *PEF* du cercle générateur, elle fera toujours plus grande que la corde femblable *PF* qui foutient l'angle *PEF*; & par conféquent le cercle générateur du lieu *KOA* fera toujours plus grand que le cercle générateur de la Cycloïde propofée, & le mouvement du point *O* fur fon cercle par des arcs en même raifon que celui du point *A* fur *ZD*, qui eft celui du point *L* par des arcs femblables à celui du point *L*, fera plus grand que celui du point *A* fur *ZD*, ou que celui du centre *T* du cercle *KVA* fur *Td* parallele à *ZD*, ce qui fait la Cycloïde raccourcie : car dans la fimple ces deux mouvemens font égaux.

On démontrera auffi que la Cycloïde du lieu doit tou-

cher la Cycloïde proposée & répétée dans un point qui sera formé par le point *l*, qui est la rencontre des deux cercles générateurs, & où se rencontrent les deux points décrivans ; & la corde *Al* sera la touchante commune des deux Cycloïdes, comme pour l'angle droit.

Il ne me reste plus qu'à démontrer que le cercle générateur du lieu ne rencontrera jamais la base *XM* de la Cycloïde proposée, quelque angle que les touchantes puissent faire, & qu'il s'en approchera de plus en plus à proportion que l'angle proposé sera plus obtus : car lorsqu'il vient égal à deux droits, la Cycloïde du lieu se confond avec la Cycloïde proposée, & les cercles générateurs sont les mêmes.

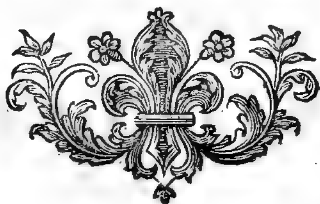
Par la construction on voit que le diametre *Vv* du générateur du lieu, aura même raison au diametre *EN* du générateur de la Cycloïde proposée, que la corde *KA* ou l'arc *PEF* à la corde *FP*, ce qui sera comme les rayons des cercles *TV* à *CE*.

Mais si le diametre *Vv* du cercle générateur du lieu, est posé sur l'axe *NE* de la Cycloïde, & si la corde *FP* dans le générateur de la Cycloïde soutient en *E* l'angle proposé, on aura toujours pour tous les angles la partie *EA* égale à

l'arc EP. Si l'on mene donc NP prolongée jusqu'à ED en p, je dis que Ep sera toujours plus grande que EA; ce que j'ai démontré dans le troisieme Lemme de mon Traité des Epicycloïdes page 16. en considérant la ligne ED comme un cercle infini; & par conséquent la ligne Av parallele à NP ou perpendiculaire à AO qui est parallele à PE, donnera toujours le point v sur EN non prolongée, pour l'extrémité du diametre du cercle $VOAv$ générateur du lieu.

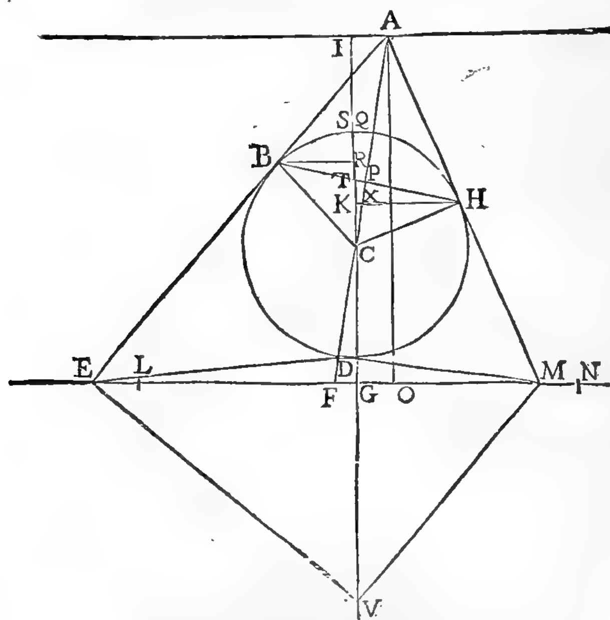
Il s'ensuit donc delà que le commencement de la Cycloïde du lieu sera toujours sur la ligne parallele à ED, laquelle passera par le point v, & dans le point où elle rencontrera la ligne DM; & comme le diametre du générateur du lieu est donné, on pourra décrire ce lieu.

J'ai démontré dans mon Traité des Sections Coniques, *in-folio*, quel étoit le lieu qui étoit formé par les sommets des angles droits que faisoient les touchantes des trois Sections Coniques, & celui des angles aigus & obtus de la Parabole; & j'avois seulement averti qu'on trouveroit celui des angles aigus ou obtus de l'Ellipse & de l'hyperbole en se servant de la même méthode; mais au mois de May 1694 j'ai lu dans l'Assemblée de l'Académie une démonstration générale de tous ces lieux, laquelle je donne ici à cause qu'elle n'a point été imprimée, & qu'elle est entierement différente de la premiere.



CONSTRUCTION
GENERALE
Des lieux où ſont les ſommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui ſont formés par les Touchantes des Sections Coniques.

PAR M. DE LA HIRE.



1704. 2. Août. LE cercle *SBDH* étant donné, & la poſition de la ligne droite *EFN* par rapport au cercle, & ayant pris deux points *EM* tels qu'on voudra ſur cette ligne, d'où l'on mene les touchantes *EBA*, *MHA* au cercle, leſquelles ſe rencontrent en *A*, on cherche la poſition du point *A*.

Du point *A* ſoit la perpendiculaire *AI* ſur le diametre

ICD du cercle donné, & que ce diametre *ICD* ſoit perpendiculaire à la ligne donnée *EN*, laquelle il rencontre en *G*.

Soit le rayon du cercle *CB* ou $CS=r$. $CI=$. $IA=x$. $CG=d$.

A cauſe des touchantes *AB*, *AH*, & du diametre *AC* & de ſa rencontre *P* avec *BH* qui joint les points touchans, on aura *CP*, *CQ*, *CA* continuellement proportionnelles : mais $CA=\sqrt{yy+xx}$, donc $CP=\frac{rr}{\sqrt{yy+xx}}$.

On connoît par les propoſitions du premier Livre de mes Sections Coniques, *in-folio*, que toutes les lignes comme *BH* qui joignent les points touchans des touchantes qui ſont menées de chaque point de la ligne *AI*, paſſeront par le point *T* du diametre *IC*, enſorte que les points *DTSI* diviſeront la ligne *ID harmoniquement*; & par conſéquent *CT*, *CS*, *CI* feront trois lignes en proportion continue ; c'eſt pourquoi $CT=\frac{rr}{y}$.

Maintenant à cauſe des angles droits *CIA*, *CBA*, on aura $AB=\sqrt{yy+xx-rr}=AH$.

On aura auſſi $CI \mid IA \parallel CP \mid PT=\frac{rr}{y\sqrt{yy+xx}}$.

Mais pour abréger ſoit poſé $zz=yy+xx$.

On aura donc le quarré de *BP* égal au quarré de *CB* moins le quarré de *CP*, ce qui eſt $\sqrt{rr-\frac{r^4}{zz}}$, ou bien $BP=\frac{r}{z}\sqrt{zz-rr}$.

Et par conſéquent $BT=\frac{r}{z}\sqrt{zz-rr-\frac{xrr}{yz}}$, ou bien $\frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}$

A cauſe des triangles ſemblables *CTP*, *BTR*, on a $CT \mid BT \parallel CP \mid BR$, ce qui eſt en termes analytiques $\frac{rr}{y} \Big| \frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}} \Big\| \frac{rr}{z} \Big| \frac{\frac{r^3}{zz}}{\frac{rr}{y}}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}=BR$, ce

qui se réduit à $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}=BR$.

Mais aussi $CT \mid PT \parallel BT \mid TR$, ce qui est en termes analytiques $\frac{rr}{y}\mid\frac{xrr}{yz}$, ou bien $z \mid x \parallel \frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}} \mid \frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}=TR$.

De plus à cause des triangles semblables BRC, AOE, on a $BR \mid CR \parallel AO$ ou $IG \mid OE$, ce qui est en termes analytiques $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}\mid\frac{rr}{y}+\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}\parallel$; ou bien ayant divisé par $\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}$, on réduit ce premier rapport à $\frac{ry}{zz}\mid\frac{rr}{y\sqrt{zz-rr-rx}}+\frac{rx}{zz}$, ou bien multipliant par zz; & divisant par ry, on a $1\mid\frac{rzz}{yy\sqrt{zz-rr-rx}}+\frac{x}{y}\parallel y+d\mid\frac{yrzz+drz}{yy\sqrt{zz-rr-rxy}}+\frac{yx+dx}{y}=OE$, & delà on tirera la valeur de GE $\frac{yrzz+drzz}{yy\sqrt{zz-rr-rxy}}+\frac{xd}{x}=GE$.

Maintenant si du point H on mene HK perpendiculaire à IG & qui coupe CA en K, on aura les triangles semblables HKT, CPT, & par conséquent $CT \mid PT \parallel HT \mid TK$, ce qui est $z\mid x\parallel\frac{r}{x}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}=TK$.

Mais aussi on aura $CT \mid CP \parallel HT \mid HK$, ce qui est $\frac{rr}{y}\mid\frac{rr}{z}\parallel$ ou bien $z\mid y\parallel\frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}=HK$.

Et à cause des triangles semblables CHK, MAO, on a $HK \mid CK = CT - TK \parallel AO \mid OM$, ce qui est $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{rr}{y}-\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}$, ou bien en divisant ce rapport par $\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}$; & le divisant encore par ry, & multipliant ensuite par zz, on aura $1\mid\frac{rzz}{yy\sqrt{zz-rr+rxy}}-\frac{x}{y}\parallel y+d\mid\frac{yrzz+drzz}{yy\sqrt{zz-rr+rxy}}-\frac{yx-dx}{y}=OM$;

& si l'on ajoute à OM, $GO = x$, on aura $\frac{yrzz + drzz}{yy\sqrt{zz - rr} + rxy} - \frac{dx}{y} = GM$.

On a fait toute l'opération précédente pour trouver les valeurs de GE & de GM: mais il faut remarquer que si la ligne EFN passoit au-dedans du cercle, ou si elle le touchoit, il y auroit quelque changement dans les valeurs trouvées & dans les signes, comme aussi suivant les différentes positions des points EM par rapport à IG: mais ces cas différens ne changent pas l'opération ni les dimensions des inconnues.

Maintenant si l'on fait un produit de GE par GM, & qu'on le pose $= pp$, on aura une équation qui se réduira à $yyrrzz + 2ydrrzz + ddrrzz - 2xxrrdy - xxddrr - xxddyy = ppy^4 - pprryy$.

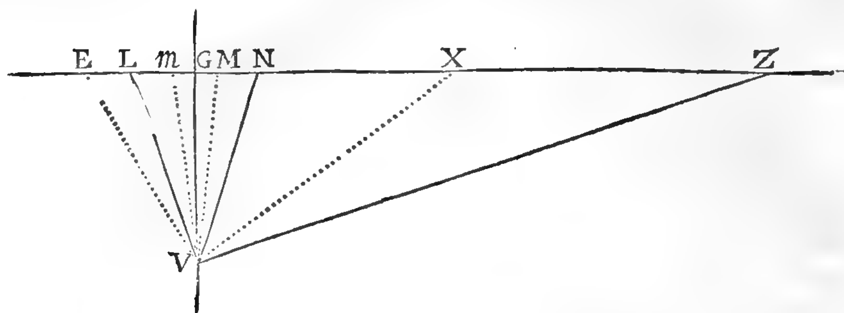
Et si l'on restitue la valeur de $zz = yy + xx$, on aura enfin $\frac{rrxx - ddxx + rryy + 2rrdy + rrdd}{yy - rr} = pp$.

Ce qui fait aussi connoître que le produit de GE par GM est égal à la premiere partie de cette équation: car pp a été posée égale à ce produit.

On remarquera que l'on peut encore mener des points M & E deux autres touchantes au cercle, lesquelles par leur rencontre donneront un point semblable au point A de l'autre côté du cercle pour lequel on aura la même valeur que celle qu'on vient de trouver; & l'on tirera de ces touchantes & de leurs rencontres, les propriétés qui sont expliquées dans le premier & le second Livre de mes Sections Coniques.

Mais comme on peut trouver sur EN une infinité de points comme EM, ensorte que le produit des GE par GM soit toujours égal à une même quantité que j'ai appellée pp, & qui sera déterminée; on aura aussi une infinité de points comme A, lesquels formeront un lieu dont l'équation vient d'être trouvée, & ce lieu sera une des Sections Coniques ou une ligne droite, puisque les dimensions des inconnues n'y surpassent pas le plan.

LEMME.



Soit la ligne droite *EZ* & *GV* qui lui ſoit perpendiculaire en *G* ; ſoit auſſi l'angle *LVN* tel qu'on voudra dont le ſommet eſt en *V*, & que cet angle ſoit coupé en deux également par *VG* ; & par conſéquent *GL* eſt égale à *GN*.

Du point *V* ayant mené *VZ* perpendiculaire à *VL* qui rencontre *EZ* en *Z*, & ſoit coupé *LZ* en deux parties égales entr'elles au point *X*.

Soit auſſi du point *V* les lignes *VE*, *VM*, qui faſſent l'angle *EVM* égal à l'angle *LVN* ; ſi le point *M* tombe au-delà de *G* vers *Z*, on portera la grandeur *GM* en *Gm*, d'où il eſt évident que l'angle *LVm* ſera égal à l'angle *LVE* ; & par les propoſitions du premier Livre de mes Sections coniques, la ligne *ZE* ſera coupée harmoniquement aux points *ELmZ*, & les lignes *Xm*, *XL*, *XE* ſeront en proportion continue ; d'où il ſuit que le quarré de *XL* ſera égal au rectangle des parties *Xm*, *XE*.

Ce ſera la même choſe pour tous les angles égaux à l'angle *LVN*, dont les ſommets ſeront en *V* : car le quarré de *XL* demeurera toujours le même pour toutes les différentes parties *Xm*, *XE*.

Il s'enſuit delà que ſi l'angle propoſé *LVN* étoit droit, le point *Z* tomberoit en *N*, & le point *X* en *G* ; enſorte que *XL* ſeroit égale à *GV*. Mais de quelque grandeur que ſoit l'angle *LVN* ou aigu ou obtus, *XL* ſera toujours

jours plus grande que *GV*, puiſque le point *X* ſeroit le centre d'un cercle qui paſſeroit en *V*, & dont le diametre ſeroit *ZL*, à cauſe de l'angle droit *ZVL*; mais *XV* égale à *XL*, & qui eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle *XGV*, ſera toujours plus grande que le côté *GV*: car dans le cas de l'angle aigu ou obtus, le point *X* ſera toujours hors du point *G*.

Il s'enſuit auſſi que le même point *X* ſervira pour les angles obtus & aigus, dont les uns ſont les ſupplémens des autres: car *LVG* étant la moitié de l'angle aigu propoſé, on aura à cauſe de l'angle droit *LVZ*, l'angle *GVZ* qui ſera la moitié de l'angle obtus complément de l'angle *LVG*. C'eſt pourquoi *VL* eſt perpendiculaire au côté *VZ*, comme *VZ* eſt perpendiculaire au côté *VL*, & la même ligne *ZL* ſert pour ces deux angles, & par conſéquent le point *X* leur ſera auſſi commun.

On doit remarquer que dans les différentes poſitions de l'angle propoſé autour du point *V*, ſi l'une de ſes jambes eſt parallele à la ligne *EZ*, l'autre jambe *VM* tombera au point *X*, & le rectangle de *XM* infiniment petite par *XE* infiniment grande, quoique ce ne ſoient que des quantités imaginaires, doit être conſidéré égal au quarré de *XL* qui eſt une quantité déterminée. Ces ſortes de cas & d'autres ſemblables ne changent rien aux démonſtrations que nous venons de donner.

Application aux Sections Coniques.

Que le cercle *SBDH* ſoit la baſe d'un cone, & que la ligne *EFN* ſoit *Directrice* de la ſection de ce cone, c'eſt-à-dire, la rencontre du plan de la baſe avec le plan par le ſommet du cone, lequel eſt parallele au plan de la ſection: c'eſt le nom que j'ai donné à cette ligne dans mon Traité des Sections Coniques. Enfin que le ſommet du cone droit ou oblique ſoit placé dans un plan perpendiculaire à la baſe, lequel il rencontre dans la ligne *ICG*, qui eſt perpendiculaire à la Directrice, & qui paſſe par le centre de la baſe. Soit auſſi imaginé que le plan par le ſommet du cone *EVN*

ſoit couché ſur la baſe pour s'en ſervir aux démonſtrations ſuivantes, la Directrice demeurant commune à la baſe & à ce plan, enſorte que le point *V* ſoit le ſommet du cone, & la ligne *GV* la diſtance du ſommet *V* au point *G* de la Directrice.

Mais ſi le même ſommet *V* du cone eſt auſſi le ſommet d'une autre eſpece de cone ou pyramide qui ait pour baſe le lieu des points *A*, il s'enſuit par ce que j'ai démontré dans mes Sections Coniques que la ſection de cette pyramide ſera une courbe de la même nature que celle de la baſe, ce qui eſt facile à démontrer : car la ſection étant faite ſur un plan perpendiculaire au plan par le ſommet & par *ICG*, la courbe de la ſection aura pour axe la rencontre de ce plan auſſi bien que la Section Conique, ce qui ſuit de la poſition de la directrice.

J'ai démontré dans mon Traité des Sections Coniques, que l'angle que font deux touchantes de la ſection, eſt toujours égal à celui qui eſt fait ſur le plan par le ſommet, par les verticales ou les lignes menées du ſommet aux points de la directrice, où les touchantes du cercle qui forment les touchantes de la ſection rencontrent la directrice, comme dans la Figure, les touchantes de la ſection formées par les touchantes du cercle *EB*, *MH*, feront un angle égal à l'angle *EVM*. Et ſi tous les points comme *E* & *M* ſont placés ſur la directrice, enſorte que les angles *EVM* ſoient toujours égaux entr'eux ; auſſi les angles des touchantes de la ſection formés par les angles *EAM* ſeront tous égaux entr'eux, & par conſéquent la ligne formée ſur le plan de la ſection par le lieu des points *A* de la baſe, ſera le lieu de tous les angles égaux à l'angle *EVM*.

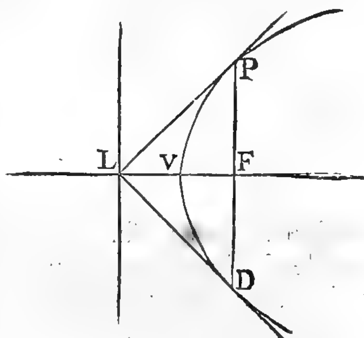
Pour les Angles droits.

Par le Lemme tous les points comme *EM* de la directrice, qui ſont donnés par des angles droits autour du ſommet *V*, feront que les rectangles des *GE* par les *GM*, ſeront chacun égaux au quarré de *GV*; & par conſéquent

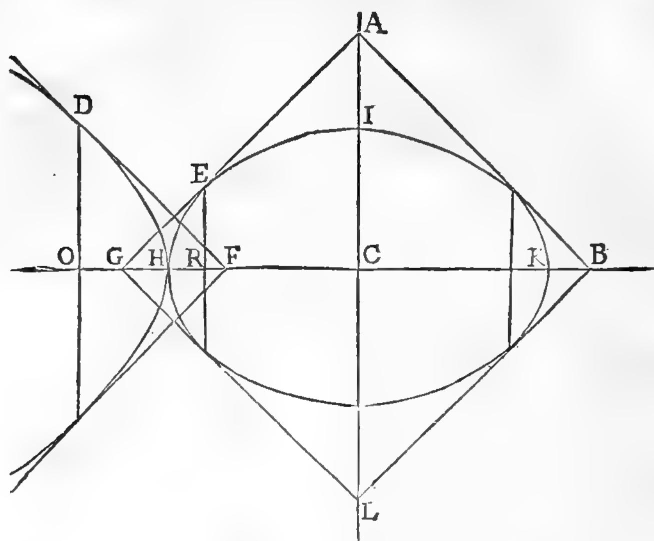
l'équation qu'on a trouvée d'abord servira pour tous les angles droits en posant $p = GV$.

1°. Si la directrice touche le cercle de la base, ce qui donne la parabole sur la section, alors CG sera égale à CD, & dans l'équation en substituant $r = CD$ à la place de d, on la réduit à $rryy + 2r^3y + r^4 = ppyy - pprr$, qui est un lieu à la ligne droite, où les x deviennent infinies. Mais ce lieu sur la base étant perpendiculaire à l'axe IG, il sera aussi sur la section perpendiculaire à l'axe de la parabole, & ce sera le lieu des angles droits faits par les touchantes de la parabole.

Pour ce qui est de la position de cette ligne sur la section, soit l'axe LF de la parabole PVD, & que ses touchantes qui viennent du point L de l'axe, fassent un angle droit PLD dans ce point L, & par conséquent PD qui joint les points touchants PD, sera perpendiculaire à l'axe, & l'angle PLF étant demi-droit, l'angle LPF sera aussi demi-droit; c'est pourquoi FP & FL seront égales : mais j'ai démontré dans le Livre des foyers de mes Sections Coniques, que si l'angle PLF que fait une touchante de la parabole avec l'axe est demi-droit, l'ordonnée PF passera par le foyer F; c'est pourquoi le point L par où passe le lieu, & qui est autant éloigné du sommet V de la parabole, qu'en est le foyer F, en sera éloigné de la quantité du quart de parametre de l'axe.



2°. Puisque dans l'équation du lieu des points A qu'on a trouvé d'abord, on a supposé le produit des GE par les GM toujours égal au quarré des GV, & que ce lieu est une des Sections Coniques, aussi le lieu qu'il formera sur le plan de la section par toutes les lignes menées du sommet V du cone aux points de ce lieu sur la base, sera une



section Conique, suivant ce que j'ai démontré de ces sortes de sections dans mon Traité; & par conséquent les points de ce lieu sur le plan de l'Ellipse comme *B* & *G* sur l'axe *KH* donneront des touchantes comme *GA*, *GL* qui feront un angle droit en *G*, & de l'autre côté les touchantes *BA*, *BL* feront l'angle droit en *B*, & les angles *AGB*, *ABG* feront chacun un demi droit, & les parties *CB*, *CG* de l'axe seront égales, & enfin la rencontre *A* des deux touchantes *GA*, *BA* sera sur l'autre axe *CI*, & le triangle *GAB* sera isocele; & par conséquent l'angle *A* sera aussi droit; ce que l'on peut aussi conclurre de la formation des touchantes. Ce point *A* sera donc un de ceux du lieu; & par conséquent la Section Conique qui est le lieu & qui passe par *GAB* sera un cercle dont le centre sera le point *C* qui est aussi celui de l'Ellipse, puisque l'angle à la section en *A* sur son axe *GB* est un angle droit.

Ce sera la même démonstration pour les touchantes de l'hyperbole: car l'équation du lieu sur la base devient la mê-

me lorsque la directrice coupe le cercle, les signes étant seulement changés.

Il faut maintenant démontrer quelle est la grandeur du diametre de ce cercle, ou quel rapport les points *G* & *B* peuvent avoir avec l'Ellipse ou avec l'hyperbole.

Dans l'Ellipe dont les demi-axes sont *CH*, *CI*, & la touchante *GE* en *E* qui fait l'angle *GER* demi-droit, l'ordonnée *ER* sera égale à la soûtangente *GR*.

A cause de la touchante *EG* & de l'ordonnée *ER*, on aura *CR*, *CH*, *CG* en proportion continue.

Mais soit $CH = r$. $CR = y$. $CI = s$; d'où l'on aura $CG = \frac{rr}{y}$.

Mais à cause de l'Ellipse on aura $rr | ss || rr - yy | \frac{rrss - yyss}{rr} =$ quarré de *ER*. Et par ce qui a été posé que *GR* est égale à *ER*, on a $\frac{rr}{y} - y$, ou bien $\frac{rr - yy}{y} = \frac{\sqrt{rrss - yyss}}{rr}$; & quarrant $\frac{r^4 - 2rryy + y^4}{yy} = \frac{rrss - yyss}{rr}$, & divisant par $rr - yy$, on aura $\frac{rr - yy}{yy} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{r^4 - rryy}{yy} = ss = CI$ quarré.

Mais le quarré de $CG = \frac{r^4}{yy}$, & le quarré de *CG* moins le quarré de *CH* sera $\frac{r^4}{yy} - rr$, ou bien $\frac{r^4 - rryy}{yy}$, ce qui vient d'être trouvé égal à *CI* quarré; donc le rectangle *KG*, *GH*, étant égal au quarré de *CI*, il s'ensuit que le point *G* est le foyer de l'hyperbole *DH*, qui a les mêmes axes que l'Ellipse *HIK*.

Soit maintenant l'hyperbole *DH*, qui ait les mêmes axes que l'Ellipse *HIK* dont nous venons de parler; & soit sa touchante *FD*, qui fasse avec son axe *HK* l'angle demi droit *DFO*, & par conséquent *DO* sera égale à *FO*.

On aura donc de même que dans l'Ellipse *CF*, *CH*, *CO* en proportion continue, & ayant posé $CO = z$. $CH = r$. $CI = s$, on aura $CF = \frac{rr}{z}$, & à cause de l'hyperbole rr]

$ss \| zz - rr \mid \frac{sszz - ssrr}{rr} = OD$ quarré. Mais auſſi par l'hypotheſe on a $z - \frac{rr}{z}$, ou bien $\frac{zz - rr}{z} = OD$. Donc $\frac{z^4 - 2zzrr + r^4}{zz} = \frac{sszz - ssrr}{rr}$; & ayant diviſé par $zz - rr$, on aura $\frac{zz - rr}{zz} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{zzrr - r^4}{zz} = ss = CI$ quarré.

Mais le quarré de CH moins le quarré de $CF = rr - \frac{r^4}{zz}$, ou bien $= \frac{rrzz - r^4}{zz}$; donc le quarré de CH moins le quarré de CF, ce qui eſt le rectangle hF, HF, ſera égal au quarré de CI; & par conſéquent le point F ſera le foyer de l'Ellipſe qui a les mêmes axes CH, CI que l'hyperbole, & le lieu de tous les angles droits qui ſont faits par les touchantes de l'hyperbole ou des ſections oppoſées, ſera le cercle dont le centre eſt C & le rayon CF.

Pour les Angles aigus ou obtus.

Par le Lemme, tous les angles aigus ou obtus autour du ſommet V du cone ſur le plan vertical ou par le ſommet, & qui donnent les points comme EM ſur la directrice, donneront des rectangles XE, XM ou Xm qui ſeront tous égaux au quarré de XV; c'eſt pourquoi les valeurs de GE & de GM qu'on a trouvées d'abord, doivent être augmentées chacune de la quantité de XG, qui eſt toujours la même, & que j'appellerai t, qui eſt donnée par la nature de l'angle donné, & par conſéquent l'équation qu'on a trouvée d'abord doit être changée par l'augmentation de t dans GE & dans Gm avant que d'en faire le produit, & ce produit ſera auſſi égalé au quarré de XL ou XV, & ſi l'on retient pour GL ou GN, la valeur p, on aura $XV = p + t$; c'eſt pourquoi le produit XE par XM ou Xm ſera $= pp + 2pt + tt$.

Mais pour abréger le calcul on poſera $GE = e$, & $GM = i$, on aura l'équation $tt + ti + te + ie = pp + 2pt + tt$, laquelle ſe réduira à $ti + te + ie = + pp + 2pt$.

Maintenant si à la place de *ie* on substitue la valeur qu'on a trouvée d'abord $=pp$, & de même pour ti & te, qu'on y mette leur valeur, ou aura toute l'équation $\frac{ty^3r+tyrxx+tdryy+tdrxx}{yy\sqrt{yy+xx-rr+rxy}}+\frac{try^3+tryxx+tdryy+tdrxx}{yy\sqrt{yy+xx-rr-rxy}}$ $+\frac{rrxx-ddxx+rryy+2rrdy+rrdd}{yy-rr}=pp+2pt.$

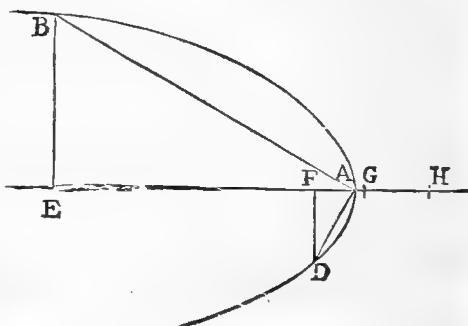
Mais cette équation se réduit à $\sqrt{yy+xx-rr}=\frac{ddxx-rrxx-rryy-2rrdy-rrdd+2tpyy-2tprr+ppyy-pprr}{2trd+2try}$, laquelle étant réduite, en ôtant le signe radical, sera le lieu d'une ligne courbe du second genre; c'est pourquoi elle formera aussi sur le plan de la section une ligne du second genre. On la pourra facilement construire sur le plan de la base, en la réduisant & en se servant des touchantes du cercle de la base, lesquelles seront menées des points E & M. Mais dans le cas de la parabole où la directrice touche le cercle de la base, & où les d sont égales aux r, si dans toute cette équation on substitue r à la place de d, l'équation se réduira à la suivante $\sqrt{yy+xx-rr}=-\frac{rryy-2r^3y-r^4+2tpyy-2tprr+ppyy-pprr}{2trr+2try}$; & posant $v-r=y$, & substituant ses valeurs à la place des valeurs de y, on réduira cette équation à $\sqrt{vv-2vr+xx}=-\frac{rvv+2tpv-4tpr+ppv-2ppr}{2tr}$, dont chaque partie étant quarrée donnera un lieu à l'une des sections coniques; c'est pourquoi cette courbe formera aussi sur le plan de la section, une section conique qui sera le lieu des angles aigus ou obtus, dont les uns sont supplément des autres; ce qui paroît par ce qui a été démontré dans le Lemme.

Mais comme la directrice de la section parabolique est aussi la directrice de la section du cone du lieu, & que cette directrice coupe le lieu sur la base, comme il est facile à voir par la construction du lieu : car elle touche le cercle base du cone, & par conséquent elle coupe la section conique base du lieu; c'est pourquoi le lieu sur la section sera les hyperboles opposées, dont l'une sera le lieu

des angles obtus, laquelle eſt formée par la partie du lieu de la baſe coupée par la directrice, & laquelle eſt du côté du cercle baſe de la ſection parabolique, & l'autre partie ſera celle de l'autre côté qui donne les angles aigus.

Mais ſi l'on veut déterminer ſur l'axe de la parabole, qui eſt auſſi l'axe des hyperboles du lieu, quelle eſt la grandeur de leur axe, on le pourra faire par le moyen de la baſe : car le point de rencontre des deux touchantes du lieu ſur la baſe à l'endroit où la directrice la rencontre, formera le centre des ſections ou hyperboles oppoſées, & les extrémités de l'axe ſur la baſe du lieu formeront les extrémités de l'axe du lieu.

On pourra auſſi trouver la grandeur de l'axe des hyperboles du lieu ſur l'axe de la parabole, ſi dans la parabole *BAD* dont l'axe eſt *AE*, on mene du ſommet *A* la corde *AB*, qui faſſe l'angle *BAE* égal à la moitié de l'angle aigu propoſé, & que du même ſommet *A* on tire la corde *AD* perpendiculaire à *AB*, qui par conſéquent fera l'angle *DAE* égal à la moitié de l'angle obtus ſupplément de l'angle aigu propoſé. Ce ſera la même choſe ſi l'on commence par l'angle obtus. Des points *B* & *D* ayant tiré les ordonnées *BE*, *DF* à l'axe, le quart de *EF* ſera le quart de l'axe des hyperboles oppoſées du lieu qui ſera égale à *GH*, & le quart de *AF* ſera la diſtance *AG* dont le ſommet *G* de l'hyperbole du lieu des angles obtus ſera éloigné du ſommet *A* de la parabole : ce qui eſt évident par les propriétés des touchantes de la parabole qui font des angles donnés.



OCCULTATION

OCCULTATION DE JUPITER PAR LA LUNE, OBSERVÉE EN PLEIN JOUR.

PAR Mrs. CASSINI & MARALDI.

NOus avions trouvé par le calcul que le 27 de Juillet de cette année 1704 Jupiter devoit être caché par la Lune; & quoique ce calcul marquât que l'Eclipse de Jupiter dût arriver de jour, nous ne perdîmes pas l'espérance de la pouvoir observer; parce que dans une pareille Eclipse arrivée l'an 1679, & en diverses rencontres, M. Cassini avoit observé cette Planete bien avant dans le jour, & qu'il y avoit un mois que nous l'observions au méridien même avec une Lunette de deux pieds. Nous nous préparâmes donc à observer cette Eclipse; & pour tirer de ces observations la parallaxe de la Lune, nous prîmes ce jour-là le passage de ces deux Planetes par le méridien, & observâmes à différentes heures du jour la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la Lune & Jupiter, par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45 degrés au foyer de la Lunette, suivant la méthode de M. Cassini. 1704. 23. Août.

à $1^h\ 22'\ 51''$. Après-midi, le bord Occidental de Jupiter commença de toucher le bord éclairé de la Lune avec une Lunette de 8 pieds.

1 22 57 Le même bord toucha la Lune avec une Lunette de 18 pieds.

1 24 20 Jupiter fut entierement caché par la Lune.

Pour observer la sortie de Jupiter du bord Occidental de la Lune, qui n'étoit pas visible à cause que la Lune étoit en décours, on tenoit toujours la corne Septentrionale de

la Lune dans l'interſection des quatre fils par le moyen de la machine parallatique; & ayant obſervé à l'égard de ces fils l'endroit où Jupiter avoit été caché par le bord Oriental de la Lune, nous étions attentifs à pareille diſtance des fils vers l'Occident où devoit être le bord obſcur de la Lune, & d'où devoit ſortir Jupiter, que nous apperçumes ſeulement lorſqu'il paroiſſoit à moitié ſorti; ce qui arriva à 2^h 6′ 43″ après-midi, & il ſortit entierement à 2^h 7′ 29″. Après ces obſervations on continua à comparer la Lune avec Jupiter qu'on voyoit diſtinctement, quoique ſa lumiere ne fût pas auſſi vive que celle d'un grand nombre d'étoiles fixes qu'on peut voir commodément pendant le jour avec des Lunettes ordinaires de 3 à 4 pieds. Cependant Jupiter, qui au commencement de Juillet ne paſſoit au méridien que deux heures avant le Soleil, ſe voyoit mieux que Saturne qui paſſoit par le même méridien trois heures avant Jupiter; & la lumiere de Saturne étoit encore plus foible que celle de Mercure, que nous avons vû le mois de Juin paſſé pendant pluſieurs jours au méridien même avec une Lunette de 3 pieds lorſqu'il étoit près de ſa digreſſion Occidentale; ce que nous avons continué de faire pendant pluſieurs jours au mois de Juillet lorſqu'il étoit dans ſa digreſſion Orientale.

Après avoir donné part à l'Académie de ces obſervations de Mercure, qui ſont les premieres qui lui aient été communiquées, nous l'avons fait ſavoir à pluſieurs Aſtronomes avec leſquels nous avons correſpondance, afin qu'ils puiſſent s'appliquer auſſi à ces obſervations, par le moyen deſquelles on réglera plus facilement le mouvement de cette Planete.

Meſſieurs Manfredi & Stancari ont fait auſſi la même obſervation de Jupiter à Bologne chacun ſéparément de la maniere qui ſuit:

	M. Manfredi.	M. Stancari.
Jupiter commença de toucher le bord de la Lune à	2^h 6′ 18″	2^h 6′ 27″
Tout Jupiter eſt caché par la Lune.	2 7 48	2 7 39

Quoiqu'ils fussent attentifs à l'Emersion, ils ne purent voir Jupiter qu'à lorsqu'ils jugerent qu'il étoit tout sorti de la Lune.

M. Manfredi.	M. Stancari.
2h 51′ 32″	2h 51′ 38″

HISTOIRE DU FORMICA-LEO,

PAR M. POUPART.

LE Formica-leo est un insecte qui ressemble assez bien à l'araignée, par ses inclinations, par sa maniere de filer, par la figure & par la molesse de son corps. Il a aussi quelque chose du cloporte, & du premier coup d'œil on le prendroit pour ce petit animal. Il est d'un gris sale, & marqué de points noirs, qui sont comme autant de petites aigrettes qui le font paroître tout armé de piquans comme un porc-épic, quand on le regarde avec la loupe. Son corps est entouré de plusieurs anneaux qui le rendent tout ridé. Il a six pieds; quatre sont attachés à sa poitrine, & deux à une longue avance qu'on peut prendre pour son col. Sa tête est menue & platte, ses deux cornes sont dures, creuses, longues de deux lignes, un peu plus grosses qu'un cheveu, & crochues par le bout comme les ongles d'un chat. Quand on les regarde avec le microscope, elles paroissent à peu-près comme les cornes d'un grand scarabé, qu'on appelle cerf-volant. Il y a à chacune de leur base un petit œil noir qui voit fort clair: car l'animal fuit au moindre objet qu'il apperçoit.

1704. 30. Août.

Fig. 1. & 2.

Cet insecte a été nommé Formica-leo, parce qu'il vit ordinairement des fourmis qui donnent dans ses embuscades: mais cela ne mérite pas de le faire nommer un lion, car il n'a que la finesse du renard; il seroit donc mieux de l'appeller Formica-vulpes.

La sobriété est d'un grand secours à ce petit animal, d'autant qu'il ne vit que de quelques fourmis, ou autres

insectes qui donnent par hazard dans ses pieges : mais il n'y en a guere qui lui conviennent mieux que la fourmi, parce que tous les petits animaux qui ont des aîles évitent ses surprises ; la plûpart des autres sont trop gros, ou bien ils ont la peau trop dure pour être percés avec ses cornes.

Voici de quelle maniere il s'y prend pour attraper les insectes. Il se campe ordinairement sous le pied d'une vieille muraille pour être à couvert de la pluie. Il faut que cet endroit soit garni d'un sable fort menu & bien sec, afin qu'il y puisse faire une fosse ou trémie qui ait la figure d'un cone concave renversé.

Quand il ne veut creuser qu'une petite fosse, il courbe en bas son derriere qui est fait en pointe, dont il se sert comme d'une espece de soc de charrue, avec lequel il laboure la terre en marchant à reculons & à petites secousses. Lorsqu'il est arrivé à une petite profondeur, il jette le sable fort haut avec sa tête à divers coups réiterés promptement, & sa trémie se trouve faite.

Mais lorsqu'il veut faire une fosse profonde, il trace d'abord un grand cercle qui est la base du cone ou de la fosse
FIG. 4. qu'il veut creuser. Il s'enfonce ensuite sous le sable, qu'il jette fort haut avec sa tête à chaque pas qu'il fait toujours à reculons. En descendant il décrit une ligne spirale, qui va finir intérieurement à la pointe du cone concave qu'il a formé.

Sa tête est fort propre pour jetter le sable, car elle est
FIG. 3. platte, & son col fort long quand il ne le retire pas : ainsi il peut donner de grandes secousses, comme je l'ai vû faire à ceux que j'ai observés, qui jettoient quelquefois à un demi pied de leurs trémies les petits animaux qu'ils avoient succés. Quand la fosse est achevée, il se tient à côté de son fond, & il ne fait paroître que ses deux cornes qu'il écarte dans la pointe de la fosse.

Pendant qu'il est ainsi en embuscade, si quelque fourmi ou autre insecte semblable vient à passer sur le bord de sa fosse, & qu'il fasse ébouler du sable dans le fond, cela avertit le Formica-leo qu'il y a du gibier pour lui. Alors il jette du sa-

ble avec ſa tête ſur la fourmi pour la faire tomber dans le fond de la foſſe entre ſes deux cornes : car il ne court jamais après elle. Mais comme cela n'arrive pas toujours du premier coup, & qu'elle s'apperçoit des pieges qu'on lui tend, elle grimpe pour ſortir de la foſſe, & quelquefois elle retombe à cauſe de la mobilité du ſable ; elle veut enfin remonter : mais le Formica-leo qui eſt toujours à l'aguet, jette encore du ſable ſur la fourmi. Si elle tombe entre ſes cornes, il la ſerre, & les plonge aſſez avant dans ſon corps : car il les peut même croiſer l'une ſur l'autre ; il la tire quelquefois ſous le ſable, & la ſucce tant qu'il y trouve de l'humeur. Quand il ne reſte plus que la peau de la fourmi, il la jette hors de ſa trémie ; & ſi elle eſt démolie, il la raccommode pour une ſeconde chaſſe.

Cet animal mourroit plutôt de faim que d'aller chercher ſa vie comme font les autres inſectes : mais ce n'eſt pas par lâcheté, comme on le pourroit croire, qu'il fait cette guerre de renard ; il ne la peut faire autrement, parce qu'il ne marche jamais qu'à reculons, & à petites ſecouſſes. Il eſt jour & nuit à l'affût caché ſous le ſable dans le fond de ſa foſſe ; parce que ne pouvant chercher ſon gibier, il faut que le hazard le lui amene, ce qui arrive rarement ; ainſi il eſt obligé de faire avec le temps, ce que la nature ne lui permet pas de faire par la courſe.

Mais il ſemble pour les raiſons que je vais apporter, que toutes ces ruſes ſont inutiles pour la ſubſiſtance de ce petit animal, qu'on diroit n'attraper les inſectes que par inclination, & pour s'en divertir comme fait le chaſſeur, qui ne va à la chaſſe que pour ſon plaiſir.

1°. Il ne ſerre jamais les inſectes qu'avec l'extrémité de ſes cornes, qui ſemblent n'être point percées par le bout ; ainſi il eſt difficile de ſe perſuader qu'il attire le ſuc de ces petits animaux par cet endroit.

2° Quand on le regarde avec la loupe, on n'apperçoit point qu'il allonge un aiguillon pour ſuccer les petits animaux qu'il attrape, comme font pluſieurs inſectes, & l'on

voit toujours une distance considérable entre sa tête, & l'animal qu'il tient avec la pointe de ses cornes.

32. L'on a mis plusieurs Formica leo dans une boîte qu'on a fermée exactement pendant six mois, de peur qu'il ne tombât quelques insectes dans leurs fosses; cependant ils ont vécu comme ceux à qui l'on a donné des mouches, & ils ont fait leurs trémies, & les changemens dont on parlera dans la suite: ce qui pourroit faire croire que le Formica-leo peut vivre sans recevoir de nourriture.

Mais quand on considere que ses cornes croissent après qu'on les a coupées; qu'il devient plus petit quand il ne prend point d'aliment; qu'après avoir seulement attrapé un insecte, il paroît beaucoup plus gros qu'il n'étoit, & qu'ayant succé une mouche pendant deux ou trois heures, elle devient seche à se réduire en poudre en la froissant entre les doigts; l'on est persuadé que, quoiqu'il puisse vivre sans qu'on s'apperçoive par quel endroit il tire sa nourriture, il ne laisse pas d'en recevoir.

Je crois donc qu'on pourroit regarder les cornes du Formica-leo comme deux seringues avec lesquelles il pompe le suc des animaux. En effet, je les ai considérées avec un microscope à liqueurs qui grossit extremement les objets, & j'ai apperçu un corps transparent & membraneux, qui va tout du long de la concavité de la corne, qui pourroit bien être le piston de la seringue.

Quand le Formica-leo est parvenu à un certain âge, & qu'il veut se renouveller, afin de paroître sous une autre forme; alors il ne fait plus de trémies, mais il laboure le sable, sur lequel on ne voit plus que des traces, & des routes fort irrégulieres.

Après qu'il a long-temps labouré, il s'arrête sous le sable
FIG. 5. où il fait une boule creuse dans laquelle il se renferme pour changer de forme. Cette boule est faite de soie, de colle & de sable, le tout mêlé ensemble. Il file la soie avec son derriere à peu près comme fait l'araignée: la colle sort de toutes les parties de son corps, & il prend le sable dans le lieu où il fait sa retraite.

Pour faire cette boule il tourne insensiblement en rond comme sur un centre, en portant son derriere à droit & à gauche, qu'il fait toucher au sable pour y attacher la soie, soit qu'elle s'embarrasse aux inégalités des grains de sable, soit qu'elle s'y colle avec la matiere gluante dont elle peut être empreinte. De quelque maniere que la chose arrive, les grains de sable sont si bien attachés à la soie, qu'il est assez difficile de les en séparer, même en la secouant très-fort tandis que l'ouvrage est encore tout molasse, ou bien en la frottant avec les doigts.

Cette soie est incomparablement plus fine que la soie ordinaire, puisqu'on ne la peut guere appercevoir qu'avec le secours du microscope. Pour la bien voir il faut déterrer l'ouvrage de ces petits animaux avant qu'il soit entierement achevé; on le trouvera mou comme du coton, parce qu'il n'a pas encore été endurci par la colle qui ne sort que fort lentement du corps de l'animal : on levera cette soie en l'air avec la pointe d'une aiguille, & l'on verra de l'espace entre les grains de sable qui sont suspendus, sans qu'on puisse appercevoir la soie, à moins de se servir d'une loupe, tant il est vrai que cette soie est fine.

Il est impossible, sans quelque artifice, de voir comme ces petits animaux filent leur soie, & comme ils bâtissent leurs loges, parce qu'ils travaillent toujours sous le sable. Il faut pour cela leur ôter plusieurs fois leurs ouvrages avant qu'ils soient achevés, ils les recommenceront, & à la fin ces petits animaux deviendront si foibles qu'ils n'auront plus la force de se cacher sous le sable comme ils ont accoutumé de faire; & alors on leur verra filer lentement leur soie avec le derriere sur la superficie du sable, de la maniere que je l'ai déja fait remarquer.

Après que le Formica-leo a long-temps travaillé, il se trouve au milieu d'une grosse boule molle, qui n'est encore faite que de soie & de sable mêlés ensemble. Cette boule s'endurcit peu à peu en s'humectant de la viscosité qui sort du corps de l'animal, laquelle pénetre cette loge de tous côtés.

Ce qui m'assura principalement qu'il transfudoit une humeur gluante du corps de ces petits animaux, c'est qu'il s'attacha plusieurs grains de sable sur le col d'un de mes Formica-leo, qui formerent un petit rocher assez dur. Pendant qu'il eut cette masse sur le col il ne fit plus de trémie, parce que ce fardeau lui empêchoit le mouvement de la tête. Je cassai ce petit rocher avec des pinces, aussi-tôt le Formica-leo fit sa trémie, & quelque-temps après il travailla à former sa loge.

Quand le Formica-leo est renfermé dans sa maisonnette, il la drape par dedans avec la soie qu'il file. Cette soie ne se mêlant plus avec le sable, il se forme un tissu fort serré, qui ressemble à un petit satin couleur de perle, dans lequel l'animal reste en repos la tête entre les jambes. On pourroit croire d'abord que ce satin est une colle seche qui s'est détachée du corps de l'animal: mais si cela étoit, on le casseroit aisément quand on le plie, ce qui n'arrive point, & il ne seroit pas flexible comme il est. D'ailleurs cette petite étoffe est continue à la loge, du moins elle y est si bien attachée qu'on ne l'en peut séparer sans détruire la boule. J'ai mis ce satin dans de l'eau pendant quelques jours, il ne s'est point fondu comme il semble que devroit faire de la colle: mais il a perdu sa belle couleur; ce qui persuade que le peu de colle qui s'étoit mêlée avec la soie & qui lui donnoit peut-être cette belle couleur s'est fondue, & que l'étoffe est restée toute seule. Ce petit satin ressemble un peu à celui que font certaines araignées sur les feuilles des arbres, qui leur sert de loge ou de nid pour faire leurs œufs, mais il est plus épais que celui de ces araignées.

Pour marquer que le Formica-leo ne travaille à draper sa maisonnette par dedans qu'après qu'elle est achevée; c'est que si on l'ouvre avant qu'elle soit endurcie, on ne la verra point tapissée du satin dont on a parlé.

Mes Formica-leo resterent dans leurs loges pendant six semaines ou deux mois avant que de se changer en vermisseaux: mais le temps qu'ils y restent n'est point fixé. Ils avoient

avoient la tête entre les jambes afin de s'arrondir autant qu'ils pouvoient pour occuper moins de place, & s'accommoder à la figure concave de leurs petites boules.

Quand il fut temps de changer de figure, ils commencerent à se dépouiller de leur premiere peau, à laquelle leurs cornes, leurs yeux & leurs poils resterent attachés. Cette peau ressembloit pour lors à un petit peloton ratatiné, blanchâtre par dedans, qui avoit une ouverture tout au long du ventre, par laquelle étoit sorti un insecte dont on va parler.

Après que le Formica-leo a quitté sa peau, il paroît sous la forme d'un vermisseau qui a environ trois lignes de long quatre ailes membraneuses, six pieds, deux grosses cornes ou antennes molles & creuses, deux yeux noirs, & deux tenailles en forme de scie qui lui servent de dents. Ce vermisseau reste encore quelque temps dans sa petite retraite avant que de paroître sous une nouvelle forme: mais on ne peut savoir le temps qu'il y demeure, parce que le Formica-leo dont il sort, est caché dans sa loge quand il se métamorphose en ver. FIG. 6. 7. & 8.

Lorsque le vermisseau veut sortir de sa maisonnette pour se métamorphoser, il y fait un petit trou rond avec ses dents qui ressemblent assez bien à celles des sauterelles. Cependant le trou qu'il y fait, ne paroît pas rond, parce que la piece y demeure ordinairement attachée par un côté, ce qui rend le passage si étroit, que la moitié du vermisseau reste dans la loge, & l'autre moitié dehors. En cet état le vermisseau n'est plus vivant, ce n'est qu'un fourreau membraneux & transparent, qui a des cornes ou antennes, des yeux, des dents, des ailes, des pieds, &c. qui sont les étuis de semblables parties d'une belle mouche qu'on appelle Demoiselle, qui est sortie de ce fourreau par une crevasse qui s'est faite sur son dos proche de sa tête. Cette mouche a quinze ou seize lignes de long: mais ses ailes n'en ont d'abord que deux; parce qu'ayant été emboîtées en des étuis qui n'ont aussi que deux lignes, elles en ont pris la figure & la grandeur. Elles sont humides FIG. 9.

& pliſſées de pluſieurs plis qui ſe développent en deux minutes de temps, & deviennent plus longues que ſon corps. Lorſque la Demoiſelle eſt ſortie de ſon fourreau, elle reſte quelque temps ſur ſes pieds ſans mouvement pour deſſé-
FIG. 10. cher ſes ailes afin de prendre la volée, & jouir d'une vie plus heureuſe que celle qu'elle menoit ſous la peau du pauvre Formica-leo.

Tandis que la Demoiſelle eſt renfermée dans ſon vermiſſeau, elle ne peut avoir que trois lignes de long, parce qu'il n'a lui-même que cette grandeur : mais auſſitôt qu'elle en eſt ſortie, elle s'allonge de plus de quinze lignes. Ce déployement ſubit vient de ce que pendant que la Demoiſelle eſt encore dans ſon fourreau, elle eſt raccourcie & pliée comme un courcaillet qu'on preſſeroit par les deux bouts. Mais auſſi-tôt qu'elle en eſt ſortie, elle s'étend de toute ſa grandeur, comme une éponge qu'on ſerre entre les doigts, qui reprend ſa groſſeur quand on ne la preſſe plus.

En l'année 1703 les Formica-leo que j'avois obſervés ne changerent point en Demoiſelles ; cette métamorphoſe n'arriva que l'année ſuivante. Cela me fait croire que ces petits animaux ne changent pas dès la premiere année, & qu'il leur faut un certain âge avant que de ſe métamorphoſer.

Après que la Demoiſelle eſt ſortie, ſi l'on ouvre la maiſonnette où s'étoit renfermé le Formica-leo, on verra, comme nous avons dit, qu'elle eſt tapiſſée d'un petit ſatin poli & couleur de perle. On y trouvera la peau du Formica-leo, qui eſt ce petit peloton ratatiné, applati & hériſſé de poils, dont on a déja parlé. On y remarquera auſſi le fourreau membraneux qui enveloppoit immédiatement
FIG. 11. la Demoiſelle. Mais ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt qu'on y trouve quelquefois un œuf que la mouche y fait avant que d'en ſortir. Cet œuf a deux lignes de long, une d'épaiſſeur, & reſſemble un peu à un petit gland allongé. Sa coquille eſt dure, & toute ſemblable à celle des œufs de poules. La ſubſtance qu'il contient n'eſt pas fluide, & j'ai remarqué

que l'œuf changeoit de couleur en différens temps. J'ai exposé un de ces œufs pendant quelques jours aux grandes chaleurs du Soleil, la matiere qu'il renfermoit est devenue dure & noire comme de l'encre.

Il semble que ces petites Demoiselles ne font qu'un œuf: car on n'en a trouvé qu'un dans le corps de quelques-unes qu'on a ouvertes: un seul qu'une autre avoit déposé dans sa loge avant que d'en sortir, & une Demoiselle étant montée au haut de la boîte dans laquelle on l'avoit renfermée, quelques heures après elle fit aussi un œuf. Cependant il n'y a pas d'apparence que chacune de ces Demoiselles ne fassent qu'un œuf, parce qu'il s'en trouve toujours quelques-uns qui ne sont pas féconds, & quelques-autres produisent des mâles, d'où il est aisé de conclurre que peu à peu l'espece auroit entierement manqué.

On peut voir par la précipitation avec laquelle ces Demoiselles font leurs œufs, qu'elles n'attendent pas toujours les approches du mâle pour les déposer. C'est peut-être à cause de la rareté de ces accouplemens que les Formica-leo & les petites Demoiselles qui en sortent sont assez rares.

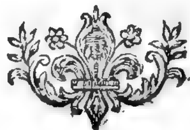
Les petites boules dans lesquelles se renferment les Formica-leo sont absolument nécessaires pour la naissance des Demoiselles: car j'en ai rompu quelques-unes pour mettre le Formica-leo à nud sur le sable dans le temps qu'ils étoient prêts de se métamorphoser, ils n'ont pas laissé de se dépouiller de leur peau: mais les Demoiselles n'ont pû sortir des vermisseaux dans lesquels elles étoient renfermées, quoiqu'elles aient vécu fort long-temps après, & fait plusieurs mouvemens pour en sortir. Un des principaux usages de cette boule, c'est que par son moyen, la Demoiselle se dépouille du vermisseau dans lequel elle est renfermée, en passant avec difficulté par le petit trou que le même vermisseau y fait avec les dents.

Il faut remarquer que les différentes Demoiselles qu'on voit voltiger durant l'été le long des ruisseaux & autour des buissons, ne sortent pas toutes de ce petit animal. Celles

qui en viennent ont deux antennes qui ſont menues proche la tête, & vont en groſſiſſant juſqu'au bout. Elles ont deux gros yeux aux côtés de la tête, & n'en ont point deſſus comme les autres eſpeces de Demoiſelles. Leur ventre n'eſt point cannelé tout du long comme il arrive aux autres, & le bout de leur queue eſt hériſſé de poils. Leurs ailes ſont d'un blanc cendré, marquées de quelques points noirs, & ne ſont bigarrées d'aucunes vives couleurs. Ainſi il y a de l'apparence que les belles mouches, que la variété des couleurs a fait nommer Demoiſelles, auſſi-bien que toutes leurs différentes eſpeces, ont une autre origine.

Il y a deux autres belles eſpeces de grandes Demoiſelles, dont l'origine eſt bien différente de celles dont nous venons de parler. Elles viennent de deux animaux aquatiques qui ne reſſemblent point au Formica-leo.

Nous ferons voir quelque jour que les animaux d'où ſortent ces grandes eſpeces de Demoiſelles ſont de véritables poiſſons : car nous avons remarqué leurs ouies, & nous les avons fait deſſiner par avance à la Figure 14 & 15. & les animaux tous entiers à la Figure 12. 13. & 16.



EXPLICATION DES FIGURES.

1. CEtte Figure repréſente le Formica-leo deſſiné trois fois auſſi grand que nature, pour faire voir comme il eſt hériſſé de piquans. Il n'y a rien de plus naturel que ce deſſein.

2. Le deſſous du Formica-leo.

3. La tête & le col du Formica-leo ſéparés de la poitrine, & deſſinés beaucoup plus grands que nature, afin qu'on puiſſe voir diſtinctement les plus petites parties.

4. La foſſe ou trémie que le Formica-leo a faite pour y faire tomber les inſectes. Il eſt caché au fond, où il ne fait paroître que ſes cornes, qu'il tient écartées pour être tout prêt à ſaiſir les petits animaux.

5. La loge dans laquelle le Formica-leo s'eſt renfermé pour changer de forme.

6. Vermiſſeau qui paroît après que le Formica-leo a quitté ſa peau, dans lequel la Demoiſelle (10) eſt renfermée.

7. Cette figure repréſente le Vermiſſeau (6) deſſiné beaucoup plus grand que nature, afin qu'on puiſſe voir diſtinctement ſes yeux, ſes pieds, ſes ailes, qui ſont des fourreaux dans leſquels les mêmes parties de la Demoiſelle ſont renfermées.

8. Cette Figure groteſque qu'on a deſſinée beaucoup plus grande que nature, eſt le Vermiſſeau qu'on a repréſenté à la Figure 6 & 7, en la ſituation où il eſt dans ſa loge. Il a le dos courbé, afin de s'accommoder à la figure de ſa loge, & d'occuper moins de place.

9. La boule ou loge du Formica-leo avec le Vermiſſeau marqué 6, qui eſt partie dedans & partie dehors, dont la Demoiſelle (10) eſt ſortie par une crevaſſe qui s'eſt faite ſur le dos du vermiſſeau.

10. Cette Figure repréſente la Demoiſelle qui eſt ſortie du Vermiſſeau 6, ou 7, ou 8. Il ſemble que ce deſſein vole, & que c'eſt un corps aërien tant il paroît leger.

11. Les œufs que les Demoiſelles font preſque auſſi-tôt

qu'elles ſont ſorties de leurs petites loges ou boules.

12. Animal aquatique, d'où ſort une grande eſpece de Demoiſelle, autre que celle qui vient du Formica-leo. Ce petit animal eſt un véritable poiſſon.

13. Le deſſous de l'animal aquatique repréſenté à la Figure 12.

14. Maniere de maſque qui couvre la tête de l'animal aquatique marqué 12, qui ſont ſes ouies vues par dehors.

15. Maſque qui couvre le devant de la tête de l'animal aquatique marqué 12, qui ſont ſes ouies vues par dedans.

16. Autre animal aquatique un peu différent du précédent, d'où ſort une grande eſpece de Demoiſelle bigarrée de belles couleurs. On diroit que ces trois petits animaux ſeroient vivans.

OBSERVATIONS

De la conjonction de Jupiter avec la Lune, au matin du 24. Août 1704. à l'Obſervatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 5. Septembre.

JUpiter étant proche de ſa conjonction avec la Lune, nous l'obſervâmes avec le micrometre appliqué à la Lunette de 7 pieds.

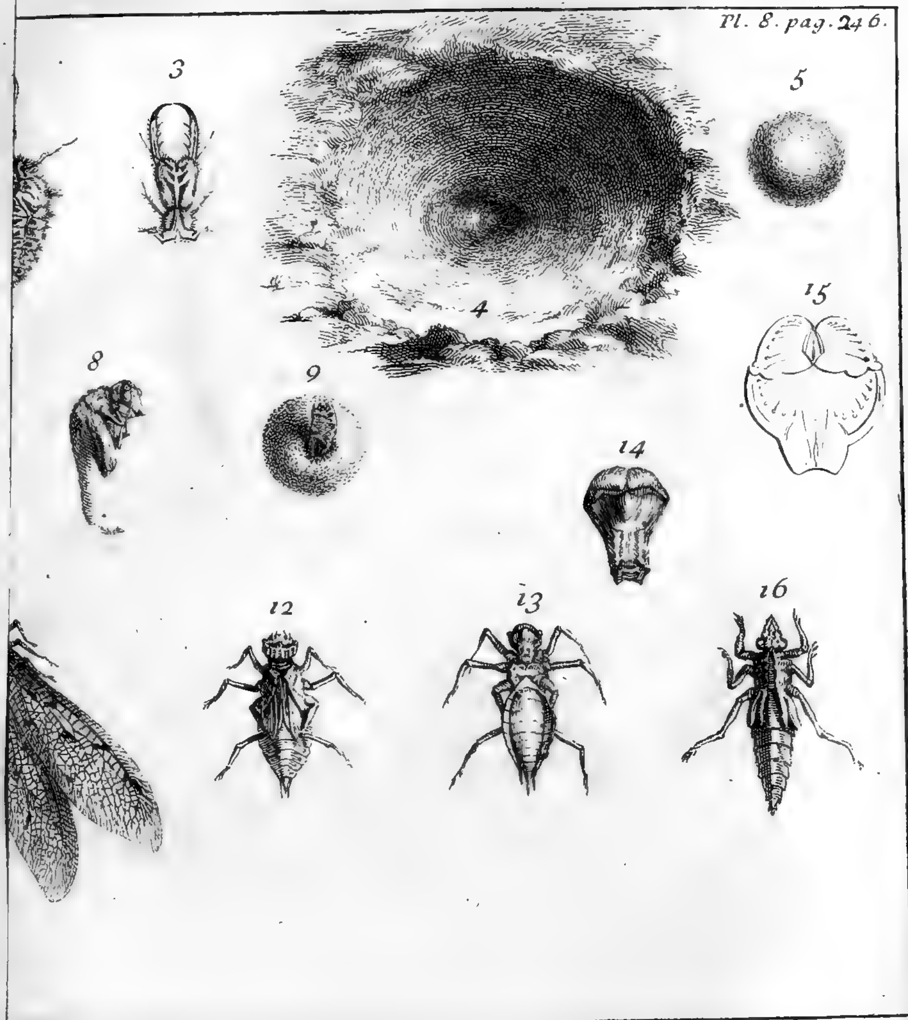
Nous trouvâmes qu'à 1h 55′ 50″ il étoit éloigné de la ligne qui paſſoit par le centre & par les cornes de la Lune, de 32′.

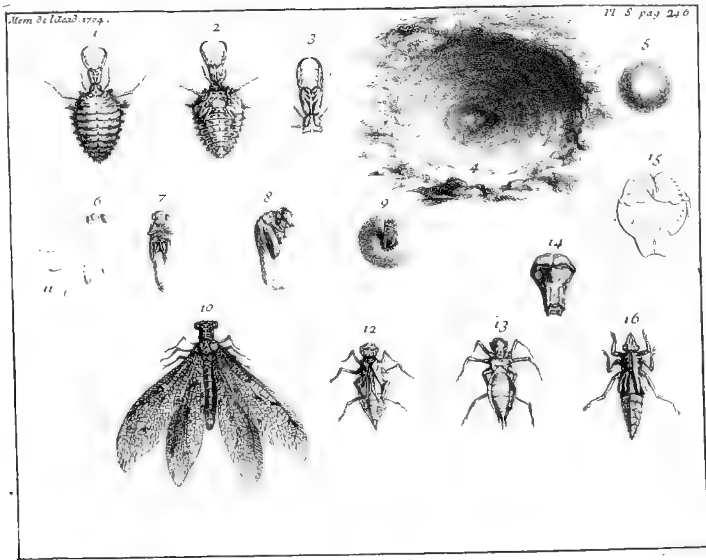
A 2h 11′ 56″ ſon éloignement à la même ligne étoit de 25′ 20″.

A 2h 25′ il n'étoit plus éloigné de la même ligne que de 18′ 20″.

A 2h 32′ la diſtance entre le centre de Jupiter & la ligne qui touchoit la Lune, & qui étoit perpendiculaire à celle qui paſſoit par les cornes 2′ 14″.

A 2h 36′ 25″ le centre de Jupiter étoit dans la ligne touchante de la Lune, laquelle étoit parallele à celle qui paſſoit par les cornes.


3
4
5
8
9
12
13
14
15
16


Mem de l'Acad. 1704.
Pl. 8 pag. 246
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

A $2^h\ 53'\ 0''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne touchante de la Lune, laquelle étoit perpendiculaire à celle qui passoit par les cornes.

A $3^h\ 10'\ 6''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne qui passoit par les cornes & par le centre de la Lune. Cette ligne a été déterminée exactement par le moyen de deux filets du micrometre qui étoient éloignés l'un de l'autre de la distance du demi-diametre de la Lune, & par le moyen des cornes visibles. La distance du centre de Jupiter à la corne australe étoit alors de $1'\ 54''$, & ç'a été le vrai temps de la conjonction apparente de ces deux astres.

Nous avons aussi observé le diametre de Jupiter de $41''$ avec le micrometre appliqué à une Lunette de 16 pieds.

Nous trouvâmes aussi le diametre de la Lune à la hauteur de 28° à peu près, & à $2^h\ 16'$ de $3'\ 5''$.

CONJONCTION DE JUPITER AVEC LA LUNE,

Observée le 24 Août 1704.

PAR Mrs. CASSINI & MARALDI.

APrès l'occultation de Jupiter par la Lune, arrivée le 27 Juillet, nous avons observé la conjonction de la même Planete fort proche de la Lune le matin du 24 Août; ce que nous avons fait en observant avant & après la conjonction, les différences d'ascension droite & de déclinaison entre la Lune & Jupiter, par les passages de la Lune & de Jupiter par les fils qui se croisent au foyer de la Lunette, de la maniere qui a été expliquée autrefois. 1704. *6.* Septembre.

Le 22 Août le centre de la Lune passa au méridien à	$5^h\ 43'\ 16''$
Et le bord à	5 44 18

La hauteur méridienne de la corne supérieure de la Lune, fut de	59^h	11′	50″
Celle de la corne inférieure	58	41	10
Le centre de Jupiter passa au méridien à	7	21	14
Et sa hauteur méridienne fut de	63	53	0
Le 23 Août le centre de la Lune passa au méridien à	6	3	58
Le bord suivant de la Lune passa au méridien à	6	33	5
Hauteur méridienne de la corne supérieure	62	5	0
Hauteur méridienne de la corne inférieure à	61	33	30
Le centre de Jupiter passa au méridien à	7	18	13
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire à	11	55	46
Jupiter au fil perpendiculaire.	12	1	27
Différence du passage.	0	5	41
Différence de déclinaison en temps dont Jupiter étoit plus méridional que la corne Septentrionale de la Lune.		0	22
Immersion du premier Satellite dans l'ombre de Jupiter : mais cette observation n'est pas exacte, à cause que Jupiter étoit fort près de la Lune.	1	25	47
Le centre de la Lune au fil perpendiculaire.	1	56	13
Le bord au même fil.	1	57	21
Jupiter au même fil.	1	58	39
Différence d'ascension droite entre le bord de la Lune & Jupiter.		1	18
En temps différence de déclinaison à l'égard de la corne méridionale.		0	36
Le bord au fil perpendiculaire.	2	7	19$\frac{1}{2}$
Le centre de Jupiter.	2	8	18
Différence.		0	55$\frac{1}{2}$
Différence de déclinaison.			29
Le bord au fil perpendiculaire.	2	16	40
Jupiter au même fil.		17	18
Différence d'ascension droite.		0	38

Différence

Différence de déclinaison.			24″
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2	24	58
Le centre de Jupiter.	2	25	20
Diff. de déclinaison en temps vers le Septentrion à l'égard de la corne méridionale.		0	22
		0	18½
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2	34	7
Le centre de Jupiter.	2	34	13
Différence d'ascension droite.		0	6

Par les observations faites à $2^h 25'$, & à $2^h 34'$, on trouve que Jupiter & le bord suivant de la Lune avoient la même ascension droite à $2^h 37' 33''$.

Et par la comparaison des observations faites à $2^h 25'$, & $3^h 14'$, Jupiter arriva au parallele de la corne méridionale de la Lune à $2^h 57' 47''$.

A $3^h 4' 9''$ le Satellite fut perpendiculaire à la corne méridionale à la distance d'un diametre de Jupiter.

A $3^h 10' 14''$ le bord précédent de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

A $3^h 11' 56''$ le bord suivant de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

Donc à $3^h 11' 5''$ le centre de Jupiter fut perpendiculaire à la corne, qui est le temps de sa conjonction en longitude; & pour lors le centre de Jupiter étoit éloigné de deux de ses diametres de la corne méridionale.

La conjonction de Jupiter avec la Lune en longitude précéda la conjonction en ascension droite de presque deux minutes de temps, & elle arriva à $3^h 13' 3''$, comme on la tire par les observations suivantes.

Jupiter au fil perpendiculaire à	3^h	13′	45″
Le bord de la Lune au même fil.	3	14	57
Différence du passage entre le centre de Jupiter & le bord de la Lune.		1	12
Différence de déclinaison entre la corne de la Lune & Jupiter, dont Jupiter est plus méridional.		0	9½
Jupiter au fil perpendiculaire.	3	15	52

Le bord de la Lune.	3^h	19′	7″
Différence d'ascension droite.		1	15
Différence de déclinaison.			10½
Jupiter au fil perpendiculaire.	3	18	14½
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3	19	35
Différence d'ascension droite.		1	20½
Différence de déclinaison.			12½
Jupiter au fil perpendiculaire .	3	22	10½
Le bord au fil perpendiculaire.		23	37½
Différence d'ascension droite.		1	27
Différence de déclinaison méridionale.			13½
Jupiter au fil perpendiculaire.	3	25	17½
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3	26	50
Différence d'ascension droite entre Jupiter & le bord de la Lune.		1	32½
Différence de déclinaison.		0	32½



DESCRIPTION ET USAGE D'UN NIVEAU D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.

PAR M. DE LA HIRE.

LEs grandes conduites d'eau que les Anciens ont faites, 1704.
l'auroient pû nous persuader qu'ils étoient fort savans 12. Novembre.
dans l'art de niveler, si les instrumens, dont il se sont servis, & tout l'artifice qu'ils y ont employé, n'étoient venus jusqu'à nous dans les Ouvrages de Vitruve. Leur grand Niveau qu'ils appelloient le *Chorobate*, étoit une piece de bois de 20 pieds de longueur, soutenue par quelques pieces aux extrémités, & qui avoit dans sa partie supérieure un canal qu'on remplissoit d'eau, avec quelques petits plombs qui pendoient aux côtés, pour s'assurer si cette piece étoit de niveau; & c'étoit toute la longueur de leurs nivellemens: car ils transportoient le Chorobate de 20 pieds en 20 pieds pour conduire leurs ouvrages.

Mais les nouvelles découvertes qu'on a faites dans l'Académie des Sciences, & les différens niveaux qu'on y a inventés avec les Lunettes d'approche qui y servent de pinnules, nous ont donné moyen de faire des nivellemens d'une bien plus grande justesse, & avec beaucoup plus de facilité que tout ce qui avoit été fait jusqu'alors; puisqu'on peut niveler tout d'un coup une distance de 1000 toises sans aucune erreur sensible.

Nous avons entre les mains les niveaux de Messieurs Picard, Mariotte, Hughens, Thevenot & Roëmer, dont les constructions sont toutes différentes, & j'en ai aussi donné un qui tire sa justesse de la superficie de l'eau, dont j'ai fait imprimer la description dans le Traité du Nivellement de M. Picard en 1684, & qu'on a copié ensuite dans

les Memoires de l'Académie en 1699. Mais les nivellemens que j'ai faits autrefois par ordre du Roi en différens endroits & à différentes reprises par l'espace de près de 100 lieues, m'ont fait connoître que tous ces niveaux avoient de grandes incommodités dans l'usage qu'on en fait, & qu'on ne pouvoit les transporter facilement sans être obligé de les rectifier, & quelquefois d'en rétablir les pinnules, ce qui demande des opérations assez embarrassantes. Ce n'est pas qu'il soit nécessaire de se servir d'un niveau qui soit juste pour faire des nivellemens exacts, puisqu'on en peut facilement venir à bout en prenant quelques précautions, comme il est marqué dans le Nivellement de M. Picard, & comme je l'ai expliqué ensuite dans un petit Traité du Nivellement que j'ai donné au public.

Le niveau dont je donne ici la description, & que j'ai depuis quelque temps, est construit sur un principe différent de tous les autres niveaux qui ont paru jusqu'à présent: car ils tirent tous leur justesse ou du centre de gravité du corps de tout le niveau, lequel est suspendu par un corps flexible ou autrement, ou d'un plomb aussi suspendu à un fil très-délié comme un cheveu, ou enfin de la superficie de l'eau, ou de quelqu'autre corps liquide dont la superficie se met toujours de niveau. Mais celui-ci n'est point suspendu par quelque corps que ce soit: au contraire, le centre de gravité du corps qui lui sert de regle comme à plusieurs autres, est placé au-dessus du point d'appui, ensorte que s'il étoit possible de faire que le centre de gravité du corps qui est un point mathématique, demeurât immobile sur l'appui, qui est un point le plus fin qu'il est possible de le faire; on auroit alors le véritable niveau, qui seroit la ligne perpendiculaire menée à celle qui passe par le centre de gravité & par l'appui. Mais comme il est impossible de faire que le centre de gravité demeure dans une position fixe au-dessus du point d'appui, on prend pour le vrai niveau la position où ce point est comme indifférent à tomber d'un côté ou d'autre.

On dira peut-être que ce principe n'est pas si juste que celui où le corps pesant est suspendu par un corps flexible : mais pour peu qu'on fasse réflexion sur ces suspensions, on verra qu'il y a des irrégularités très-grandes qui sont causées par la nature de ces corps, outre que si toute la machine est exposée à un petit vent, elle est dans un balancement & dans une agitation continuelle, & il est impossible de déterminer le niveau. Je ne parle point des remedes qu'on a apportés à ces balancemens, comme de faire plonger le poids suspendu à la machine dans de l'eau ou dans de l'huile pour en arrêter les vibrations, puisque ce remede par lui-même a de grandes incommodités, & qu'il n'est pas encore suffisant.

Celui que je propose est ferme, solide & inébranlable, étant une fois bien construit, & il se peut transporter comme on voudra sans craindre qu'il puisse s'altérer ; & si l'on y fait quelque changement, il sera très-facile de le rectifier sans changer de place, ou, comme on dit, d'une seule station.

Les nouvelles pinnules sur du verre, comme je les ai proposées à l'Académie, & comme elles sont décrites dans les Mémoires de l'année 1700, & dans mes Tables Astronomiques, lui donnent aussi un très-grand avantage pardessus tous les autres : car ces pinnules sont inaltérables à tous les changemens de l'air, & ne sauroient être gâtées par quelqu'autre accident que ce soit, quoiqu'elles soient au moins aussi fines & déliées que les filets de ver à soie qu'on avoit considérés jusqu'à présent comme les plus propres à faire des observations exactes. Il est très-facile de les faire, puisque ce n'est qu'une petite ligne ou un trait fort délicat qu'on marque avec la pointe d'un diamant sur un petit morceau de verre ou de glace, que l'on arrête au foyer du verre objectif de la Lunette : car le centre de l'objectif tient lieu de pinnule objective, & le trait sur le verre sert de pinnule oculaire. Il est aisé de juger que cette pinnule oculaire ne peut souffrir aucune altération ou changement, soit par la chaleur ou par le froid, soit par les

petits insectes qui s'attachent aux filets de soie, soit en y touchant, ou enfin en transportant l'instrument de quelque maniere que ce soit; car elle sera aussi solide que la pinnule objective.

La principale partie de ce niveau est une regle de fer qui porte à ses deux extrémités les pinnules ou dioptres, qui est un verre objectif de Lunette pour la pinnule objective, & pour la pinnule oculaire un petit morceau de verre avec un petit trait, comme je viens de dire. Ce verre coule dans un chassis ou coulisse pour le pouvoir arrêter à quelle hauteur on veut. Cette regle tient lieu du corps d'une Lunette qui n'a point de verre oculaire, & qui n'a point d'autre tuyau que toute la boîte qui est noircie par-dedans & qui est bien fermée.

Il y a sous cette regle de fer une autre regle posée sur le champ, qui sert à la rendre plus ferme, & qui porte dans son milieu une autre piece de fer ou de laiton d'une longueur égale à peu près aux deux tiers de la premiere, avec laquelle elle est posée à l'équerre. Cette piece va en s'élargissant par le bas, en sorte que sa largeur est perpendiculaire à la longueur de la regle de la Lunette. A l'extrémité de cette piece on y soude des deux côtés les pivots sur lesquels la machine se meut, & par conséquent tout le corps du niveau se mouvant, quand les pivots seront à peu près de niveau, la Lunette haussera & baissera dans son mouvement.

Pour les pivots ils demandent un peu de soin dans leur construction. Leur coupe doit être en forme de losange fort aigu, & même un peu tranchant d'un côté & d'autre, qui est le haut & le bas, car c'est par ces endroits où tout le niveau est soutenu sur l'appui.

Les pivots sont d'acier trempé, & l'endroit où ils posent sur l'appui est un peu creusé quoique tranchant, afin que dans le mouvement du niveau ils ne puissent pas s'écarter d'un côté ni d'autre. Il y a deux cavités semblables à l'opposite l'une de l'autre pour l'usage que nous expliquerons ensuite.

Les appuis sont attachés avec des vis à une piece particuliere laquelle est de bois, & cette piece est arrêtée dans le fond de la boîte avec des vis, en sorte qu'on peut la retirer quand on veut hors de la boîte avec tout le niveau qui pose sur ses appuis.

Ces appuis sont faits d'une piece plate d'acier trempé, dans laquelle il y a deux ouvertures rondes, dont l'intérieur est tranchant émoussé, pour soutenir les pivots du niveau, & pour être assez fermes pour ne se pas gâter dans le mouvement du niveau.

Pour la boîte où l'on enferme le niveau, on peut la faire de quelle figure on voudra à l'extérieur; mais tout le niveau ayant la figure d'un *T*, la boîte doit aussi être de la même figure à peu près, & elle doit contenir l'instrument, en sorte qu'il ait seulement la liberté de se mouvoir un peu d'un côté & d'autre. Aux deux extrémités de la partie d'enhaut de la boîte, qui est la traverse du *T*, il y a deux ouvertures rondes, à l'une desquelles est attaché un bout de tuyau, où entre le canon qui porte l'oculaire: car l'oculaire ne tient point à la Lunette, & l'on peut par ce moyen l'approcher ou le reculer de la pinnule oculaire suivant la force de la vue de l'Observateur. L'ouverture de l'autre bout de la boîte sert à laisser passer les rayons des objets qui viennent rencontrer le verre objectif ou la pinnule objective.

Vers l'oculaire à la partie de dessous de la longueur de la boîte, il y a une vis assez longue qui se meut dans un écrou qui est attaché à la boîte. Cette vis sert à élever le bout de la regle de fer suivant l'usage & la nécessité. Le pas de cette vis est très-fin, pour pouvoir élever la regle comme insensiblement en tournant la vis.

A l'opposite de la vis, c'est-à-dire, dans le haut de la traverse de la boîte, il y a par-dedans une lame d'un ressort très-mince, qui est arrêtée à la boîte par son extrémité la plus éloignée de l'oculaire, & par l'autre elle porte une tige avec un bouton qui passe au-dehors de la boîte. Cette tige sert à pousser le ressort vers le bas: car dans son état

naturel il eſt appliqué contre le deſſus de la boîte par le dedans.

Il y a à la vis un repaire ou marque pour l'enfoncer dans l'écrou juſqu'en cet endroit, & alors la regle de la Lunette étant appuyée ſur la vis, la Lunette ſe trouve vis-à-vis des ouvertures de la boîte.

Il ne s'agit donc plus que de placer les pinnules de telle maniere, que leur ligne de foi ſoit perpendiculaire au plan qui paſſe par le centre de gravité de tout le niveau, & par la ligne des appuis, & c'eſt ce qu'on appelle le *rectifier*; & comme toutes les parties qui le compoſent ſont ſolides, étant une fois bien rectifié, il ne changera plus dans la ſuite: c'eſt pourquoi il ſuffit de le bien rectifier en le conſtruiſant, par quelqu'une des manieres qui ſont expliquées dans le Traité du Nivellement de M. Picard, en établiſſant deux points de niveau, & même avec le niveau ſans être rectifié.

Pour rectifier le Niveau.

Suppoſant donc qu'on ait deux points de niveau *A* & *B* éloignés l'un de l'autre de 100 toiſes environ, on placera la Lunette à l'un de ces points comme *A*, & on la pointera vers l'autre point *B*, en baiſſant ou en élevant doucement la boîte. Et lorſque l'objet *B* paroît ſur la pinnule oculaire, ſi la regle de la Lunette eſt poſée ſur la pointe de la vis, & qu'elle ne ſoit pas en état de tomber ſur le devant, c'eſt-à-dire, vers l'objectif, ce qu'on connoît en pouſſant ou en élevant un peu la regle en tournant la vis, car alors la Lunette donne plus bas, & elle eſt encore poſée ſur la vis: c'eſt une marque que la partie de tout le niveau qui eſt vers l'oculaire, eſt trop peſante; il faudra donc charger la partie de la regle vers l'objectif, par le moyen d'un petit poids qui coulera ſur la regle, & qu'on pourroit y arrêter en quel endroit on voudroit avec une petite vis, ou bien ſeulement la charger avec un peu de cire molle & du plomb. On chargera cette partie de la regle,

regle, tant que les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, ſoient indifférentes à reſter ſur la pointe de la vis, ou à tomber ſur le devant, & alors il ſera rectifié.

Mais ſi d'abord les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, la regle ne peut pas ſe tenir ſur la vis, on connoîtra delà que la partie du niveau vers l'oculaire eſt trop legere, & alors il la faut charger comme on a fait dans l'autre cas, juſqu'à ce que le niveau ſoit dans un état indifférent de tomber ou de reſter ſur la pointe de la vis; & alors le niveau ſera rectifié.

On pourroit auſſi au lieu de charger la regle d'un côté ou d'autre, élever ou abaiſſer la pinnule oculaire dans ſon chaſſis, juſqu'à ce que le niveau fût juſte; ce qu'on pourroit faire ſi le niveau n'étoit pas bien éloigné d'être juſte.

On remarquera que dans ces opérations, toutes les fois que la Lunette tombe ſur le devant, on la remet ſur la pointe de la vis, en pouſſant le reſſort du haut de la boîte, lequel pouſſe en bas le chaſſis de la pinnule oculaire, & remet par ce moyen la regle ſur la pointe de la vis.

Comme ce niveau peut être mis dans une ſituation renverſée, qui eſt lorſque la Lunette eſt audeſſous des pivots, il faut expliquer ce qu'on doit obſerver en le conſtruiſant pour ſervir dans cet état.

Il eſt certain que ſi les pivots étoient une ligne mathématique, lorſqu'on renverſeroit le niveau, il pointeroit au même endroit où il pointoit dans ſa ſituation droite, pourvû que cet endroit fût parfaitement de niveau avec le lieu où le niveau eſt placé; & il faudroit ſeulement pour le rectifier, faire donner la Lunette au même point dans les deux ſituations du niveau, en augmentant ou en diminuant peu à peu la peſanteur de l'un des bouts de la regle. Mais comme les pivots doivent avoir une groſſeur conſidérable pour les rendre ſolides, il peut arriver que le plan, qui paſſe par le centre de gravité de tout le niveau, & par la ligne où les pivots s'appuient, ne ſera pas la même dans les deux ſituations du niveau: c'eſt pourquoi il faut le rectifier dans ſa poſition renverſée de même que

dans la droite. Mais comme on ne doit pas changer les pinnules qui sont rectifiées pour la position droite, il faudra seulement corriger l'endroit des pivots où ils portent sur l'appui dans la position renversée.

Le niveau étant donc renversé, si les pinnules ne donnent pas le même point que dans la situation droite rectifiée, il faudra limer un peu des pivots pour en repousser le tranchant vers l'objectif, si les pinnules donnent trop bas dans la situation renversée, ou vers l'oculaire si elles donnent trop haut.

On peut aussi faire les pivots d'une autre maniere, ensorte que le plan qui passera par le centre de gravité de l'instrument, & par l'endroit où les pivots s'appuient, sera le même dans les deux situations du niveau droite & renversée, & ainsi on pourra rectifier ce niveau d'une seule station sans avoir une ligne de niveau.

Dans cette seconde maniere les pivots doivent être cylindriques, & très-bien tournés & polis dans l'endroit où ils portent & touchent leurs appuis, qui doit être un peu creusé en forme de poulie. De plus, il faut que le bas & le haut du trou de l'appui qui soutient les pivots, soient presqu'en ligne droite, afin que les pivots n'y puissent toucher sensiblement qu'en un point.

Il est évident que dans cette construction des pivots, le centre de gravité du niveau, & la ligne qui passera par les endroits où les pivots s'appuient dans les deux situations du niveau, seront toujours dans un même plan, lequel passera aussi par l'axe du cylindre des pivots.

Cette suspension du niveau n'est pas si fine que la premiere, à cause que l'endroit du pivot où il touche sur l'appui est de figure circulaire, & dans la premiere il est d'une figure tranchante un peu émoussée.

Usage du Niveau.

Pour se servir de ce niveau, il faut mettre d'abord la vis à son repaire, afin que les pinnules soient vis-à-vis des

ouvertures de la boîte. Ensuite par le moyen du ressort on pousse la regle de la Lunette contre le bout de la vis, en sorte qu'elle ne tombe pas de l'autre côté, ce qui est facile à faire en inclinant la boîte; & dans cet état la regle de la Lunette étant posée sur la vis sans que le ressort l'y retienne, on penche peu à peu la boîte vers le bout où est l'objectif, jusqu'à ce que la Lunette tombe de ce côté-là. Alors on arrête la boîte le plus ferme qu'il est possible dans cet état ou sur un pié ou contre quelque corps solide; il faut que la Lunette soit alors pointée vers l'objet qu'on veut niveler, & l'on doit remarquer exactement la partie de l'objet qui paroît sur le trait qui sert de pinnule oculaire. Mais comme je suppose que la Lunette soit posée sur la vis, on doit pousser doucement la vis jusqu'à ce que la Lunette tombe de l'autre côté, & remarquer bien la partie de l'objet qui paroît sur le trait quand la Lunette tombe; & pour s'en assurer, on doit repousser la Lunette sur la vis par le moyen du ressort, & remarquer si elle tombe encore, & si c'est le même objet qui paroît sur le trait du verre lequel y paroissoit auparavant. On pourra alors détourner la vis d'une très-petite partie, & repoussant la Lunette sur la vis, observer quelle différence il y aura entre l'objet qui paroîtra sur le trait en cet état de la Lunette, & celui qui y paroissoit auparavant. Il faut aussi considérer si la Lunette s'arrête alors sur la vis, ou si elle tombe encore de l'autre côté: car pour avoir le point du niveau juste, il faut que la Lunette étant posée sur le bout de la vis, soit en état de tomber de l'autre côté sans qu'elle tombe, & qu'on ne puisse pas l'élever de la moindre quantité par le moyen de la vis sans qu'elle tombe; c'est alors que l'objet qui paroît dans la Lunette sur le trait de la pinnule, est de niveau avec le trait de cette pinnule.

Ce que je dis du niveau se doit toujours entendre du niveau apparent par rapport au lieu où est l'instrument qui sert à niveler, comme il est expliqué dans le Traité du Nivellement: car pour avoir le vrai niveau correspondant à celui où est posé l'instrument, il faut faire la correction au

point de niveau apparent par rapport à la distance entre le lieu où est l'instrument & le point nivelé : mais il ne s'agit pas ici de la pratique du nivellement.

Un des avantages de ce niveau, c'est de pouvoir être renversé, & de servir encore de niveau dans cette situation sans aucune préparation ni changement ; & quoiqu'il ait alors quelques vibrations, elles ne durent que peu de temps : car elles ne viennent que du corps de l'instrument, & non-pas du mouvement de la boîte qui doit être arrêtée ferme, mais sans aucune sujettion, puisqu'elle ne fait rien perdre de la justesse du niveau. On pourra aussi arrêter facilement les balancemens du niveau, en appuyant doucement le ressort contre le chassis de la pinnule, & en le laissant remettre ensuite en son état naturel.

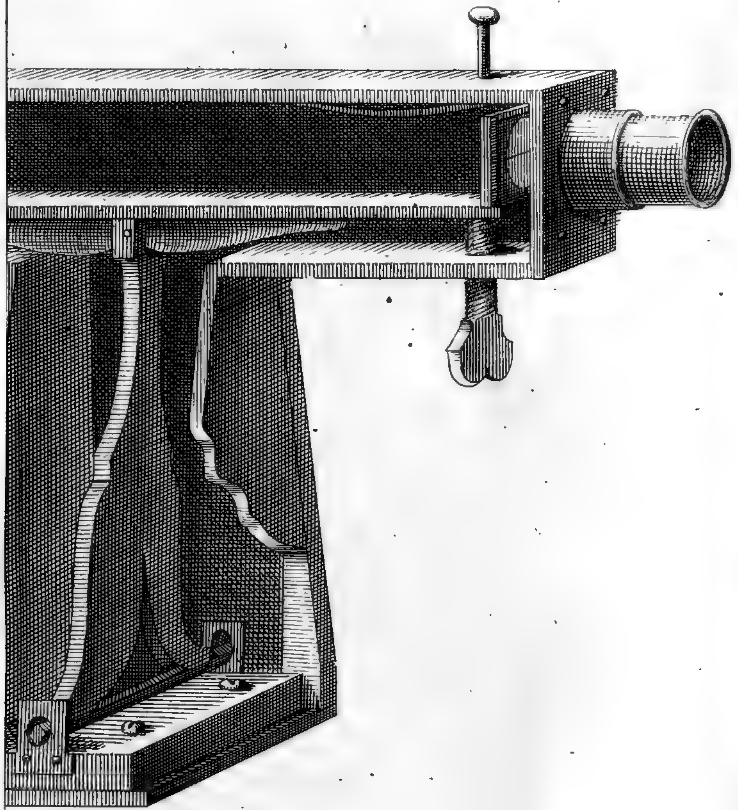
Pour la grandeur de ce niveau elle n'est point déterminée ; car plus la Lunette sera grande, & plus les objets éloignés paroîtront distinctement : mais il sera bien plus incommode à être transporté.

J'ai éprouvé qu'un de ces niveaux, dont la hauteur & la longueur n'est que de 10 pouces, détermine le niveau à 3 ou 4 pouces près à une distance de 1000 toises ; ce qui est tout ce qu'on peut espérer d'un niveau, puisqu'un objet de cette grosseur à cette distance, est entierement couvert par un filet simple de ver à soye.

On pourra se servir de différens soutiens : mais une des manieres des plus commodes pour l'usage, sera d'attacher la boîte du niveau bien ferme avec une vis contre la traverse d'un chevalet de Peintre qui soit solide. On pourra aussi le tenir seulement à la main, & l'appuyer contre quelque corps bien stable pendant qu'on fait les opérations.

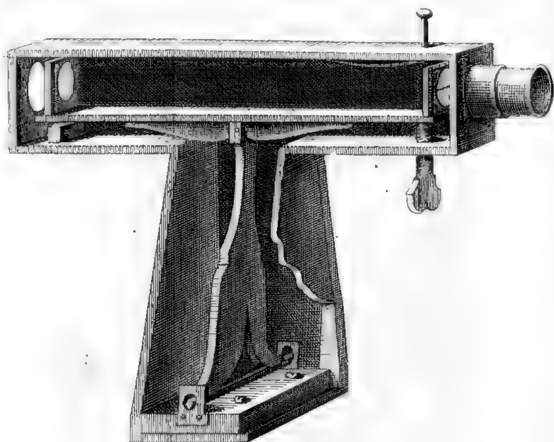
Il faut remarquer que lorsqu'on veut transporter ce niveau, il est bon que les pivots ne portent point sur leurs appuis ; ce qui sera facile si ces pivots débordent un peu hors de la boîte, & qu'il y ait en cet endroit sur la boîte deux espéces de crochets qui s'engagent dans les bouts des pivots, & qui tiennent tout le niveau élevé hors des appuis.

u Niveau proposé dans sa boëte dont le devant est ôté.



Berey fecit

Figure du Niveau proposé dans sa boëte dont le devant est ôté.



Berey fecit

On pourra auſſi arrêter la Lunette contre le bout de la vis par le moyen du reſſort qu'on arrêtera ſur la pinnule. Mais ſi l'on veut ouvrir le couvercle de la boîte, on pourra engager tout le niveau entre quelques taſſeaux qui l'empêcheront de balancer d'un côté ni d'autre en le tranſportant dans un long voyage.

DES MOUVEMENS DE L'IRIS,

Et par occaſion, de la partie principale de l'Organe de la vûe.

PAR M. MERY.

L'Iris eſt un cercle membraneux, poſé ſur le devant de l'œil. On l'a ainſi nommé à cauſe des différentes couleurs qui dans l'homme paroiſſent ſur ſa ſurface au travers de la cornée tranſparente. 1704. 12. Novembre.

Ce cercle forme dans ſon centre un trou à qui on a donné le nom de prunelle, apparemment parce qu'il paroît de couleur noire. Ce trou eſt abſolument néceſſaire pour la viſion : car s'il avoit été fermé par l'Iris qui eſt opaque, les rayons de la lumiere, ſans leſquels la viſion ne ſe peut faire, n'auroient pû paſſer dans l'œil.

La prunelle ſe dilate dans l'ombre & dans l'eau : elle ſe reſſerre dans l'air étant expoſée aux rayons de la lumiere, ſans qu'on s'apperçoive que la volonté ait part à ſes mouvemens. Quand la prunelle ſe dilate, les fibres de l'Iris s'accourciſſent ; quand elle ſe reſſerre, ces fibres s'allongent.

Or comme on ne remarque point de fibres circulaires dans l'Iris pour rétrécir la prunelle, il y a lieu de croire que ſa dilatation dépend uniquement du reſſort des fibres

droites de l'Iris, qui toutes vont se terminer à la circonférence interne de ce cercle.

Mais quoiqu'il paroiſſe que le rétréciſſement de la prunelle dépende abſolument des rayons de la lumiere, néantmoins ces rayons ne peuvent pas d'eux-mêmes prolonger les fibres de l'Iris, ni rétrécir la prunelle. Tout ce qu'ils peuvent faire c'eſt de donner ſeulement, par leur entrée dans l'œil, occaſion aux eſprits animaux de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne ſont dans l'ombre; ce ſont donc ces eſprits qui, en prolongeant les fibres de l'Iris, ſont effectivement la cauſe de la dilatation de la prunelle. D'où il s'enſuit que ce trou doit plus ou moins ſe rétrécir, ſelon que la lumiere, étant plus ou moins forte, détermine une plus ou moins grande quantité d'eſprits à couler dans les fibres de l'Iris: mais pour cet effet la reſpiration doit être de la partie; car quand elle vient à manquer, le mouvement des eſprits animaux s'arrête, & alors la lumiere devient inutile.

L'obſervation que je vais rapporter prouve cette hypotheſe dans toutes ſes parties. Quand l'on plonge dans l'eau la tête d'un chat vivant, ſi l'on expoſe ſes yeux aux rayons du Soleil, la prunelle ſe dilate au lieu de ſe rétrécir; au contraire expoſés dans l'air aux mêmes rayons de cet Aſtre, la prunelle ſe rétrécit au lieu de ſe dilater.

Par l'explication du premier de ces deux phénomenes qui ſemble détruire l'hypotheſe que je veux établir, je vais démontrer que la dilatation de la prunelle dépend uniquement du reſſort des fibres de l'Iris. Par celle du ſecond, je ferai connoître que les eſprits animaux ſont la cauſe immédiate de ſon rétréciſſement, & que la lumiere n'en peut être que l'occaſion.

Quant au premier phénomene, il faut remarquer que, lorſque la tête du chat eſt plongée dans l'eau, cet animal ne peut plus reſpirer: or le mouvement de toute la matiere des eſprits animaux dépendant du mouvement circulaire du ſang, & celui-ci de la reſpiration, il eſt évident que quand elle vient à manquer, la circulation du ſang &

le mouvement des esprits animaux doivent cesser bien-tôt après. On observe qu'à mesure que le mouvement de ces esprits se ralentit, la prunelle se dilate, les esprits animaux ne peuvent donc pas être la cause de son élargissement. Il faut donc nécessairement que sa dilatation dépende uniquement du ressort des fibres de l'Iris.

A l'égard du second phénomene, si l'on retire le chat de l'eau encore vivant, & qu'on expose ses yeux aux rayons du Soleil, on voit la prunelle se rétrécir à mesure que la respiration se rétablit. Donc les esprits animaux qui pour lors viennent à couler dans les fibres de l'Iris, sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle : car l'on ne peut pas l'attribuer aux rayons de la lumiere; parce que les yeux de cet animal étant plongés dans l'eau, la prunelle se dilate, quoiqu'il entre dans leur globe beaucoup plus de lumiere, que lorsqu'ils sont dans l'air exposés à ses rayons; la lumiere ne peut donc être que l'occasion de l'écoulement des esprits animaux dans les fibres de l'Iris : mais elle ne le peut procurer, si l'animal ne respire; d'où il est aisé du juger que la lumiere ne cesse de produire cet effet, quand la tête du chat est plongée dans l'eau, que parce que le mouvement des esprits animaux est arrêté dans leur source par le défaut de la respiration dont il dépend absolument, de même que celui du sang.

Que la dilatation de la prunelle depende uniquement du ressort des fibres de l'Iris, son rétrécissement des esprits animaux immédiatement, & par occasion de la lumiere; en voici des preuves bien convaincantes.

Premierement, quand par l'obstruction des nerfs optiques les esprits animaux ne peuvent plus s'écouler dans les yeux de l'homme, la prunelle se dilate; il est donc visible que sa dilatation ne dépend pas de ces esprits, mais du ressort des fibres de l'Iris, qui fait que dans cette maladie ces fibres s'accourcissent.

Secondement, si pendant l'obstruction de ces nerfs on expose les yeux de cet homme à la plus grande lumiere, la

prunelle reste dans la même dilatation; les rayons du Soleil ne peuvent donc pas être d eux-mêmes la cause de son rétrécissement.

Troisiemement, si on leve l'obstruction des nerfs optiques, & qu'on expose ensuite les yeux de cet homme aux rayons de la lumiere, la prunelle se resserre; il est donc évident que les esprits animaux, qui dans ce moment viennent à couler dans les fibres de l'Iris qu'ils prolongent, sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle, & que la lumiere n'en peut être que l occasion; d'où il s'ensuit que la force du ressort des fibres de l'Iris étant en équilibre avec la puissance des esprits animaux, la prunelle doit rester dans une moyenne dilatation: mais pour cela il ne faut qu'une lumiere médiocre, car quand elle est trop foible ou trop forte, l équilibre se rompt, & alors la prunelle se dilate ou se rétrécit considérablement.

Une lumiere foible, telle qu'elle est dans l'ombre, déterminant peu d'esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, leur ressort l'emporte sur ces esprits, & dans ce moment la prunelle s'élargit davantage. Au contraire une lumiere forte donnant occasion aux esprits animaux de couler plus abondamment dans les fibres de l'Iris, ces esprits surmontent par leur puissance la force du ressort de ces fibres, & alors la prunelle se rétrécit beaucoup plus.

De ces preuves soutenues par des expériences si évidentes l'on peut enfin conclurre. 1°. Que les esprits animaux sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle. 2°. Que la lumiere ne fait que donner occasion à l'écoulement de ces esprits. 3°. Que la volonté n'y a point de part. 4°. Que le ressort des fibres de l'Iris est l'unique cause de la dilatation de la prunelle.

Sur ce systeme, quoique fondé sur des observations indubitables, il se présente néanmoins à l'esprit trois difficultés considérables, dont voici la premiere: Savoir s'il entre moins de lumiere dans les yeux lorsqu'ils sont dans l'air, que quand ils sont dans l'eau exposés aux rayons du Soleil.

Pour reconnoître dans lequel de ces deux élémens il passe

paſſe plus de lumiere dans les yeux, il n'y a qu'à remarquer qu'un lieu eſt d'autant plus éclairé, qu'il reçoit plus de ſes rayons; & que plus ce lieu eſt éclairé, mieux on voit les objets qu'il renferme.

Or on ne peut diſcerner aucunes des parties contenues dans les yeux expoſés dans l'air; au lieu que plongés dans l'eau, on les voit fort diſtinctement, excepté les humeurs & la rétine, qui diſparoiſſent de telle ſorte, que le dedans du globe des yeux ſemble n'être rempli que d'un air lumineux. Il entre donc beaucoup moins de rayons de lumiere dans les yeux expoſés à l'air, que plongés dans l'eau; ce qui arrive par les raiſons que je vais rapporter.

Quelque polie que paroiſſe la ſurface extérieure de la cornée tranſparente, il eſt néantmoins conſtant qu'elle a beaucoup d'inégalités imperceptibles, qui n'étant point applanies, réfléchiſſent dans l'air un grand nombre de rayons de la lumiere qui tombent ſur cette membrane.

D'ailleurs lorſque les yeux ſont expoſés dans l'air aux rayons du Soleil, la prunelle ſe rétrécit conſidérablement. Il ne peut donc paſſer en cet état qu'un très-petit nombre de ſes rayons dans les yeux; ce qui n'étant pas ſuffiſant pour éclairer leur globe, il n'eſt pas étrange qu'on ne puiſſe diſcerner aucune des parties qui y ſont renfermées.

Mais auſſi n'eſt-il pas extraordinaire de les y appercevoir quand les yeux ſont plongés dans l'eau; parce que les inégalités de la cornée étant applanies par ce liquide, & la prunelle tout à fait dilatée, tous les rayons du Soleil qui tombent ſur la cornée tranſparente paſſent à travers, & entrant dans le globe des yeux, ils l'éclairent ſi fort, qu'on peut voir alors très-diſtinctement l'extrémité du nerf optique, & la choroïde avec toutes ſes couleurs & ſes vaiſſeaux Mais l'on ne peut nullement appercevoir ni les humeurs, ni la rétine; parce qu'étant tranſparentes comme l'eau, elles ſemblent ne faire qu'un même corps avec elle; ce qui fait qu'on ne peut les diſtinguer d'avec l'eau.

Que la ſurface de la cornée, quelque polie qu'elle pa-

roiſſe, ſoit remplie d'inégalités que l'eau applanit; en voici une preuve bien ſenſible. Dans la goutte ſereine, la prunelle de l'homme ſe dilate entierement, & ſes yeux étant expoſés à la plus grande lumiere, ce trou ne peut ſe rétrécir.

Or ſi la ſurface de la cornée étoit parfaitement polie, tous les rayons de lumiere qu'elle recevroit, devroient paſſer dans les yeux de l'homme expoſés à l'air, comme ils font dans ceux du chat plongés dans l'eau, & l'on découvriroit également dans l'un & dans l'autre la choroïde. On n'apperçoit point cette membrane dans les yeux de l'homme, on la voit dans ceux du chat; il faut donc qu'il y ait ſur la ſurface de la cornée des inégalités imperceptibles que l'air ne peut unir, mais que l'eau applanit. Et c'eſt par cette raiſon qu'un homme, pour peu qu'il ait les yeux plongés dans l'eau, apperçoit un objet au fond d'une riviere, qu'il ne peut plus voir lorſqu'il les a hors de l'eau appliqués à demie ligne de ſa ſuperficie. C'eſt auſſi par la même raiſon, la vie étant éteinte, que la choroïde d'un chat que l'on voit dans l'eau, ne peut être apperçue dans l'air, quoique la prunelle reſte également dilatée dans ces deux élémens après la mort de cet animal.

L'applaniſſement des inégalités de la cornée par l'eau, ſe vérifie encore par l'exemple du verre. Il reſte toujours au plus poli des parties raboteuſes qui réfléchiſſent dans l'air quand il y eſt expoſé, une grande partie des rayons de la lumiere qui viennent ſe rendre ſur ſa ſurface: mais lorſqu'il eſt plongé dans l'eau, tous ces rayons paſſent à travers; parce que toutes les inégalités du verre étant applanies par ce liquide, il ne ſe fait plus de réflexion dans l'air d'aucune partie de la lumiere.

Il eſt donc certain par toutes ces expériences, premierement, que les inégalités de la cornée ne pouvant être applanies par l'air lorſqu'elle y eſt expoſée, elles doivent repouſſer la plus grande partie des rayons de la lumiere qui viennent frapper cette membrane; ce qui fait qu'il en paſſe ſi peu dans le globe des yeux, qu'on ne peut voir la choroïde, lors même que la prunelle eſt entierement dilatée dans un grand jour.

Secondement, que les inégalités de la cornée étant applanies par l'eau, alors tous les rayons de lumiere que reçoit cette membrane, doivent passer à travers, & rendre en entrant dans le globe des yeux la choroïde visible avec toutes ses couleurs & ses vaisseaux.

La seconde difficulté consiste à savoir, si les rayons de la lumiere qui entrent dans le globe des yeux par la prunelle, déterminent effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, ou si ces rayons s'insinuant dans ces fibres ne font seulement que raréfier ce qu'ils renferment de ces esprits; ce qui pourroit produire le même effet, c'est-à-dire, prolonger les fibres de l'Iris, comme peuvent faire les esprits animaux par leur épanchement.

Pour répondre à cette difficulté, il ne faut qu'examiner si la matiere des esprits animaux peut s'exhaler sitôt que leur mouvement vient à cesser. Comme il n'y a pas d'apparence qu'elle se dissipe avant la mort, il est aisé de décider la question par l'expérience de la tête du chat que je viens de rapporter.

Quand la tête d'un chat vivant est plongée dans l'eau, ses yeux exposés au Soleil, il est constant qu'il entre beaucoup plus des rayons de cet astre dans leur globe, que lorsqu'ils sont dans l'air exposés à sa lumiere.

Dans l'eau la prunelle se dilate, & le mouvement des esprits animaux cesse. Donc tous les rayons du Soleil qui entrent dans les yeux du chat, ne sont pas capables par eux-mêmes de raréfier la matiere de ces esprits renfermée dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'accourcissent dans l'eau.

Au contraire, si on retire de l'eau la tête du chat encore vivant, & qu'on expose ses yeux aux rayons du Soleil, les esprits animaux reprennent leur cours, & alors la prunelle se resserre. Donc le peu de lumiere qui entre dans le globe des yeux, détermine effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'allongent dans l'air.

On me demandera peut-être comment les rayons de la lumiere peuvent donner occasion à l'écoulement des esprits animaux dans les fibres de l'Iris. Voici sur cela quelle est ma conjecture.

Je viens de faire remarquer que ce n'est point en raréfiant la matiere de ces esprits. On peut donc penser qu'en même temps que les rayons de la lumiere entrent dans le globe des yeux, ils s'insinuent dans leurs nerfs, & rendent la matiere des esprits animaux plus fluide qu'elle n'est naturellement; ce qui donne occasion à ces esprits de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne font dans l'obscurité.

La troisieme difficulté qui se présente à l'esprit contre l'hypothese que je soutiens, c'est qu'on a peine à comprendre que les fibres de l'Iris puissent s'allonger à mesure de ce qu'ils reçoivent d'esprits animaux; parce qu'on est prévenu que tous les muscles s'accourcissent d'autant plus, qu'ils en sont pénetrés d'une plus grande quantité; au lieu que les fibres de l'Iris s'allongent d'autant plus, qu'ils en reçoivent davantage.

Pour résoudre cette difficulté qui paroît la plus embarrassante, je me représente la structure des fibres de l'Iris semblable à celle des corps caverneux de la verge, qui s'allongent à mesure qu'ils reçoivent plus ou moins d'esprits animaux. Les fibres de l'Iris doivent donc s'étendre de même, selon qu'ils en sont plus ou moins remplis, si leur structure est la même que celle des corps caverneux.

Ce qui semble confirmer davantage cette idée, c'est qu'il est certain que le raccourcissement des fibres de l'Iris dépend, de même que celui des corps caverneux, de leur ressort.

Au reste l'expérience qui m'a appris que les humeurs des yeux disparoissent lorsqu'elles sont dans l'eau exposées aux rayons du Soleil, me fournit un moyen assuré pour résoudre aisément ce probleme; savoir, quelle est la partie principale de l'organe de la vûe.

On ne doute pas que ce ne soit celle sur laquelle se va peindre l'image des objets. Or les trois humeurs de l'œil

donnant paſſage aux rayons de la lumiere, il eſt conſtant que l'image des objets ne peut ſe former ſur aucune de ces humeurs, nulle d'entr'elles ne peut donc être la partie principale de l'organe de la vûe.

Et parce que ces mêmes rayons de la lumiere qui entrent dans le globe de l'œil traverſent encore la rétine, il n'y a pas non plus d'apparence que cette membrane puiſſe être la partie principale de cet organe à laquelle on doive rapporter la viſion; puiſque l'image des objets ne peut pas auſſi ſe peindre ſur cette membrane, qui, comme les humeurs, diſparoît dans l'eau étant expoſée aux rayons du Soleil; ce qui confirme l'obſervation de M. Mariot.

Ce ſavant Académicien a remarqué il y a long-temps, que lorſque les rayons de la lumiere réfléchie par les objets tombent ſur l'extrémité du nerf optique où la choroïde eſt percée, on ne peut appercevoir l'objet d'où ils partent; parce que ces rayons s'enfoncent dans le corps de ce nerf, où ils s'amortiſſent & s'éteignent.

Or la rétine n'étant qu'un développement fort ſuperficiel de ſa moëlle, que ces rayons peuvent percer beaucoup plus aiſément, ne peut pas les arrêter; donc cette membrane ne peut pas être la partie principale de l'organe de la vûe.

D'ailleurs cette même expérience qui m'a fait découvrir, que les rayons de la lumiere traverſent les humeurs & la rétine, m'a fait auſſi connoître que ces mêmes rayons ſont enfin arrêtés par la choroïde qui eſt opaque; il y a donc bien de l'apparence que c'eſt plutôt ſur la ſurface de cette membrane que ſur la rétine, qui eſt tranſparente, que va ſe peindre l'image des objets; la choroïde eſt donc la partie principale de l'œil. C'eſt ce que la maniere dont ſe fait la viſion ſera aiſément comprendre.

Lorſque la lumiere vient directement du corps lumineux frapper la choroïde, ſes rayons réfléchis par cette membrane contre la rétine, ébranlent les filets de celle-ci, & donnent aux eſprits animaux dont ils ſont remplis, une modification particuliere, qui produit dans l'ame le ſentiment de lumiere.

Quand au contraire la lumiere ſortant du corps lumineux ſe porte ſur un objet capable de la réfléchir, & que par réflexion elle tombe ſur la choroïde, ſes rayons repouſſés par cette membrane, donnent alors aux eſprits animaux renfermés dans les filets de la rétine qu'ils ébranlent par leur retour, une autre modification qui cauſe dans l'ame le ſentiment de couleur.

Et parce que la lumiere en ſe réfléchiſſant ſe revêt de la figure & de la grandeur du corps qui la renvoie, cela fait qu'avec la couleur on apperçoit auſſi la figure & la grandeur de l'objet; & c'eſt en quoi conſiſte toute ſon image.

Contre l'uſage de la choroïde que je viens d'établir ſur des expériences ſenſibles, on pourroit cependant me faire cette objection.

La maniere dont vous expliquez la viſion, montre qu'elle dépend de l'ébranlement des petits filets nerveux de la rétine, & de la modification des eſprits animaux qui y ſont renfermés. Cela étant, les rayons de la lumiere ſont donc capables, étant réfléchis ſeulement par les objets, de donner d'abord en entrant dans l'œil, aux filets de la rétine & aux eſprits animaux, ce mouvement particulier que vous dites être néceſſaire pour la ſenſation. La rétine eſt donc dans votre principe la principale partie de l'œil qui ſert à la viſion, & non la choroïde.

Pour répondre à cet argument, je dis que ſi les rayons de la lumiere réfléchis par les objets, n'étoient une ſeconde fois réfléchis par la choroïde, nous ne pourrions voir les objets. C'eſt ce que nous montre l'expérience : car quand les rayons de la lumiere modifiés ſeulement par les corps qui les renvoient vers nos yeux, tombent ſur le centre du nerf optique où la choroïde eſt percée ; nous ne pouvons pas, comme a fort bien remarqué M. Mariot, appercevoir les objets : nous les voyons quand ces rayons viennent frapper la choroïde. C'eſt donc cette membrane, qui repouſſant une ſeconde fois les rayons de la lumiere contre la rétine, modifie les filets nerveux de cette membrane

d'une maniere propre à faire ſentir à l'ame & la lumiere, & les objets. La choroïde eſt donc enfin la partie principale de l'organe de la vûe.

DISCOURS SUR LES BAROMETRES.

PAR M. AMONTONS.

PArmi les découvertes de Phyſique du dernier Siecle, celle du Barometre, ou de la maniere de meſurer le poids de l'atmoſphere peut bien tenir le premier rang. 1704. 12. Novembre.

La netteté & l'évidence avec leſquelles on explique à préſent pluſieurs effets de la nature, où l'on ne voyoit avant cette découverte qu'obſcurité & qu'incertitude, en ſont des preuves aſſez convainquantes. Perſonne preſque n'ignore que les effets qu'on attribuoit autrefois à l'horreur du vuide, avoient des cauſes qui étoient alors tout à fait inconnues à ceux-mêmes qui ſe ſervoient le plus volontiers de cette expreſſion.

C'eſt ainſi que ce qui eſt très-obſcur & preſque impénétrable dans un temps, devient de la derniere évidence dans un autre.

Mais quoiqu'il ſoit vrai que depuis cette découverte on ait éclairci ſur ce ſujet une infinité de choſes très-difficiles avec toute la clarté qu'on peut ſouhaiter; on ne peut néantmoins douter qu'il n'en reſte encore un grand nombre, & que ces dernieres le ſont d'autant plus, qu'elles ſont moins apparentes, & qu'elles ne ſe préſentent pas d'abord à l'eſprit comme les premieres.

Dans la nouveauté du Barometre, les effets ſurprenans du poids de l'air ont ſeuls attiré toute l'attention de ceux qui les voyoient. On ſe laiſſoit volontiers prévenir qu'il étoit la ſeule cauſe du mouvement du mercure; & ſi l'on faiſoit réflexion qu'il n'y a rien ſur quoi la chaleur n'agiſſe, on croyoit qu'en ce rencontre c'étoit ſi peu de choſe que

cela ne valloit pas la peine de s'y arrêter. On passoit aisément pardessus un raisonnement qui n'avoit rien de nouveau, pour admirer un systeme dont la nouveauté surprenoit agréablement par son heureux succés ; & l'on n'avoit, pour ainsi dire, des yeux que pour considérer une foule d'expériences toutes curieuses, qui se présentoient & s'expliquoient comme d'elles-mêmes, sans qu'il fût besoin de rien déterminer de précis.

En effet, il importoit peu pour rendre raison, par exemple, des pompes, des siphons, & de presque toutes les autres expériences de la pesanteur de l'air, de savoir que le poids du mercure n'étoit pas le même en été qu'en hiver. Il suffisoit qu'on fût assuré que ce n'étoit pas d'une quantité assez considérable pour empêcher de déterminer en général l'élévation du mercure dans les tubes environ à 28 pouces, & celle de l'eau à 32 pieds.

Mais enfin ces effets apparens & palpables du poids de l'atmosphere étant maintenant suffisamment expliqués d'une maniere générale, il nous reste à le faire d'une maniere plus particuliere & plus précise, & à porter notre attention sur d'autres, qui, pour être plus cachés, n'en sont pas moins utiles.

La seule chose qui pourroit en cela nous faire de la peine, c'est que le Barometre propre à expliquer en gros l'effet des pompes & des siphons, devient fautif & mauvais quand il s'agit, par exemple, de mesurer les vicissitudes du poids de l'atmosphere, d'en déterminer la hauteur & de niveler plusieurs points sur la surface de la terre. Dans l'observation du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphere, on peut trouver une différence de trois lignes & plus dans la hauteur du mercure, quoique véritablement le poids de l'atmosphere n'ait point changé ; ce qui provient de l'effet que la chaleur produit sur le mercure du Barometre, l'expérience ayant fait connoître qu'une colonne de mercure de 28 pouces 9 lignes en hyver, & une de 29 pouces en été, ne pesent pas plus l'une que l'autre. De même le Barometre simple étant porté dans

dans le temps du grand froid de notre climat, d'un lieu élevé ſur la ſurface de la terre, dans un autre creuſé au-deſſous, pourra donner une différence, dans la hauteur du mercure, d'une ligne & demie, qu'on attribueroit fauſſement au poids de la colonne d'air qui ſeroit entre ces deux lieux: & ſi l'on s'aviſoit de vouloir déterminer ſur cette expérience, la hauteur de l'atmoſphere, ou la différence du niveau de deux endroits de la terre, on courroit grand riſque de faire très-mal l'un & l'autre.

Les Barometres ou ſont ſimples, c'eſt-à-dire, chargés ſeulement de mercure; ou bien ils ſont doubles, c'eſt-à-dire, qu'outre le mercure on y emploie encore une ſeconde liqueur qui eſt ordinairement de l'huile de tartre teinte. Pour ce qui eſt des Barometres ſimples, l'étendue de leur mouvement eſt fort médiocre, n'excedant guere 23 à 24 lignes, & à ceux-ci il n'y a autre choſe à faire pour éviter l'erreur, que de dreſſer une Table de correction qui montre les quantités proportionnelles dont la chaleur fait allonger la colonne de mercure de l'hiver à l'eſté, & qu'il convient par conſéquent retrancher des hauteurs indiquées par le Barometre lors de l'obſervation. Par exemple, mes Thermometres, c'eſt-à-dire, ceux dont on trouve la deſcription à la fin de la Connoiſſance des Temps de 1704, & dans les Mémoires de 1702 & 1703; ces Thermometres, dis-je, marquant 58 pouces, qui eſt le temps de nos grandes chaleurs, il y a 3 lignes à retrancher de la hauteur où ſe trouve le mercure dans le Barometre ſimple; 2 lignes lorſque ces Thermometres marquent 55 pouces 4 lignes; 1 ligne ſeulement lorſqu'ils ne marquent que 52 pouces 8 lignes, & o ou rien lorſqu'ils ne marquent que 50 pouces, & ainſi des autres corrections à faire pour tous les autres degrés de chaleur entre ceux-ci, qu'on trouvera en dreſſant une Table exacte ſur ce fondement.

Mais quant aux Barometres doubles dont le mouvement eſt beaucoup plus conſidérable, & ſur leſquels la chaleur produit des effets différens dont la combinaiſon empêche



qu'on n'en puiſſe facilement faire la correction par une Table, joint que les perſonnes qui ſe ſervent de ces Barometres ſont pour la plûpart peu accoutumés à ces ſortes de corrections ; voici le moyen dont je me ſuis ſervi afin que cette correction ſe pût faire comme d'elle-même & ſans Table.

Ces Barometres ſont compoſés de deux boîtes de verre *AB*, qui ont communication l'une à l'autre par un tube recourbé *ACB*.

La boîte *A* ſe termine en une pointe qui eſt ſcellée hermétiquement. La moitié ſupérieure de cette boîte eſt vuide d'air groſſier : l'autre moitié, le tube *ACB*, & la moitié inférieure de la boîte *B*, contiennent du mercure. Cette boule *B* ſe termine en un tube fort menu *BD*, ouvert en *D*. La moitié ſupérieure de la boîte *B*, & une partie du tube *BD* contiennent une liqueur qui hauſſe & baiſſe dans le tube, ſuivant que l'atmoſphere eſt plus ou moins leger; le mercure *AC* contre-balançant & faiſant toujours équilibre avec le mercure *CB*, la liqueur *BD* & l'atmoſphere.

Tout ceci eſt à préſent connu preſque de tout le monde : mais ce qui paroît n'avoir encore été remarqué de perſonne, c'eſt que le mercure contenu en *AB* devenant plus leger en eſté qu'en hiver, l'atmoſphere repouſſe vers le bas la liqueur contenue dans le tube *BD* aſſez ſenſiblement, comme de 3 à 4 pouces, & donne fauſſement à préſumer que l'atmoſphere eſt devenu plus peſant de cette quantité, quoiqu'en effet ſa peſanteur n'ait point changé.

Pour prévenir donc ce défaut, il faudroit que la colonne de mercure *AB* pût s'allonger ſuffiſamment pour remplacer le poids que la chaleur leur fait perdre, ſans que la liqueur du tube change de place. Pour cela, j'ai pris une liqueur qui ſe raréfiât aiſément par la chaleur, comme fait l'eſprit de vin ; j'ai ſubſtitué cette liqueur à l'huile de tartre, qu'on emploie ordinairement, & qui ne ſe raréfie pas à beaucoup près ſi ſenſiblement.

J'ai augmenté la capacité de la boîte *B*, qui contient ordinairement cette liqueur, afin qu'il y en pût tenir davan-

tage, & assez pour produire une raréfaction suffisante pour faire baisser le mercure de la même boîte, & allonger par ce moyen la colonne de mercure *AB*, qui sans cela ne s'allongeroit pas, quoique la chaleur l'eût rendue plus legere; parce que l'atmosphere ne pesant pas immédiatement sur le mercure de la boîte *B*, mais sur la liqueur du tube *D*, il feroit baisser cette liqueur, & suppléeroit par ce moyen à la legereté du mercure; ce qui, comme j'ai déja dit, donneroit faussement à présumer que l'atmosphere seroit devenu plus pesant, quoiqu'il n'ait point changé : au lieu que la liqueur de la boîte *B* trouvant dans sa raréfaction toujours la même résistance du côté de l'atmosphere, supposé que son poids n'ait point changé; & en trouvant moins du côté du mercure, rendu plus leger par la chaleur, cette liqueur emploie toute l'action de sa raréfaction contre le mercure qu'elle repousse & qu'elle remet toujours en équilibre avec l'atmosphere, sans que la liqueur du tube *D* sur laquelle l'atmosphere agit immédiatement soit contrainte de changer de place, que lors seulement que l'atmosphere change de poids; & tout l'artifice qu'il y a en cela ne gît qu'à bien proportionner la capacité qui contient la liqueur à la capacité du tube du Barometre : car une trop petite ne corrigeroit pas entierement l'erreur; & une trop grande, en repoussant trop le mercure, feroit que la liqueur dans la raréfaction trouveroit à la fin trop de résistance de la part du mercure, & seroit obligée d'agir du côté de l'atmosphere, ce qui donneroit faussement à présumer que l'air seroit devenu plus léger.

Il me reste à remarquer qu'encore que par ce moyen l'erreur qui pourroit arriver par le plus ou le moins de légereté de mercure se corrige d'elle-même, il y en a encore une seconde à éviter qui pourroit être causée par le plus ou le moins de légereté de la liqueur.

Cette erreur ne seroit pas à la vérité si considérable que la premiere, & pourroit fort bien être négligée sans grande conséquence : mais il sera toujours mieux d'y avoir égard,

principalement dans le cas où il s'agit de précision; & c'est ce qu'on pourra faire par le moyen de la graduation, ainsi que je le vais dire.

On divise ordinairement cette graduation en parties égales entr'elles, qui ne signifient rien, & qui ne sont seulement que pour exprimer par leur nombre plus ou moins grand que la liqueur est plus ou moins haute, & par conséquent que l'atmosphere est plus ou moins leger; mais non pas de combien, & ces nombres n'expriment jamais le poids de l'atmosphere.

J'ai donc jugé qu'il seroit plus à propos que ces parties, quoique de beaucoup plus grandes, représentassent les pouces & les lignes que le mercure parcourt dans le Barometre simple de la moindre à la plus grande légereté de l'atmosphere.

Ainsi je divise toute ma graduation qui est d'environ 28 pouces en 24 parties égales, qui expriment les 24 lignes comprises dans le Barometre simple entre 28 pouces 4 lignes, qui est la plus grande pesanteur que j'aie experimentée dans l'atmosphere, & 26 pouces 4 lignes qui est la moindre.

Je donne à cette graduation une largeur d'environ 14 lignes par haut, & seulement une ligne un quart ou environ par bas.

Je divise chacune de ces largeurs en huit parties égales, & je mene des lignes droites des divisions d'enhaut à celles d'embas; ce qui forme huit trapezes d'environ 28 pouces de longueur.

Finalement, je coupe tous ces trapezes par des lignes paralleles entr'elles tirées des 24 divisions qui montent, & après avoir numéroté ces 24 divisions en descendant depuis 26 pouces 4 lignes jusqu'à 28 pouces 4 lignes, je numérote les 8 divisions latérales depuis 50 jusqu'à 58, le tout ainsi qu'on le peut voir par la Figure ci-jointe.

Ces huit divisions latérales représentent les huit pouces compris sur la graduation de mon Thermometre depuis 50

jusqu'à 58, c'est-à-dire, depuis le plus grand froid jusqu'au plus grand chaud de notre climat, & me servent à faire la correction de l'erreur que le plus ou le moins de légereté de la liqueur du Barometre pourroit causer, & cela en la maniere qui suit.

Je regarde premierement sur mon Thermometre à quelle division il est; ensuite je prends sur mon Barometre vis-à-vis l'endroit où il se trouve la partie latérale comprise entre la premiere ligne montante de la graduation, & la ligne montante qui répond à la division que j'ai observée sur le Thermometre.

Ajoutant cette partie à la hauteur du mercure que le Barometre indique, j'ai précisément le poids de l'atmosphere.

Ce seroit ici l'endroit de rendre raison de la construction particuliere de ce Barometre & de sa graduation : mais comme elle se déduit d'un détail qui seroit ennuyeux, & que je l'ai déja donnée dans les Mémoires du 18 Juin dernier; ceux qui en voudront savoir davantage pourront y avoir recours. Je me contenterai d'avertir que ce Barometre, outre sa grande précision, a encore l'avantage d'être presque de moitié plus sensible que les autres, & qu'il faut soigneusement prendre garde qu'il ne reste point d'air dans le haut de la boîte supérieure au-dessous du mercure.

Après ce que je viens de dire de l'effet de la chaleur sur les liqueurs dont le Barometre double est rempli, il reste à examiner quelle peut être son action sur le verre qui contient ces liqueurs, & s'il n'y a point lieu de craindre que cela n'altere encore l'indication du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphere; ce qui n'est pas sans fondement. Car enfin nous ne connoissons rien dans la nature, de tout ce qui tombe sous les sens, sur quoi la chaleur ne manifeste son pouvoir : ainsi il n'y a point de doute qu'elle n'agisse sur le verre comme sur toute autre chose, & qu'elle ne le dilate de sorte que, véritablement parlant, la capacité d'un vase ou bouteille de verre est plus grande en esté qu'en hiver. Mais la question est de savoir si cela pourroit être assez con-

confidérable pour caufer quelque altération dans le Barometre.

Or par plufieurs expériences exactes, j'ai trouvé qu'une bouteille de verre blanc, affez épais, de figure cylindrique, & telle que font celles qu'on bouche ordinairement d'un bouchon de verre, pleine d'eau commune, dont le degré de chaleur mefuré par mon Thermometre étoit égal à 54 pouces, & qui contenoit environ 14 onces de cette eau, n'a augmenté fa capacité que de $\frac{1}{2688}$ lorfque je l'ai plongée dans d'autre eau, dont le degré de chaleur mefuré par le même Thermometre étoit de 64 pouces: d'où l'on peut bien juger que cet effet eft fi peu de chofe, qu'il ne peut être fenfible dans le verre d'un Barometre, dont la capacité n'eft pas à beaucoup près fi confidérable que celle de cette bouteille.

MANIERE DE RECOMPOSER le Soufre commun par la réunion de fes principes, & d'en compofer de nouveau par le mélange de femblables fubftances, avec quelques conjectures fur la compofition des métaux.

PAR M. GEOFFROY.

1704. 12. Novembre.

RIen ne nous découvre mieux la nature d'un corps mixte que l'Analyfe exacte que l'on en fait en le réduifant parfaitement à fes principes. Il n'eft pas facile d'y parvenir. Le feu, qui eft le principal agent que nous pouvons y employer, fépare bien à la vérité les différentes fubftances du mixte : mais elles en font fi altérées qu'elles ne peuvent nous conduire à la vraie connoiffance de la nature du corps qu'elles compofoient. Pour les autres diffolvans dont on pourroit fe fervir, ou ils ne rendent pas ces principes plus fimples & plus purs, ou bien ils ne les féparent pas tous.

Ce n'eſt donc qu'en traitant de différentes manieres les corps dont on veut découvrir la compoſition, & en comparant les différentes ſubſtances que l'on en a ſéparées dans ces différentes opérations, que l'on peut parvenir à quelque choſe de certain. Mais ce qui nous aſſure entierement que nous avons réuſſi dans la recherche que nous faiſons de la compoſition des corps, c'eſt lors qu'après avoir réduit le corps mixte en des ſubſtances auſſi ſimples que la Chymie puiſſe les réduire, nous le récompenſons par la réunion de ces mêmes ſubſtances.

Le Soufre commun dont M. Homberg avoit entrepris l'Analyſe il y a quelque temps, eſt un des corps mixtes des plus difficiles à décompoſer.

Les principes dont il eſt formé, volatiles de leur nature, ou s'élevent tous enſemble ſans pouvoir être deſunis, ou bien échappent à l'Artiſte dans l'inſtant de leur deſunion. Le Soufre dans des vaiſſeaux fermés s'éleve en fleurs par le feu, & ces fleurs ne ſont que le Soufre même : ſi on le travaille dans des vaiſſeaux ouverts, l'acide & la partie bitumineuſe qui le compoſent ſe diviſent bien à la vérité : mais elles s'envolent.

Après bien des moyens employés pour retenir ces ſubſtances ſéparées, M. Homberg eſt enfin parvenu à retirer par deux différentes ſuites d'opérations, rapportées dans les Mémoires de cette Académie, trois ſubſtances de ce minéral, un ſel acide, un Soufre ou une ſubſtance bitumineuſe, & de la terre mêlée de quelques parties métalliques.

Par cette Analyſe de Soufre qui paroît auſſi exacte qu'elle le peut être, & par les idées qu'elle nous donne du Soufre dans ſes principes ; il nous a rendu ſi ſenſible la compoſition du Soufre commun dans la terre, que j'ai cru qu'il ne ſeroit pas impoſſible d'imiter la nature & de compoſer ce Soufre, ſoit en réuniſſant les mêmes principes, ſoit en mêlant des ſubſtances toutes ſemblables à ces principes.

Pour y réuſſir, j'ai conſidéré ce qui ſe pouvoit paſſer dans les entrailles de la terre pour la production de ce mineral,

& j'ai obſervé que l'acide vitriolique & le bitume de la terre qui ſe rencontrent tous deux très-abondamment dans les lieux d'où ſe tire le Soufre, s'uniſſoient enſemble par une longue & forte digeſtion, pendant laquelle une portion de ces ſubſtances mêlées très-intimement avec l'alcali de la terre formoit enfin le Soufre.

Sur cette idée j'ai mêlé l'eſprit de Soufre bien déflegmé, du baume de Soufre tiré ſelon le procédé de M. Homberg, de chacun parties égales; j'ai fait digérer ce mélange quelque temps; j'y ait joint une partie d'huile de tartre, & le mélange ayant digéré de nouveau, je l'ai pouſſé par la cornue à un feu aſſez vif; il en eſt ſorti du flegme, quelque peu d'huile, & la diſtillation finie, j'ai trouvé dans la cornue une matiere ſaline jaune en quelques endroits, & rouge en d'autres, rendant une odeur de Soufre aſſez forte; j'ai fait une leſſive de toute la matiere, je l'ai filtrée, j'y ai verſé enſuite du vinaigre diſtilé qui l'a troublée, & en a fait exhaler une odeur de lait de Soufre très-deſagréable. Il s'eſt précipité à la fin une poudre blanchâtre qui étoit du Soufre brûlant tout pur.

J'ai joint dans cette occaſion le ſel de tartre aux autres matieres, pour ſuppléer à l'alcali terreux qui ſert de baſe au Soufre minéral dans la terre.

J'ai voulu voir ſi des ſubſtances de même nature que celles que l'on ſépare du Soufre ne pourroient pas en produire de la même maniere; & pour cela, j'ai choiſi l'huile de vitriol & l'huile de terebentine.

J'ai mêlé parties égales de l'un & de l'autre; j'ai laiſſé digérer le tout pendant quelque temps, d'abord le mélange s'eſt échauffé très-conſidérablement, il eſt devenu fort rouge, & il a rendu une odeur aſſez agréable approchante du citron : cette odeur eſt devenue un peu plus forte par la ſuite & moins agréable. J'ai mêlé dans cette liqueur qui s'étoit épaiſſie, de l'huile de tartre : les matieres ont fermenté pendant un long temps, mais ſans grande violence; la fermentation finie, il s'en eſt fait une liqueur

queur assez épaisse & savonneuse, dont j'ai distillé une portion ; j'en ai retiré une huile jaune, transparente, d'une odeur forte & d'un goût très-acre, avec un flegme aussi très-acre. Il est venu ensuite une huile plus brune, plus épaisse, douce sur la langue, & d'une odeur d'huile de cire. Enfin il est venu une huile épaisse, douce, de la même odeur & de la même consistance que le beurre de cire. J'ai trouvé au fond de la cornue une masse saline, jaune & d'une odeur de Soufre ou d'œufs pourris assez forte. J'ai dissous cette matiere dans de l'eau, & j'ai versé sur la dissolution du vinaigre distillé qui l'a blanchie ; il s'est précipité une poudre grise inflammable, qui est du Soufre pur.

J'ai voulu essayer si je ne pourrois pas abréger cette opération en la faisant à feu ouvert ; & pour cela j'ai fait dessécher l'autre portion du mélange d'huile de vitriol, d'huile de térébenthine, & d'huile de tartre. Je l'ai jettée ensuite dans un creuset rougi entre les charbons, elle s'est enflammée d'abord, rendant une odeur toute semblable à celle de l'oliban que l'on brûle. Enfin cette matiere achevant de brûler, son odeur d'oliban s'est convertie en une odeur de Soufre très-pénétrante. J'ai retiré pour lors la matiere à demi fondue, & je l'ai trouvée en partie jaune couleur de Soufre, en partie rouge brune avec une odeur de Soufre très-forte.

J'ai employé avec le même succès l'esprit de Soufre & l'esprit d'alun en la place de l'huile de vitriol dans la distillation, ces liqueurs acides ne différant point essentiellement.

Comme il m'a paru que dans ces opérations je faisois un tartre vitriolé par le mélange de l'huile de tartre avec les esprits acides, j'ai essayé si le tartre vitriolé & les autres sels de la même nature ne produiroient pas le même effet. L'évenement a répondu à mon attente. Le tartre vitriolé, le sel fixe de vitriol, autrement sel de colcotar, le sel qui résulte du mélange de l'esprit de Soufre & de l'huile de tartre, le sel de Glauber qui n'est que l'acide du vitriol fixé par l'alkali du sel marin, l'alun calciné qui est un acide

vitriolique concentré dans beaucoup de terre : tous ces ſels, dis-je, joints avec différentes ſortes d'huiles, m'ont donné du Soufre brûlant. Voici un exemple du procédé que j'ai tenu pour cela dans la compoſition du Soufre par le mélange de l'eſprit de vin avec le ſel fixe du vitriol.

J'ai mêlé une once de ſel de colcotar avec deux gros de ſel de tartre ; j'ai fait fondre la matiere à grand feu, & dans le temps qu'elle commençoit à fondre, j'y ai verſé à diverſes repriſes une once d'eſprit de vin. Lorſque la matiere, en ceſſant de brûler, a commencé à rendre une odeur de Soufre pénétrante, je l'ai retirée du feu, la flamme en étoit bleuâtre, & lorſqu'elle a été refroidie, la matiere étoit jaune en quelques endroits, & rouge en d'autres, avec une odeur de Soufre ou d'œufs pourris ; j'en ai fait la leſſive ſur laquelle j'ai verſé du vinaigre diſtillé, qui en a précipité du Soufre brûlant.

J'ai joint dans cette opération un peu de ſel de tartre au ſel de colcotar, pour aider à la fuſion qui rend le mélange des Soufres avec les ſels beaucoup plus exact, & qui fournit par conſéquent une plus grande quantité de Soufre brûlant.

Il eſt ſurprenant qu'un Soufre auſſi ſubtil & auſſi volatil que paroît être celui de l'eſprit de vin, puiſſe ſe fixer ſi promptement avec un ſel tout embraſé & en fuſion, au milieu d'un feu très-violent & dans un creuſet ouvert.

J'ai ſubſtitué à l'eſprit de vin différentes ſubſtances bitumineuſes & huileuſes, comme la matiere bitumineuſe du Soufre, le pétrole, l'huile diſtilée de ſuccin, l'huile de térébenthine, & les huiles fétides tirées des animaux. Ces ſubſtances unies avec ces ſels m'ont toutes donné du Soufre.

Toutes les autres matieres inflammables, comme le bois, le charbon de bois, le charbon de terre, ou autres, unies avec quelqu'un de ces ſels, ne manquent point de produire du Soufre de la même maniere.

J'ai voulu faire la même opération avec le ſel marin décrépité, & avec le nitre fixé ; mais je n'en ai point du tout retiré de Soufre : peut-être ces ſels étant d'une autre nature

que le ſel vitriolique ne ſauroient-ils produire de Soufre.

Je n'oſerois encore cependant rien prononcer de général là-deſſus, juſqu'à ce que je m'en ſois aſſuré par un plus grand nombre d'expériences.

Les différentes compoſitions du Soufre commun que je viens de décrire, nous aſſurent pleinement de ce que M. Homberg avoit déja montré par ſon Analyſe, que le Soufre minéral n'eſt qu'un compoſé de ſel acide, de Soufre principe, & d'un alkali ſalin ou terreux.

Boyle & Glauber qui ont travaillé tous deux à faire du Soufre commun, ont donné chacun une maniere différente de le compoſer.

Le procédé de Boyle eſt un mélange d'huile de vitriol & d'huile de térébenthine, qui rend par la diſtillation, premierement une huile qui paroît peu différente de l'eſprit de térébenthine, enſuite une liqueur un peu acide, blanchâtre, trouble, au fond de laquelle ſe précipite une poudre jaune qui eſt du Soufre commun. L'opération finie on trouve de ce même Soufre attaché au haut de la cornue le long du col, & aux parois du récipient. Il reſte au fond une maſſe legere, noire & luiſante, qui n'eſt pas une ſimple terre comme je le dirai ci-après.

J'ai fait la même opération en employant l'eſprit de vin au lieu de l'huile de térébenthine, & j'en ai retiré du même Soufre brûlant.

Je ne doute point après cela que ſuivant ce même procédé on ne tirât du Soufre de toutes les liqueurs inflammables mêlées avec les acides vitrioliques.

Dans cette opération, le Soufre s'éleve & paſſe par le bec de la cornue dans le récipient, parce qu'il n'y a pas aſſez de matieres fixes pour le retenir; & dans les deux autres opérations que j'ai rapportées, il reſte au fond de la cornue ou du creuſet où il eſt retenu par le ſel fixe du tartre, ou la terre du ſel fixe du vitriol.

Le procédé de Glauber eſt un mélange de ſel connu ſous le nom de *Sal mirabile Glauberi*, & du charbon de

bois réduit en poudre. Ce mélange jetté dans un creuset au milieu d'un grand feu, & fondu, rend une odeur de Soufre assez forte. Si on le retire du feu dans ce même temps, la matiere qui est rouge brune, rend du Soufre brûlant par la lessive & par la précipitation avec le vinaigre distillé.

Glauber n'avoit donné cette opération qu'avec son sel & le charbon, & je l'ai rendue générale en faisant voir que le mélange de tous les sels vitrioliques & de toutes les matieres inflammables, produisoient le même effet.

Glauber prétend que le Soufre qu'il a par son opération, n'est que celui du charbon. Boyle réfute ce sentiment par l'impossibilité qu'il y a que ce Soufre fût contenu dans une si petite quantité de charbon : il croit qu'il étoit plutôt renfermé dans le sel, de même qu'il se persuade que celui qu'il a tiré par son opération étoit dans l'huile de vitriol. Mais ils se trompent tous deux : car il paroît par les différentes compositions que j'ai faites du Soufre, & par l'Analyse de ce minéral, que le Soufre commun n'est contenu ni dans les sels vitrioliques, ni dans les matieres huileuses séparément, & qu'il ne se forme que de l'union des deux ensemble.

Je n'entreprens point de rendre ici raison de la maniere dont ces principes s'unissent pour composer le Soufre commun, & toutes les autres matieres bitumineuses & inflammables que l'on peut aussi produire par leurs différentes combinaisons. M. Homberg doit donner tout ce détail dans son Traité particulier du Soufre principe.

J'ajouterai seulement une conjecture que m'ont fournie les travaux que j'ai eu occasion de faire sur les matieres sulphureuses en cherchant à les recomposer, qui est que les métaux pourroient bien n'être que des bitumes ou des composés de Soufre principe, de sel vitriolique & de terre.

Si la difficulté qu'il y a de pénétrer la composition des métaux ne m'a pas encore permis de suivre cette conjecture dans tous, du moins suis-je presque convaincu qu'elle

est vraie pour la composition du fer en particulier.

Si on observe ce métal, outre son sel vitriolique qui se découvre par le goût, & parce qu'il se dissout facilement de lui-même à la moindre humidité, on reconnoît qu'il est presque tout sulphureux. Il s'allume très-promptement lorsqu'on le jette en limaille sur la flamme d'un flambeau. La vapeur sulphureuse qui s'éleve de sa dissolution par les esprits acides, s'enflamme très-aisément & brûle assez long-temps.

Mais ce qui paroît devoir convaincre entierement de la vérité de ce que j'avance, ce sont les deux expériences suivantes.

J'ai fait sécher de l'argile dont on fait les briques, j'ai mêlé cette terre pulvérisée avec une quantité d'huile de lin suffisante pour en pouvoir former une pâte que j'ai réduite en petites boules ; j'ai rempli de ces boules une cornue, & j'en ai distillé au feu poussé par degrés, jusqu'à l'extreme violence, une huile fort pénétrante semblable à l'huile de brique ou des Philosophes. J'ai retiré de la cornue les boules toutes noires après les avoir réduites en poudre, j'en ai emporté toute la terre par un grand nombre de lotions. Il est resté après ces lotions une poudre noire & pesante qui s'attache à l'aiman, & qui paroît être du fer.

Dans cette expérience que j'ai faite sur le procédé que Becker en a donné dans son Livre *De Physicâ subterraneâ*, l'acide vitriolique contenu dans l'argile, & le principe du Soufre contenu dans l'huile de lin, semblent avoir composé le fer par leur mélange & par la violente cuisson qu'ils ont reçue.

Il me restoit cependant quelques doutes sur cette production du fer, & quoique je me fusse assuré autant qu'il m'étoit possible, que ces petites parties métalliques n'étoient point contenues dans l'argile, je ne laissois pas de me défier encore de mes épreuves ; lorsque je fis réflexion que si mon raisonnement sur la composition de ce métal étoit vrai, je devois pareillement trouver du fer dans le

caput mortuum du mélange de l'huile de vitriol & de l'huile de térébenthine après leur diſtillation.

Pour m'en aſſurer, j'examinai ce *caput mortuum*, où la matiere noire & luiſante qui étoit reſtée après la diſtillation de ce mélange : j'y trouvai, de même que dans la précédente, des petites parties qui s'attachoient à l'aiman, & que je crois être de fer.

Je travaillerai à m'aſſurer ſi ces petites parties ſont véritablement du fer, j'obſerverai avec ſoin ce qui ſe paſſe dans la compoſition de ce métal, & je rendrai compte de mes travaux à la Compagnie.

MANIERE DE DISCERNER les viteſſes des corps mûs en lignes courbes ; de trouver la nature ou l'équation de quelque Courbe que ce ſoit, engendrée par le concours de deux mouvemens connus ; & réciproquement de déterminer une infinité de viteſſes propres deux à deux à engendrer ainſi telle Courbe qu'on voudra, & même deux, pour la décrire de telle viteſſe qu'on voudra, ſuivant cette Courbe.

PAR M. VARIGNON.

1704. 22. Novembre.

ETant tombé par haſard, il y a quelque temps, ſur le chap. 6. part. 3. de l'*Art de jetter des Bombes*, par M. Blondel, l'embarras de la démonſtration qu'il y donne, pour prouver que *les lignes des projections obliques ſont paraboliques*, de même que celles des projections horizontales, en négligeant de part & d'autre la réſiſtance de l'air, me fit penſer à les chercher par le calcul, lequel me les donna en deux coups de plume, comme on le verra ci-après dans l'art. 13. Il fit plus : il me donna occaſion de remarquer que la ſuppoſition qu'on fait d'ordinaire dans

l'hypothese de Galilée touchant les vitesses des chutes en lignes courbes, savoir que ces vitesses y sont comme les racines des hauteurs de ces chutes, n'est vraie que lorsque les corps tombent le long des Courbes, qui (comme en relief) les soutiennent en tombant, ou qu'ils sont soutenus par des suspensions équivalentes, c'est-à-dire, perpendiculaires aux Courbes, ou suivant les rayons de leurs Développées, & même seulement dans le cas des chutes commencées à quelque point de ces Courbes, ou de leurs tangentes le long de ces mêmes tangentes, & non ailleurs, ni suivant aucun plan qui leur soit incliné.

En ce cas de chutes commencées à un point d'un plan incliné à une Courbe, & le long de ce plan, je détermine quelles devroient être alors les vitesses du corps tombant le long de cette Courbe dans cette même hypothese de Galilée, qui est la seule (touchant la pesanteur) dont il s'agira dans la suite, tant qu'on n'y en marquera point d'autre.

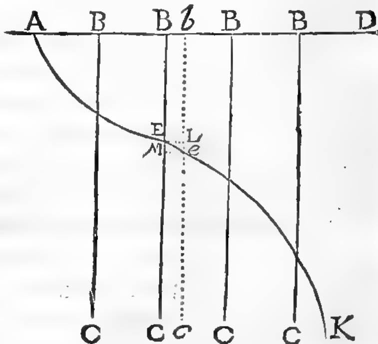
Je passe ensuite aux vitesses des corps qui décrivent des Courbes sans s'appuyer sur elles, ou sans être soutenus par aucune suspension équivalente ; mais seulement par des compositions de mouvemens, lesquels étant donnés tels qu'on aura voulu, je détermine toujours la nature des Courbes qui en résultent. Par exemple, je détermine quelle Courbe doit décrire un corps jetté d'une vitesse de projection variable à discrétion, quelle que soit celle de sa pesanteur, & quelque angle que les directions de ces vitesses fassent entr'elles ; ce qui donne tout d'un coup la Parabole ordinaire pour cette ligne de projection, lorsque la premiere de ces vitesses est uniforme, & la seconde comme les racines des hauteurs chutes, ainsi qu'on l'a trouvé jusqu'ici par d'autres voies, & pour ce cas seulement.

Réciproquement la nature d'une Courbe quelconque étant donnée, je détermine aussi toujours deux vitesses du concours desquelles elle peut résulter. Je trouve même une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer par leur concours une même Courbe, quelle qu'elle soit, géo-

métrique ou méchanique, il n'importe. Par exemple, je trouve quelles devroient être les vitesses de projection & de pesanteur d'un corps, pour lui faire décrire par leur concours une hyperbole, ou quelqu'autre Courbe que ce soit : & entre une infinité de vitesses que je trouve propres deux à deux à faire ainsi décrire une Parabole, l'uniforme & celle qui suit les racines des hauteurs, se trouvent encore la devoir engendrer par leur concours ; & ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

De sorte qu'il n'y a aucune Courbe que je ne puisse déduire des mouvemens donnés qui l'engendrent deux à deux, ou pour laquelle donnée je ne puisse trouver une infinité de vitesses propres deux à deux à l'engendrer par leur concours, & même en déterminer toujours deux du concours desquelles cette Courbe sera décrite de telle vitesse qu'on voudra. Commençons par les vitesses des corps mûs en lignes courbes.

I. Pour discerner ces vitesses je considere d'abord qu'il n'y a point de Courbe imaginable qui ne puisse être décrite par le concours de deux mouvemens, dont un sera toujours à discrétion. En effet si l'on conçoit une Courbe fixe quelconque *AEK* seulement tracée, avec une droite ou une Regle *BC* qui se meuve toujours parallelement à elle-même, & d'une vitesse à discrétion de *A* vers *D*, pendant que le point *E* se meut de *B* vers *C* le long de cette droite *BC*, & de maniere qu'il se trouve successivement dans tous les points où elle coupera la Courbe *AEK*, quel que soit l'angle *ABC* : cela (dis-je) conçu, il est manifeste que le concours d'action des deux mouvemens ou impressions qui font ainsi suivre la trace de cette Courbe *AEK* au point *E* sans s'appuyer dessus,

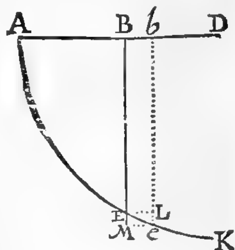


deſſus, la lui feroit décrire de même que quand elle n'y ſeroit pas; puiſque la ſuivre ainſi ſans s'appuyer deſſus, c'eſt la décrire comme ſi effectivement elle n'y étoit pas. Donc il n'y a point de Courbe imaginable qui ne puiſſe être ainſi décrite par le concours de deux mouvemens dont l'un ſera toujours à diſcrétion. L'autre ſe trouvera auſſi toujours par le moyen de celui-ci & de la Courbe donnée, comme on le verra ci-après dans l'art. 14.

II. Imaginons préſentement deux ſituations *BC*, *bc*, de la Regle mobile, infiniment proches l'une de l'autre, avec *EL* parallele à *AD*, & le petit parallélogramme *ML* qui ait pour diagonale l'élément *Ee* de la Courbe *AEK* décrite comme ci-deſſus art. 1. Il ſuit de cette deſcription que le point *E* (il s'appellera dans la ſuite *point décrivant*) parcourt cet élément *Ee* par le concours d'action des mouvemens ou impreſſions ſuppoſées ſuivant *AD* & *BC*, pendant le temps que chacune d'elles lui auroit fait parcourir celui des élémens *EL* ou *EM*, ſuivant lequel elle eſt dirigée. Donc la viteſſe réſultante de ce concours d'action au point *E* ſuivant *Ee*, doit être à ce que chacune de ces impreſſions particulieres en auroit donné ſéparément à ce point décrivant, ſuivant *EL* & *EM* comme *Ee* eſt à *EL* & à *EM*. Ainſi en prenant *EL* & *EM* pour les élémens des coordonnées d'une Courbe décrite par le concours de deux mouvemens, ou plutôt de deux forces quelconques dirigées ſuivant ces mêmes coordonnées; on trouvera en général que ce que ces forces auroient donné ſéparément de viteſſe ſuivant ces coordonnées en chaque point *E* de cette Courbe, au corps qui la décrit, doit toujours être à ce qu'elles lui en donnent effectivement enſemble en ce point ſuivant cette même Courbe, comme les élémens *EM* & *EL* ſont chacun au correſpondant *Ee* de cette Courbe. De ſorte qu'en appellant v & z les viteſſes qui réſulteroient ainſi de ces forces ſéparées, ſuivant les coordonnées qui en ſont les directions, c'eſt-à-dire, ſuivant les élémens *EM* & *EL* de ces coordonnées; le concours de ces forces donnera d'une part $\frac{v \times Ee}{EM}$, & de

l'autre $\frac{z \times Ee}{EL}$, pour la viteſſe du corps décrivant au point *E* ſuivant l'élément *Ee* de la Courbe *AEK*.

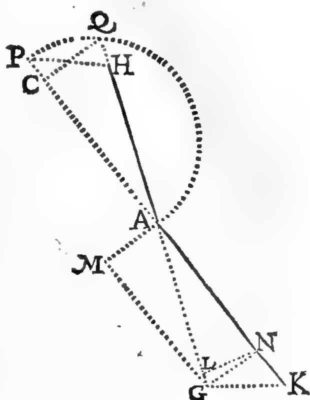
III. Voilà ce que ces deux forces ſuivant *EM* & *EL*, ont enſemble d'action ſur le point *E* ſuivant *Ee*. Mais ſi une d'elles ceſſoit d'agir, par exemple, celle qui eſt ſuivant *EL*, enſorte que le corps *E* n'eût plus que celle qui tend ſuivant *EM*, & qu'appuyé ſur le relief d'une Courbe effective *AEK*, il ne la ſuivît qu'en vertu de cette force que je ſuppoſe être celle de ſa péſanteur; alors il lui arriveroit comme à tout autre corps ſeulement peſant, qui, au lieu de tomber ſuivant la verticale *EM*, tomberoit le long d'un plan incliné *Ee*. Ainſi en tombant le long de la Courbe *AEK* en vertu de ſa ſeule péſanteur, il y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont on va voir (*article 6.*) que les angles infiniment petits ne diminuent rien de la viteſſe qu'il auroit en tombant de pareille hauteur le long d'un ſeul & même plan dans l'hypotheſe de Galilée. Or on ſait que dans cette hypotheſe, les viteſſes acquiſes par des chutes faites chacune le long d'un même plan quelconque, ſont toujours comme les racines des hauteurs de ces chutes. Donc auſſi dans l'hypotheſe de Galilée, les viteſſes d'un corps qui tombe le long d'une Courbe quelconque *AEK* en vertu de ſa ſeule péſanteur, doivent être dans tous les points *E* de cette Courbe ſuivant *EK*, comme les racines des hauteurs *BE* de leurs chutes commencées en quelque point *A* que ce ſoit de cette Courbe, ainſi qu'on le ſuppoſe d'ordinaire.



IV. Pour voir préſentement pourquoi les angles d'un Polygone infini-latere ſous la forme duquel on conſidere chaque Courbe, ne diminuent point les viteſſes d'un corps qui tombe le long de cette même Courbe en vertu de ſa ſeule peſanteur, vû ce que j'ai démontré dans les Mémoires de 1693. pag. 182. de la perte qu'en doit faire un corps

qui tombe le long de plusieurs plans contigus à angles finis : pour voir, dis-je, la raison de cette différence, il n'y a qu'à appliquer aux Courbes ce que j'ai dit de ces plans ; voici en deux mots ce qu'il nous en faut par rapport à ceci.

Soient deux plans contigus *HA* & *AK*, inclinés l'un à l'autre comme on voudra, le long desquels un corps tombe du point *H* ; par ce point *H* & par un point *G* quelconque de *HA* prolongé, soient les horizontales *HP* & *GK*, qui rencontrent en *P* & en *K* la droite *KA* prolongée vers *P* ; soit de plus le parallélogramme rectangle *MN* dont *AG* soit la diagonale.



Cela fait, il est visible que la vitesse acquise de *H* en *A* suivant *AG*, doit être la même au point *A* que si elle résultoit du concours de deux forces capables de donner en ce point au corps qui tombe, des vitesses suivant *AM* & *AN*, lesquelles fussent à celle qu'il a au point *A* suivant *AG*, comme les côtés *AM* & *AN* du parallélogramme *MN*, sont à sa diagonale *AG*. Or en ce cas la force qui pousseroit ce corps suivant *AM*, étant soutenue toute entiere par le plan *AK* qui lui résiste (*hyp.*) perpendiculairement, il ne resteroit plus à ce corps que l'impression de la force suivant *AN* pour suivre cette ligne d'une vitesse qui seroit à celle qui lui résulteroit de leur concours, c'est-à-dire (*hyp.*) à celle qu'il a effectivement en *A* suivant *AG* après sa chute de *H* en *A* par *HA*, comme *AN* est à *AG*. Donc la vitesse que la chute de *H* en *A* par *HA*, donne à ce corps au point *A* suivant *AG*, est à ce que la rencontre du plan *AK* lui en laisse suivant sa direction *AK*, comme *AG* est à *AN*. Par conséquent en faisant du centre *A*, & du rayon *AN*, l'arc

NL qui rencontre *AG* en *L*, l'on aura *LG* pour ce que la rencontre du plan *AK* fait perdre de viteſſe au corps qui tombe, en paſſant de *HA* en *AK*; c'eſt-à-dire, que cette perte de viteſſe doit être à ce qu'il en doit avoir en *A* ſuivant *AG*, comme *LG* eſt à *GA*. Ainſi l'angle fini *KAG* rendant *LG* finie de même que *AG* & *AN* ou *AL*, cette perte de viteſſe doit auſſi être finie & réelle par rapport à ce que le corps tombé de *H* en *A*, en auroit en *A* pour ſuivre *AG* ſans l'obſtacle du plan *AK*, & par rapport à ce que cet obſtacle en laiſſe à ce corps ſuivant ce plan *AK*. Et par conſéquent l'inflexion des plans *HA* & *AK* le long deſquels on le ſuppoſe tomber, doit l'empêcher d'avoir autant de viteſſe en *K* qu'il en auroit eu en tombant de *P* en *K* le long du ſeul plan *PK*, ou qu'il en auroit acquis en *G* en tombant du point *H* le long du ſeul plan *HG*.

V. Delà on peut voir au juſte de quel point du plan *PK* ce corps auroit dû tomber le long de ce plan pour avoir en *K* la même viteſſe qu'il y acquiert en vertu de ſa chute de *H* par *HAK* : car ſi l'on décrit ſur le diametre *PA* un demi cercle *PQA* qui rencontre *HA* prolongée en *Q*, & que de ce point *Q* on mene *QC* perpendiculaire ſur *PA*, on trouvera que le corps tombé de *H* en *K* par *HAK*, ne doit avoir de viteſſe en *K*, qu'autant qu'il y en auroit en tombant de *C* en *K* le long du plan *PK*, bien loin d'y en avoir autant que s'il étoit tombé de *P* en *K* le long de ce même plan, ainſi que Galilée l'a ſuppoſé.

En effet puiſque (*hyp.*) *HP* eſt horizontale, on ſait que les viteſſes acquiſes en *A* ſuivant *AK* par la chute d'un corps de *P* en *A*, & ſuivant *AG* par la chute de *H* en *A*, doivent être égales. Donc (*art.* 4.) en ce point *A* la viteſſe acquiſe ſuivant *AK* par la chute de ce corps de *P* en *A*, feroit à ce qu'il lui en reſte ſuivant la même direction *AK* après ſa chute de *H* en *A* $:: AG . AN :: AQ . AC :: \sqrt{AP} . \sqrt{AC}$. Or on ſait auſſi que ce que ce corps acquerroit de viteſſe en *A* ſuivant *AK* par ſa chute de *P* en *A*, feroit pareillement à ce qu'il en acquerroit en ce même point *A* ſuivant *AK* par ſa chute de *C* en *A* ::

$\sqrt{AP}.\sqrt{AC}$. Donc la viteſſe en *A* ſuivant *AK*, acquiſe par ſa chute de *H* en *A*, eſt la même que ſi le corps qui a fait cette chute, fût tombé de *C* en *A*, en commençant en *C*; & non-pas la même que s'il fût tombé de *P* en *A*, comme on le ſuppoſe d'ordinaire avec Galilée.

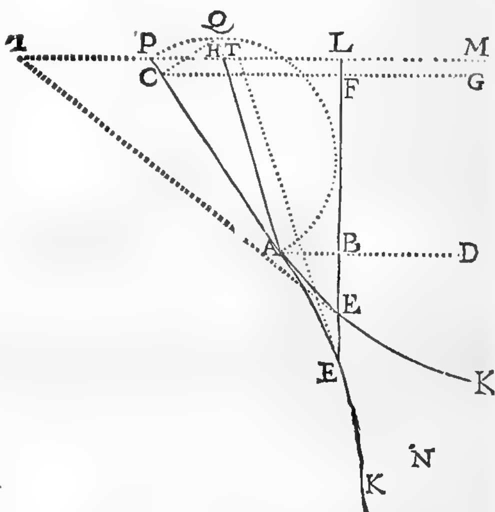
VI. Voilà ce que cauſe l'angle fini *GAK*: mais ſi on le ſuppoſe infiniment petit, l'arc *LN* qui en eſt la meſure, ſe trouvera auſſi pour lors infiniment petit, & pouvant ainſi paſſer pour une petite ligne droite perpendiculaire ſur *AG*, les angles (*hyp.*) droits *ANG* & *ALN* donneront *AL*. *LN* : : *LN*. *LG*. Et parconſéquent *LG* ſera une *différentio-différentielle*, ou une différentielle du ſecond genre par rapport à la grandeur finie *AL* ou *AN*. Or on a vû (*art.* 4.) que *LG* eſt à *AN*, comme la perte de viteſſe cauſée en *A* par l'oppoſition du plan *AK* à la chute de *H* en *G*, eſt à ce qu'il en reſte ſuivant *AK*. Donc cette perte de viteſſe faite en *A*, doit être auſſi un infiniment petit du ſecond genre par rapport à ce qu'il en reſte ſuivant *AK* au corps tombé de *H* en *K* par *HAK*, dans cete hypotheſe de l'angle *GAK* infiniment petit.

Or en conſidérant les Courbes comme autant de Polygones infini-lateres, dont les angles d'attouchement ſont les complémens des intérieurs des ces polygones, ainſi que *GAK* l'eſt ici de *HAK*; un corps tombant le long de la concavité d'une Courbe quelconque, y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont les angles (complémens des intérieurs au travers deſquels ce corps paſſe) ſont infiniment petits. Donc les pertes de viteſſe qu'il y doit faire à la rencontre des plans ou des côtés infiniment petits ſur leſquels il paſſe, ne doivent être que des infiniment petits du ſecond genre par rapport aux viteſſes avec leſquelles il paſſe. Et par conſéquent quoique le nombre infini d'angles qui ſe trouvent dans chaque Courbe ainſi regardée comme polygone, cauſe à ce corps une infinité de pareilles pertes, leur ſomme ne ſera jamais qu'un infiniment petit du premier genre par rapport à ce qu'il y a de viteſſe en chaque point de cette Courbe.

Donc cette perte totale ſera nulle par rapport à la viteſſe de ce corps, & la courbure de la Courbe le long de la concavité de laquelle on le ſuppoſe tomber, n'y apportera aucun obſtacle.

Il eſt viſible auſſi que ſi ce corps tomboit le long de la convexité de la même Courbe, elle n'apporteroit point nonplus d'obſtacle à ſa viteſſe, puiſqu'il n'y en perdroit pas même une différentielle du ſecond genre. Donc de quelque maniere qu'un corps ſe meuve le long d'une Courbe ſans rebrouſſement contraire, elle n'apportera par ſa courbure aucun obſtacle à la proportion de la viteſſe de ce corps.

VII. Ainſi (*art. 3.*) en quelque point *A* d'une Courbe quelconque *AEK*, que commence la chute libre d'un corps le long de cette Courbe en s'appuyant ſur elle, il aura par-tout, c'eſt-à-dire en chaque point de cette Courbe, la même viteſſe qu'il y auroit acquiſe en tombant de l'horizontale *AD* par la droite *BE*.



Et par conſéquent les viteſſes y ſeront partout comme les racines $\sqrt{BE}$ des hauteurs correſpondantes.

VIII. De même ſi la chute commence à quelque point *P* que ce ſoit d'une tangente *PA* de la Courbe *AEK* le long de *PAEK*, la viteſſe en chaque point *E* de cette Courbe ſera encore égale à celle que le corps ainſi tombé, y auroit acquiſe en tombant de l'horizontale *PM* le long de la droite *LE*, c'eſt-à-dire, auſſi comme $\sqrt{LE}$;

parce que (*art.* 6.) l'angle de la touchante *PA* avec la Courbe, n'y doit faire aucun obſtacle.

IX. Delà on voit auſſi que lorſqu'une Courbe *AEK* a pluſieurs touchantes *AP*, *ET*, &c. terminées à une même horizontale *PM* de laquelle commencent les chutes, il eſt indifférent par laquelle de ces tangentes le corps tombe le long de cette Courbe, par rapport à ſa viteſſe en quelque point *K* que ce ſoit de cette même Courbe, pris au-deſſous de toutes ces tangentes; puiſque ſa viteſſe y ſera toujours (*art.* 8.) comme $\sqrt{LE}$, c'eſt-à-dire, la même par toutes ces tangentes.

Ainſi ſi cette Courbe *AEK* étoit, par exemple, une Paracentrique le long de laquelle un corps tombant de *P* par la tangente *PA*, approchât également de quelque point *N* que ce ſoit en temps égaux, les arcs *EK* ſeroient auſſi paracentriques par rapport à ce même point *N* en vertu des chutes commencées en *T* par les tangentes *TE*, c'eſt-à-dire, que ce corps en pourſuivant chaque arc *EK* en vertu d'une chute faite de *T* par *TE*, s'approcheroit auſſi toujours également du point *N* en temps égaux; parce que ſes viteſſes acquiſes en *E* ſuivant *EK* en vertu de ſes chutes faites de *P* par *PAE*, & de *T* par *TE*, ſont les mêmes, étant de par & d'autre (*art.* 8.) comme $\sqrt{LE}$, c'eſt-à-dire, telles qu'ils les acquerroit en *E* ſuivant *LE* en tombant de *L* par *LE*: Et tout cela, parce que (*art.* 6.) les angles infiniment petits des tangentes avec les Courbes, n'y apportent aucun obſtacle.

X. Il n'en eſt pas de même des angles finis: car ſi l'on ſuppoſe que la droite *HA* rencontre la Courbe *AEK* en *A* ſous quelque angle fini que ce ſoit, c'eſt-à-dire, qu'elle faſſe un angle fini quelconque *HAP* avec la tangente *PA* de cette Courbe; on trouvera par les articles 4. & 5. qu'un corps tombé de *H* par *HAE*, n'aura pas la même viteſſe en *E* ſuivant *EK*, que s'il fût tombé de l'horizontale *HM* par *LE*, ni par conſéquent une viteſſe qui ſoit comme $\sqrt{LE}$. Au contraire ſi après avoir prolongé l'horizontale *MH* juſqu'à la rencontre en *P* de la tangente *AP*,

on décrit ſur le diametre AP le demi cercle AQP qui rencontre AH prolongée en Q, & que de ce point Q on mene QC perpendiculaire ſur AC; on trouvera (*art.* 5.) que la viteſſe en A ſuivant AE, acquiſe en tombant de H en A par HA, doit être la même que ſi le corps fût tombé de C en A par la tangente CA; & par conſéquent auſſi (*art.* 8.) la même en E ſuivant EK, qu'elle y auroit été ſuivant FE ſi ce corps fût tombé de l'horizontale CG par FE, c'eſt-à-dire, ſeulement comme $\sqrt{FE}$, & non-pas comme $\sqrt{LE}$, quoique les chutes faites de H en E par HAE, & de L en E par LE, ſoient (*hyp.*) de même hauteur.

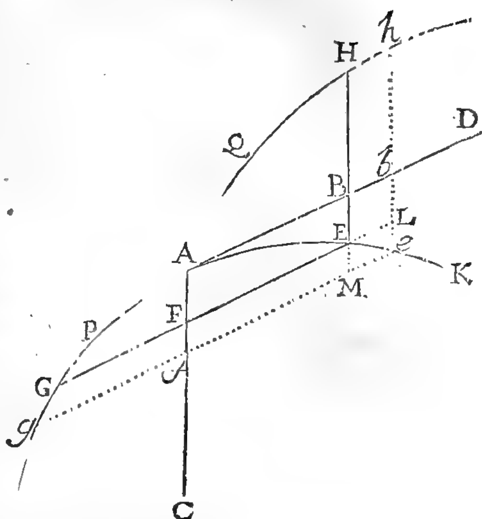
XI. On voit donc pour toutes ſortes de Courbes, non-ſeulement que les viteſſes commencées à quelque point que ce ſoit de ces Courbes ou de leurs tangentes, ſont par tout le long de ces tangentes & de ces Courbes, comme les racines des hauteurs de ces chutes: mais auſſi que c'eſt là le ſeul cas où ces viteſſes ſoient en cette raiſon, quoi qu'acquiſes par la ſeule peſanteur des corps qui tombent en s'appuyant ſur le relief des Courbes qu'ils ſuivent.

Pour ce qui eſt des Courbes que ces corps tracent eux-mêmes par le concours de deux forces ou impreſſions différentes, ſans être ſoutenus ni s'appuyer ſur ces Courbes; on a auſſi vû dans l'art. 2. que quand même la peſanteur de chaque corps feroit une de ces deux forces, ſes viteſſes le long de la Courbe qu'il décriroit par le concours de cette force avec toute autre, ne feroient point encore comme les racines des hauteurs que ſa peſanteur lui auroit fait parcourir; mais ſeulement comme on les a démontrées dans cet art. 2.

XII. Tel eſt le diſcernement qu'il faut faire des viteſſes des corps mus en lignes courbes; voici auſſi quelque choſe de l'uſage qu'on peut faire des viteſſes réſultantes du concours de pluſieurs forces.

Soit une Courbe quelconque AEK décrite (*art.* 1.) par le concours de deux mouvemens, c'eſt-à-dire, par un corps agité

agité de deux impressions à la fois suivant *AC* & *AD*, ou suivant leurs paralleles *BE*, *be*, & *Fe*, *fe*, menées par les extrémités d'un élément quelconque *Ee* de cette Courbe *AEK*, quel que soit l'angle *CAD*, & quelles que soient aussi ces impressions, ou les vitesses qu'elles seroient capables de donner séparément au corps *décrivant* en chaque point *E* de la Courbe *AEK* suivant les côtés *EM* & *EL* du petit parallélogramme *ML*; ou en *F* suivant *FC*, & en *B* suivant *BD*, si ce corps suivoit séparément *AC* & *AD* en vertu de ces impressions ou forces séparées, qui dans la suite s'appelleront *C* & *D*.



Pour l'universalité de ces vitesses en *E* suivant *EM* ou en *F* suivant *FC*, & en *E* suivant *EL* ou en *B* suivant *BD*, soient encore deux Courbes quelconques *GP* & *HQ*, qui les expriment par leurs ordonnées correspondantes *FG* & *BH*, lesquelles soient appellées v & z, comme dans l'article 2. Soient de même leurs abscisses *AF* & *AB* appellées x & y, lesquelles soient aussi les coordonnées de la Courbe *AEK*.

Cela fait, l'art. 2. donnant encore ici $\frac{v \times Ee}{EM}$ & $\frac{z \times Ee}{EL}$ pour la vitesse suivant *Ee*, résultante du concours de celles-là, l'on trouvera $\frac{v}{dx} = \frac{z}{dy}$ ou $vdy = zdx$ pour l'équation générale de cette Courbe *AEK*, laquelle deviendra celle de telle hypothese qu'on voudra, si l'on y substitue en x, en y, & en constantes les valeurs des vitesses v & z qui conviennent à cette hypothese.

La même équation générale de la Courbe *AEK* se peut encore trouver sans se mettre en peine de ce que le corps *décrivant* peut avoir de vitesse le long de cette Courbe : il suffit de considérer que ce corps ne parcourt (*hyp.*) l'élément *Ee* qu'en vertu des deux impressions *C* & *D*, qui séparément lui feroient parcourir *EM* & *EL* dans le même temps que par leur concours elles lui feroient parcourir *Ee* : car alors voyant que ces autres élémens *EM* & *EL* devroient être ainsi parcourus en même-temps, on verra aussi qu'ils doivent toujours être entr'eux comme les vitesses (telles qu'elles puissent être) v & z requises pour cela : c'est-à-dire, *EM* (dx). *EL* (dy) :: $v.z.$ Et par conséquent $zdx=vdy$, comme ci-dessus.

XIII. Pour faire quelque usage de cette formule ou équation générale, supposons (si l'on veut) que la force suivant *AC* ou *BE*, par le concours de laquelle avec une autre suivant *AD*, se décrit (*hyp.*) la Courbe *AEK*, soit la pesanteur du corps *décrivant*; & qu'ainsi les vitesses v en chaque point *E* suivant *BE* soient comme les racines des hauteurs *AF* ou *BE* (x) correspondantes ; & par conséquent la Courbe *PG* sera une Parabole ordinaire dont le sommet est en *A*, & son lieu $v=\sqrt{x}$. Si l'on substitue cette valeur de v dans la précédente équation générale $zdx=vdy$, l'on aura $zdx=dy\sqrt{x}$, ou $\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{z}$ pour l'équation de toutes les Courbes décrites par le concours de la pesanteur des corps *décrivans*, & de quelqu'autre impression ou force que ce soit suivant *AD*, quelque vitesse z qu'elle soit capable de donner seule suivant cette direction, & quelque angle aussi *CAD* que cette direction fasse avec la verticale *AC*. De sorte qu'il n'y a plus qu'à substituer ici la valeur de z résultante (en y & en constantes) de l'équation de la Courbe *QH* suivant telle hypothese qu'on voudra faire, & l'équation $\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{z}$ se changera en celle de la Courbe *AEK* particuculiere à cette hypothese.

Par exemple, si l'on imagine cette Courbe *AEK* dé-

crite par un corps jetté du point A ſuivant AD, & qu'on prenne à l'ordinaire la viteſſe z de projection ſuivant AD pour conſtante & par-tout la même, en faiſant (ſi l'on veut) $z = \sqrt{a}$, & en changeant ainſi la Courbe QH en une ligne droite parallele à AD; la ſubſtitution de cette valeur de z dans l'équation précédente $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$, la changera ici en $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{a}}$, dont l'intégrale $2\sqrt{x} = \frac{y}{\sqrt{a}}$, ou $4ax = yy$ ſera l'équation de la Courbe AEK dans ce cas-ci. D'où l'on voit que cette Courbe de projection devient ici une Parabole ordinaire, dont le parametre au point A de projection, doit être quadruple de la hauteur a d'où le corps jetté auroit dû tomber pour acquérir par ſa ſeule peſanteur la viteſſe $\sqrt{a}$ de projection qu'on lui vient de ſuppoſer ſuivant AD, quel que ſoit l'angle CAD que cette ligne AD de projection faſſe avec la verticale AC, ainſi qu'on l'a trouvé juſqu'ici par d'autres manieres beaucoup moins ſimples que celles-ci.

Pour trouver cette Courbe encore plus facilement, il ſuffit de conſidérer que puiſque (*hyp.*) la viteſſe de projection ſuivant AD, eſt uniforme, l'on aura par-tout AB comme le temps que le corps jetté emploie à parcourir AE; & par conſéquent Bb ou EL (dy) pour l'inſtant que ce corps emploie à parcourir Ee; ou qu'il employeroit à parcourir EM (dx) en vertu de ſa ſeule peſanteur, d'une viteſſe qui ſeroit comme $\sqrt{BE}$ ($\sqrt{x}$). Donc en prenant dy pour cet inſtant, & $\sqrt{x}$ pour cette viteſſe, l'on aura $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dy$, dont l'intégrale $2\sqrt{x} = y$, ou $4x = yy$ eſt encore un lieu à la Parabole ordinaire, lequel deviendra (comme ci-deſſus) $4ax = yy$ en ſubſtituant a pour 1 afin d'obſerver la loi des homogenes.

On trouvera de même toute autre Courbe AEK réſultante du concours d'action de deux forces quelconques dirigées ſuivant AC & AD, quelque angle CAD que ces directions faſſent entr'elles, & quelles que ſoient auſſi les viteſſes v & z que ces forces ſeroient capables de donner ſéparément en E ſuivant ces mêmes directions ou leurs paralle-

les, au corps *décrivant*; c'eſt-à-dire, de quelque nature qu'on ſuppoſe les Courbes *PC* & *QH* qui expriment ces viteſſes par leurs ordonnées *FG* & *BH* correſpondantes : & cela, comme l'on voit, en ſubſtituant dans l'équation générale $zdx = vdy$ les valeurs de ces viteſſes v & z réſultantes des équations données de ces deux Courbes-ci.

XIV. L'équation générale de l'art. 12. ne donne pas ſeulement toutes les Courbes qui ſe peuvent engendrer par des compoſitions de mouvemens connus, c'eſt-à-dire, chacune par le concours de deux viteſſes connues, quelles qu'elles ſoient; mais elle donne auſſi toujours deux viteſſes qui par leur concours peuvent ainſi engendrer quelque Courbe donnée que ce ſoit : elle donne même une infinité de viteſſes propres deux à deux à engendrer ainſi une même Courbe donnée, quelle qu'elle ſoit, géométrique ou méchanique, il n'importe. En effet l'équation $zdx = vdy$ donnant $z = \frac{vdy}{dx}$, & la Courbe donnée *AEK* donnant auſſi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en x, en y, & en conſtantes; ſi l'on ſubſtitue cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans cette équation $z = \frac{vdy}{dx}$, il ne reſtera plus qu'à y déterminer une des deux viteſſes v ou z, en x ou en y, & en conſtantes, pour avoir l'autre. Or on a vu ci-deſſus (*art.* 1.) qu'une de ces viteſſes eſt toujours à diſcrétion, & qu'ainſi on peut toujours en déterminer une; par exemple v, dans cette équation. Donc par ce moyen l'autre z ſera auſſi toujours déterminée. Par conſéquent l'équation générale $zdx = vdy$, & celle de la Courbe donnée *AEK*, pourront toujours ainſi donner enſemble deux viteſſes v & z propres à engendrer cette Courbe par leur concours : & même en donner une infinité d'autres propres deux à deux à engendrer ainſi la même Courbe; puiſque par ce moyen z aura autant de valeurs que v, qui étant (*art.* 1.) à diſcrétion, en peut avoir de différentes à l'infini.

Par exemple, ſoit la Courbe *AEK* une hyperbole dont le lieu ſoit $y = \frac{\sqrt{pbx + pxx}}{b}$, & qu'il faille la faire décrire à un

corps jetté ſuivant AD, par le concours de ſa peſanteur ſuivant la verticale AC, quelque angle CAD que ces directions faſſent entr'elles : on demande quelles viteſſes v & z de peſanteur & de projection il faut à ce corps pour cela.

On voit déja qu'une de ces viteſſes ; par exemple, celle de la peſanteur, étant (*art.* 1.) arbitraire, on la peut prendre à l'ordinaire en chaque point E ſuivant chaque verticale BE correſpondante, comme la racine de cette hauteur ($\sqrt{x}$), & faire ainſi $v=\sqrt{x}$. D'un autre côté l'équation précédente à l'hyperbole propoſée, donnera auſſi $\frac{dy}{dx}=\frac{pb+2px}{2\sqrt{pbbx+pbxx}}=\frac{pb+2px}{2\sqrt{x}\times\sqrt{pbb+pbx}}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de v & de $\frac{dy}{dx}$ dans la précédente équation générale $z=\frac{vdy}{dx}$, l'on aura l'autre viteſſe ſuivante $z=\frac{pb+2px}{2\sqrt{pbb+pbx}}$, qui ſera celle de projection. Ainſi l'on aura pour lors $\sqrt{x}$, & $\frac{pb+2px}{2\sqrt{pbb+pbx}}$ pour les expreſſions des deux viteſſes v & z propres à engendrer par leur concours l'hyperbole requiſe AEK.

Si au lieu d'une hyperbole, on veut que le corps jetté ſuivant AD, décrive une Parabole AEK par le concours de ſa peſanteur ſuivant la verticale AC, quelque angle que ces deux directions faſſent entr'elles : il eſt viſible qu'en prenant encore ſa viteſſe de peſanteur $v=\sqrt{x}$, ainſi qu'on le voit permis dans l'art. 1. il n'y a qu'à faire b infinie dans la précédente valeur de z pour avoir la viteſſe de projection requiſe en ce cas-ci : car de même que b infinie dans la précédente équation hyperbolique $y=\frac{\sqrt{pbx+pxx}}{b}$, la changeroit en une parabolique $y=\sqrt{px}$; de même auſſi b infinie dans la précédente expreſſion $z=\frac{pb+2px}{2\sqrt{pbb+pbx}}$ de la viteſſe de projection requiſe avec celle de peſanteur $v=\sqrt{x}$ pour faire décrire une hyperbole au corps jetté, changera cette viteſſe de projection

en $z = \frac{pb}{2\sqrt{pbb}} = \frac{p}{2\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$, qui ſera auſſi celle de projection requiſe avec cette même viteſſe $v = \sqrt{x}$ de peſanteur pour lui faire décrire une Parabole. Ce qui fait voir que cette viteſſe z de projection doit être conſtante, c'eſt-à-dire, uniforme, & telle que ce corps l'acquerroit en vertu de ſa ſeule peſanteur en tombant de la hauteur du quart du parametre (p) de cette Parabole.

La même choſe ſe trouvera encore immédiatement ſi l'on conſidere ſeulement que l'équation parabolique $y = \sqrt{px}$ donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$; car la ſubſtitution de cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, & celle de $v = \sqrt{x}$ dans l'équation générale $z = \frac{vdy}{dx}$, donnera encore tout d'un coup $z = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$.

Quelque autre Courbe, ſoit géométrique ou méchanique, qu'on veuille faire ainſi décrire à un corps jetté, on trouvera de même quelle viteſſe de projection il requiert pour cela avec ce que ſa peſanteur lui en donne, ou avec telle autre qu'on lui voudra ſuppoſer, & quelque angle que les directions de ces viteſſes faſſent entr'elles. On voit auſſi par la maniere dont $v = \sqrt{x}$ vient de donner la valeur de z, que d'autres valeurs de v ſubſtituées de même dans l'égalité générale $z = \frac{vdy}{dx}$, avec la valeur de $\frac{dy}{dx}$ réſultante de l'équation donnée de la Courbe requiſe, auroient auſſi donné d'autres valeurs de z; & qu'ainſi la viteſſe v pouvant (*art.* 1.) en avoir de différentes à l'infini, on pourra auſſi trouver de même une infinité de viteſſes z propres chacune par ſon concours avec la viteſſe v qui l'aura ainſi déterminée, à engendrer cette même Courbe; par exemple, la même hyperbole, ou la même Parabole que ci-deſſus; & ainſi de toute autre Courbe à l'infini.

XV. Non-ſeulement on peut ainſi trouver une infinité de viteſſes collatérales propres deux à deux, à décrire par leur concours une Courbe donnée quelconque; mais

auſſi parmi ce nombre infini de viteſſes ſuivant les coordonnées de la Courbe, on peut toujours en déterminer deux, qui enſemble ſeront propres à décrire ainſi cette Courbe avec telle viteſſe qu'on voudra; c'eſt-à-dire, à donner au corps *décrivant* telle viteſſe qu'on voudra le long de cette même Courbe: voici comment.

1°. Soit c la viteſſe requiſe le long de la Courbe donnée AEK, ou de ſon élément Ee, lequel ſoit appellé ds. Il eſt manifeſte que cette viteſſe (c) ſuivant la diagonale Ee (ds) du petit parallélogramme ML, ſera aux viteſſes (v), (z), ſuivant les côtés EM, (dx), EL (dy), de ce parallélogramme, c'eſt-à-dire, ſuivant les coordonnées AF (x), FE (y), de cette Courbe, comme cette diagonale eſt à ces mêmes côtés; ce qui donne $v = \frac{cdx}{ds}$, & $z = \frac{cdy}{ds}$.

2°. Il faut enſuite faire évanouir les différences dx, dy, ds, par la ſubſtitution de leurs valeurs tirées de l'équation de la Courbe donnée; & ces valeurs de v, z, ainſi délivrées de toutes différences, exprimeront des viteſſes collatérales ſuivant EM, EL, non-ſeulement propres à engendrer enſemble la Courbe propoſée, mais auſſi à donner au corps *décrivant* la viteſſe requiſe (c) le long de cette Courbe.

3°. Pour le voir il n'y a qu'à ſubſtituer ces valeurs de v, z, ainſi délivrées de toutes différences, dans l'équation générale $v\,dy = z\,dx$ de l'art. 12. Et l'on en verra non-ſeulement naître la Courbe requiſe; mais auſſi, en faiſant comme un des côtés EM (dx) ou EL (dy) du parallélogramme infiniment petit MN, eſt à la diagonale Ee (ds) de ce parallélogramme, ainſi celle des viteſſes délivrée de différences, qu'on vient de trouver (*n.* 2.) ſuivant ce petit côté, eſt à la viteſſe le long de l'élément Ee de la Courbe; cette derniere viteſſe délivrée de différences par le moyen de l'équation donnée de cette Courbe requiſe, ſe trouvera être la même (c) avec laquelle on vouloit que cette Courbe fût décrite.

Exemple. Soit la Courbe proposée une parabole qui doit être décrite avec une vitesse quelconque appellée c; constante ou variable à discrétion, il n'importe. Soit $y = \sqrt{x}$ l'équation de cette Parabole : prenant les différences, on aura $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, & ds $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{4x}}$ $= \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$. Donc en substituant ces valeurs de dy, ds, dans les équations $v = \frac{cdx}{ds}$, $z = \frac{cdy}{ds}$, du nombre 1. l'on aura $v = \frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{4x+1}}$, pour les vitesses collatérales propres à décrire par leur concours la Parabole requise avec la vitesse (c) qu'on demande suivant cette Courbe.

Pour le voir il n'y a qu'à substituer suivant le nomb. 3. ces valeurs de v, z, dans la regle générale $v\,dy = z\,dx$ de l'art. 12. Et l'on aura $\frac{2cdy\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} = \frac{cdx}{\sqrt{4x+1}}$, c'est-à-dire, $2dy\sqrt{x} = dx$, ou $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, dont l'intégrale est $y = \sqrt{x}$ qui est le lieu de la Parabole requise : d'où l'on voit que les deux vitesses collatérales qu'on vient de trouver, sont propres à la décrire par leur concours.

Pour voir de même que la vitesse qui en résultera suivant cette Courbe au corps *décrivant*, sera aussi la vitesse requise (c), il n'y a qu'à faire comme un des côtés, par exemple EM (dx), est à la diagonale Ee (ds) du petit parallélogramme ML, ainsi la vitesse $\left(\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}\right)$ trouvée suivant ce petit côté, est à la vitesse suivant cette diagonale Ee : car ayant par-là $\frac{2cds\sqrt{x}}{dx\sqrt{4x+1}}$ pour la vitesse suivant cette même diagonale, la substitution de la valeur de ds trouvée ci-dessus $= \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$, donnera c pour la vitesse suivant cet élément Ee de la Parabole requise.

Donc

Donc les viteſſes collaterales $\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}(v)$, $\frac{c}{\sqrt{4x+1}}(z)$ qu'on vient de trouver, ſeront non-ſeulement propres à décrire par leur concours la Parabole propoſée, mais auſſi à la décrire avec la viteſſe requiſe (c) ſuivant cette même Courbe. Il en eſt ainſi de toute autre Courbe à l'infini.

XVI. Il eſt facile après ce qu'on vient de dire des Courbes qui ont leurs ordonnées paralleles entr'elles, d'appliquer la méthode aux Courbes dont les ordonnées concourent en un point. Ainſi dans la Spirale d'Archimede, par exemple, outre les deux mouvemens du concours deſquels cet Auteur la décrit, la méthode précédente en peut encore fournir une infinité d'autres propres à décrire cette Spirale; entre leſquels on pourra même toujours en trouver deux propres à la décrire ainſi par leur concours avec telle viteſſe qu'on voudra; c'eſt-à-dire, propres à donner enſemble au corps *décrivant* telle viteſſe qu'on voudra ſuivant cette Courbe. Il en eſt ainſi de toute autre Courbe à l'infini dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit.

Après cela la méthode de M. de Roberval pour trouver les tangentes par le moyen des mouvemens compoſés, devient pratiquable en une infinité de manieres pour toutes ſortes de Courbes; au lieu qu'elle ne l'étoit ci-devant que pour quelques-unes, dont la génération préſentoit ſeulement pour chacune deux mouvemens compoſans. Cependant comme (*art.* 2. & 12.) ces mouvemens ou viteſſes compoſantes v, z, de quelque variété de valeurs qu'elles ſe puiſſent trouver, doivent toujours être entr'elles comme les élémens dx, dy, des coordonnées des Courbes qui réſultent de leur concours; & que pour avoir chacune de ces viteſſes, l'autre étant donnée, il faut trouver le rapport de ces élémens entr'eux, lequel rapport donneroit, lui ſeul, les tangentes de ces Courbes; on ne compte pas ici pour beaucoup le ſecours que la méthode précédente de M. de Roberval pourroit tirer de la détermination de ces viteſſes, quelque grand qu'il fût par rapport à elle. Ce n'a point été

auſſi dans cette vûe qu'on a entrepris d'en parler ici, mais ſeulement pour diſcerner ce qu'il en doit réſulter le long des Courbes décrites par leur concours, d'avec ce qu'une ſeule des forces productrices de ces viteſſes, par exemple, la peſanteur du corps *décrivant* lui en donneroit en tombant le long de ces Courbes, ſoutenu par leur relief ou par des ſuſpenſions équivalentes, ſelon les différens points où commenceroit ſa chute; diſcernement abſolument néceſſaire pour ne ſe pas méprendre dans la méchanique des mouvemens en lignes Courbes. On donnera encore d'autres uſages de tout ceci dans la ſuite.

CONSIDERATIONS

SUR LA

THEORIE DES PLANETES.

PAR M. MARALDI.

1704. 26 Novembre.

LA Théorie des Planetes eſt une recherche qui a de grandes difficultés, à cauſe des différens mouvemens dont il faut chercher les regles, & de pluſieurs élémens qui concourent à la détermination de ces mouvemens. La juſteſſe de cette détermination dépend en partie d'un grand nombre d'obſervations faites avec préciſion: mais quoique depuis 30 ou 40 ans ces obſervations aient été faites avec beaucoup de ſubtilité, on n'oſeroit pas ſe promettre qu'elles euſſent toute la préciſion qui eſt néceſſaire, & qu'elles fuſſent ſuffiſantes pour trouver pendant pluſieurs années le mouvement des Planetes entre les termes que l'on ſe propoſe communément: car outre que nos inſtrumens, quelque grands qu'ils puiſſent être, ont une trop petite proportion à la grandeur des orbes que les Planetes décrivent, dans les obſervations on eſt ſouvent en doute

pour la détermination des petites parties qui peuvent échapper facilement aux Obſervateurs les plus exacts ; & avant de mettre en uſage ces obſervations, elles ont beſoin de quelques corrections & réductions qui peuvent cauſer des variations dans la ſituation de la Planete.

Quand même les obſervations ne ſeroient point ſujettes à ces variations, & qu'elles auroient la juſteſſe que l'on peut ſouhaiter, on n'eſt pas aſſuré de rencontrer juſte dans l'uſage que l'on en fait pour trouver les différens élémens qui ſont néceſſaires dans la Théorie des Planetes, & qu'il faut diſtinguer des uns les autres.

L'Apogée & le Périgée, d'où commencent & finiſſent les premieres inégalités des Planetes, ne ſont pas des points viſibles, mais des termes qu'il faut trouver par la comparaiſon de pluſieurs obſervations faites en certains lieux de l'orbe de la Planete, & en certaines configurations avec le Soleil, qui ſont des circonſtances qui ſe rencontrent rarement enſemble de la même maniere. Une petite erreur que l'on peut faire dans les obſervations, en produit une beaucoup plus grande dans la détermination de l'Apogée; c'eſt pourquoi il eſt fort difficile de le déterminer au juſte. On peut connoître ces difficultés par la différente détermination que pluſieurs Aſtronomes en ont faite depuis un ſiecle, quoiqu'ils ſe ſoient fondés principalement ſur les obſervations de Tycho. Or une erreur qu'il eſt aiſé de faire dans la ſituation de ces points, en produit d'autres dans toutes les parties de l'orbe de la Planete : car ſi on fait l'Apogée plus avancé dans le Zodiaque qu'il ne doit être, on fera dans quelque degré l'équation additive, lorſqu'il la faudroit faire ſubſtrative & réciproquement ; il en réſultera auſſi dans les trois premiers ſignes une équation ſubſtrative plus petite que la véritable, & plus grande dans les trois ſignes ſuivans juſqu'au Perigée. Il arrive la même choſe de l'équation additive dans les ſix autres ſignes du Zodiaque : car dans les trois premiers ſignes depuis le Périgée, elle ſera moindre que la véritable, & plus grande dans les trois derniers.

Il n'y a pas moins de difficulté dans la recherche de l'excentricité des Planetes ; on la peut trouver par des méthodes qu'on a inventées à cette fin, & qui ont toutes leurs difficultés, parce qu'elles font naturellement attachées à cette recherche. On la peut aussi trouver en observant les Planetes dans l'Apogée ou dans le Périgée, & dans les moyennes distances ; & comparant le vrai mouvement trouvé entre ces deux termes avec le moyen qui appartient au temps échu entre ces observations, on trouve la plus grande équation qui détermine l'excentricité des Planetes. Mais outre que dans cette méthode on y suppose le lieu de l'Apogée & du Perigée bien déterminé, il est extraordinairement rare de pouvoir faire ces observations dans des circonstances aussi favorables, faute desquelles on est obligé d'employer les observations les plus proches de ces termes, qu'il faut réduire aux mêmes termes, ce qui ne se peut faire qu'à peu près, & à l'aide des hypotheses. Or l'erreur qu'il est difficile d'éviter en déterminant l'excentricité de la Planete se répand, quoiqu'en moindre quantité dans toutes les parties de son orbe : car si on prend l'excentricité plus petite que la véritable, l'équation de la Planete dans tous les degrés de son anomalie sera aussi plus petite : le contraire arrivera si on prend l'excentricité trop grande.

Supposant la plus grande équation trouvée avec toutes la précision que l'on peut souhaiter, il reste une autre difficulté dans la maniere de la distribuer par tous les degrés de l'orbe de la Planete. Comme on donne dans les Tables Astronomiques cette équation calculée pour chaque degré d'anomalie, & que pour la trouver par des observations immédiates, il faudroit un grand nombre d'observations exactes qu'il est difficile d'avoir jusqu'à présent dans la plûpart des Planetes ; les Astronomes, pour suppléer à ce défaut, ont inventé diverses méthodes par le moyen desquelles l'excentricité étant donnée, on calcule pour tous les degrés d'anomalie l'équation qui lui convient : mais cette

équation ſe diſtribue différemment ſelon les différentes hypotheſes que l'on emploie ; & on eſt en doute quelle eſt la plus conforme à la nature, étant fort difficile de le vérifier par les obſervations.

On peut auſſi ſe tromper dans le choix que l'on fait de l'Epoque : car quoiqu'on la tire d'un grand nombre d'obſervations faites dans les occaſions les plus favorables, & qu'on y évite les erreurs auxquelles ces obſervations peuvent être ſujettes, on ne peut la déterminer ſans ſuppoſer tous ces élémens que nous avons indiqués, & que nous avons dit être très-difficiles à déterminer avec préciſion. La même erreur que l'on fait dans le choix de l'Epoque, ſe répand auſſi dans tous les autres calculs.

La recherche des nœuds des Planetes, & celle de l'inclinaiſon de leur orbite à l'égard de l'Ecliptique, n'eſt pas moins difficile que les autres élémens. Pour déterminer les nœuds des Planetes qui ne ſont point des termes viſibles, la meilleure maniere eſt d'obſerver pendant pluſieurs jours la ſituation de la Planete, lorſque ſa latitude change d'eſpece : car ſi l'on ne peut pas obſerver immédiatement le temps que la Planete n'a point de latitude, on le trouvera par la comparaiſon des obſervations précédentes & ſuivantes, ce qui donnera l'arrivée de l'étoile au nœud : mais comme à une petite variation de latitude, il en répond une beaucoup plus grande en longitude, à cauſe du peu d'inclinaiſon des orbites des Planetes, il ne faut pas prétendre de trouver ce nœud avec beaucoup de préciſion, principalement dans les Planetes qui ont peu d'inclinaiſon. Le lieu du nœud ainſi trouvé, n'eſt ſon lieu véritable, que lorſque ce lieu vû de la terre concourt avec le lieu du Soleil, ou à ſon oppoſite : excepté ces deux cas qui ſont extraordinairement rares, il faut réduire par le moyen des hypotheſes corrigées par les obſervations, la ſituation de ce nœud vû de la terre, à celle qu'il auroit étant vû du Soleil, pour avoir ſa véritable ſituation.

L'inclinaiſon de l'orbite des Planetes à l'Ecliptique, ſe

peut déterminer en obſervant la latitude de la Planete lorſqu'elle eſt en quadrature avec le Soleil, & que le Soleil eſt en même-temps dans un des nœuds de la Planete, qui ſont des circonſtances rares. On la peut auſſi trouver par le moyen de la plus grande latitude de la Planete vûe de la terre qu'on ne peut pas ſouvent obſerver, mais ſeulement en quelque rencontre. La plus grande latitude étant trouvée, il faut la réduire par le rapport des diſtances de la Planete au Soleil, & du Soleil à la terre, de l'apparence qu'elle fait à la terre à celle qu'elle feroit au Soleil. Cette latitude ainſi réduite, & comparée à ſa diſtance au nœud, donnera l'inclinaiſon de l'orbite de la Planete, qui eſt celle qu'on met dans les Tables pour en calculer la latitude.

La proportion de l'orbite du Soleil à celle des Planetes qui ſert à connoître leur ſeconde inégalité, ſe peut chercher en deux manieres; la premiere, par les obſervations jointes aux hypotheſes: mais ces proportions ſeront différentes ſuivant l'eſpece de ligne que l'on ſuppoſera que les Planetes décrivent, & ſelon la différente excentricité qu'on aura établie: la ſeconde maniere ſeroit en trouvant la ſeconde inégalité par les obſervations; ce qui ne ſe peut pratiquer que dans Jupiter, dont les Satellites peuvent ſervir à la connoître en certaines rencontres.

Pour les autres Planetes, il faut employer la diſtance du Soleil à la terre, & le lieu de la Planete vû du Soleil qu'il faut trouver par les hypotheſes, & qu'il faut comparer avec le lieu de la Planete vûe de la terre, & trouvé par les obſervations. Par cette méthode, la moyenne diſtance de la Planete au Soleil, que l'on tire des diſtances trouvées en différens endroits de l'orbe de la Planete, devroit être à peu près la même; & cependant elle ſe trouve ſouvent fort différente, ce qui fait voir les difficultés qu'il y a auſſi dans cette recherche, quoiqu'elle ne ſoit pas des plus difficiles dans la Théorie des Planetes.

Après avoir établi le mieux qu'il eſt poſſible tous ces élémens, il reſte à déterminer le moyen mouvement des Pla-

netes, le mouvement de leur Apogée, & celui de leurs nœuds, dont on ſe ſert à trouver pour les ſiecles à venir, les lieux des Planetes dans le Zodiaque.

Dans ces recherches, nous ne ſommes pas ſeulement expoſés aux erreurs que nous faiſons en déterminant ces élémens par nos obſervations, mais encore à celles qui dépendent des obſervations des anciens Aſtronomes, qui n'ayant pas les ſecours que nous avons préſentement, ne faiſoient ſouvent qu'à la vûe, & à peu près, les obſervations qu'il faut employer pour les comparer aux nôtres. Pour cette comparaiſon, on choiſit pour l'ordinaire les plus anciennes obſervations qu'on puiſſe avoir; parce que l'erreur qui peut s'y être gliſſée étant partagée dans un plus grand intervalle de temps, reſte beaucoup moins ſenſible. Mais comme pluſieurs doutent de la juſteſſe des plus anciennes obſervations, & que parmi celles qui ont été faites dans la ſuite, il y en a qui paroiſſent plus exactes, ils ont aimé mieux ſe fonder ſur ces obſervations moins anciennes, préférant cette préciſion à l'avantage qu'on pourroit tirer d'un plus long intervalle. Par la comparaiſon de différentes obſervations, le moyen mouvement vient un peu différent, & il eſt difficile de déterminer lequel on doit préférer, n'étant pas poſſible de repréſenter toutes les obſervations faites en différens temps, quoique les hypotheſes qui s'éloignent le moins des obſervations, & qui en repréſentent un plus grand nombre, doivent être cenſées les meilleures.

On ne ſauroit trouver qu'à peu près la ſituation de l'Apogée des Planetes par les obſervations anciennes, à cauſe que celles qui ſont venues juſqu'à nous, ſont en petit nombre, & qu'elles n'ont pas l'exactitude qui ſeroit néceſſaire : c'eſt pourquoi le mouvement de l'Apogée qu'on tire de la ſituation qui réſulte de ces obſervations, comparée à la ſituation où on le trouve préſentement, ne peut pas être d'une grande préciſion, & ce mouvement ſe trouve différent ſuivant les différentes obſervations anciennes que l'on emploie.

Ce ſont là les difficultés générales, outre d'autres parti-

culieres que les Astronomes rencontrent lorsqu'ils entreprennent de donner des regles des mouvemens des Planetes. Nous les avons exposées afin qu'on connoisse que ce n'est pas sans raison que les plus grands Astronomes se défient de leurs forces dans une si grande entreprise ; & que Kepler après avoir médité avec un grand succès pendant près de 30 années sur les observations de Tycho, n'ose pas se promettre une grande précision dans le rapport de ses hypotheses avec les mouvemens célestes pour les siecles suivans.

Pour surmonter ces difficultés autant qu'il y auroit lieu de l'espérer par des observations indépendamment des hypotheses, quand le mouvement est plus simple, & n'a qu'une inégalité qui dépend de l'excentricité & de la distance de l'Apogée suivant les hypotheses communes, il faudroit avoir un assez grand nombre d'observations pour déterminer les équations à autant de degrés d'anomalie qu'il est besoin d'en mettre dans les Tables; & quand la Planete a une seconde inégalité qui demande la connoissance des différentes distances de la même Planete au Soleil, & du Soleil à la terre, il faudroit des observations à toutes les variations & combinaisons des distances & des configurations apparentes avec le Soleil, qui ne retournent les mêmes en quelques Planetes qu'après plusieurs siecles.

Il n'y a que le Soleil dont nous puissions avoir ces observations, à cause que le mouvement apparent de cet astre est plus simple que celui des autres, & que la période de son retour au même degré d'anomalie s'acheve en peu de temps. C'est aussi la Planete dont on connoît mieux le mouvement: car depuis l'an 1655 que M. Cassini en a construit des Tables sur lesquelles divers Astronomes célebres ont calculé les Ephémérides, elles se sont trouvées autant conformes qu'on pouvoit espérer aux observations. C'est pourquoi dans la Théorie des autres Planetes, où il faut employer le mouvement du Soleil, nous n'avons cru pouvoir mieux faire que de l'emprunter de ces Tables,

qui

qui sont à l'épreuve de 50 années d'observations faites avec de très-grands instrumens & fort exacts.

Dans l'impossibilité où nous sommes d'avoir pour les autres Planetes autant d'observations qu'il seroit necessaire, nous emploierons le plus grand nombre que nous pourrons avoir de celles qui ont été faites depuis 30 ou 40 ans. La plus grande partie de ces observations a été faite par M. Cassini, en prenant au méridien la différence du passage entre ces Planetes & le Soleil, ou différentes étoiles fixes qui se rencontroient dans la même parallele, & observant leur hauteur méridienne. Une autre partie des observations a été faite hors du méridien, en observant la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la Planete & quelque étoile fixe, lorsqu'elle se rencontroit proche du même parallele, soit que ces étoiles fussent proches l'une de l'autre en ascension droite, soit qu'elles en fussent fort éloignées.

Cette maniere de déterminer la situation des Planetes, s'est pratiquée par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45 degrés au foyer de la Lunette, tant appliquée au quart de cercle, que d'une Lunette posée sur une machine, appellée parallactique par M. Cassini, par le moyen de laquelle on suit facilement le cours de l'étoile à l'Occident. On laisse ces Lunettes dans une situation immobile, & on compte l'heure, la minute & la seconde que l'étoile la plus Occidentale passe par les trois fils. On fait la même chose à l'égard de l'étoile plus Orientale; ce qui détermine la différence d'ascension droite & la déclinaison d'une étoile à l'égard de l'autre; & la situation d'une de ces étoiles étant connue par rapport aux cercles de la sphere, on connoîtra la situation de l'autre. Nous n'entrerons point dans le détail de cette méthode, ni la maniere aisée d'abréger ces calculs en se servant de la machine parallactique, parce qu'elle a été expliquée à l'Académie par M. Cassini à l'occasion de diverses conjonctions des Planetes, des observations des Taches du Soleil & de la Lune, & communiquée à presque tous les Astronomes

d'Europe depuis fort longtemps qu'il a trouvé ces méthodes & qu'il les pratique. Il suffira de remarquer que par ces méthodes on peut trouver l'ascension droite & la déclinaison de la Planete presque aussi facilement & aussi exactement qu'on pourroit faire par des observations faites au méridien, pourvû que la situation des étoiles fixes, auxquelles on compare la Planete, soit une fois bien déterminée; parce que le temps qui sert à déterminer la différence de déclinaison, est aussi sensible que le peuvent être les divisions des instrumens dont on se sert pour connoître la déclinaison.

On a encore cet avantage par ces méthodes, que lorsqu'il y a des observations importantes, qui souvent ne se peuvent faire au méridien, à cause de quelques nuages qui surviennent dans le temps que ces étoiles passent au méridien, on le peut faire à toute autre situation de l'astre sur l'horison & à des heures commodes, & qu'on les peut refaire plusieurs fois lorsqu'on n'est pas content des premieres; ce qui ne se peut pratiquer à l'égard des observations qu'on fait au méridien. Et parce que nous employons un grand nombre d'observations faites par ces méthodes, & que la détermination exacte des Planetes dépend de celle des étoiles fixes, auxquelles elles ont été comparées, pour une plus grande précision nous avons déterminé l'ascension droite & la déclinaison de toutes ces étoiles par des observations faites au méridien, le plus exactement qu'il a été possible.

Les hypotheses du mouvement de Saturne.

Pour établir les hypotheses de Saturne, nous avons d'abord calculé un grand nombre d'observations faites dans l'opposition de cette Planete avec le Soleil en diverses parties de l'orbe de la Planete, & nous avons comparé ces observations aux Tables de Kepler. Cette comparaison nous a fait connoître qu'aux années 1672 & 1673, ces Tables donnoient le lieu de Saturne plus avancé dans le Zo-

diaque que les obſervations de 20 à 21 minutes ; qu'aux années 1686 & 1687, entre les obſervations & les Tables, il n'y avoit que 10 à 12 minutes, dont les Tables étoient plus avancées ; & qu'enfin aux années 1700, 1701 & 1702, cette différence étoit environ de 21 minutes comme trente années auparavant.

Nous avons choiſi en premier lieu ces obſervations pour en faire la comparaiſon avec les Tables; parce que, ſuivant toutes les hypotheſes, cette Planete ſe trouvoit alors près des moyennes diſtances, où l'erreur, qui pourroit être dans le calcul (quand même la ſituation de l'Apogée ne ſeroit pas bien déterminée dans ces Tables) ne peut faire qu'une petite différence dans la premiere équation. C'eſt pourquoi cette comparaiſon eſt très-propre pour établir la plus grande équation de la Planete, & l'Epoque de ſon mouvement.

Pour connoître l'erreur qui vient de l'Epoque, & celle qui eſt cauſée par la plus grande équation, & diſtinguer l'une de l'autre, nous avons conſidéré que la différence entre les obſervations & les Tables, ſeroit toujours la même dans les différentes parties de l'anomalie, ſi elle venoit toute de l'erreur qu'il y auroit dans l'Epoque ; que ſi elle étoit cauſée toute par l'erreur qu'il y a dans la plus grande équation, elle ſeroit en excès dans un demi-cercle de l'anomalie, & en défaut dans les ſix autres ſignes. Mais parce que les Tables donnent toujours le lieu de Saturne plus avancé que les obſervations, & que dans la différence qu'il y a, on trouve une variation de 9 à 10 minutes, l'erreur doit être attribuée, partie à l'Epoque, partie à la plus grande équation. Par les obſervations des années 1672 & 1673, & par celles des années 1700, 1701 & 1703, faites toutes près des moyennes diſtances où l'équation eſt ſouſtractive, la différence eſt plus grande d'environ 10 minutes que dans les moyennes diſtances où l'équation eſt additive, comme il paroît par les obſervations des années 1686 & 1687. Cela nous a fait connoître qu'il faut augmenter de la moitié de cette différence, qui eſt de 5

minutes, la plus grande équation de Saturne déterminée par Kepler qui la fait de 6° 31′ 30″, & la faire de 6° 36′ 30″, ce qui est à une minute près de celle qui a été déterminée par M. Bouillaud. Outre cette correction il en faut faire une seconde à l'Epoque, en ôtant 16 minutes au moyen mouvement de 1607 que Kepler fait de 6 28° 3′ 52″, & la faire de 6 27° 47′ 52″. Nous examinerons dans la suite s'il faut plutôt faire cette correction au moyen mouvement échu depuis les observations de Tycho jusqu'aux nôtres : mais en attendant nous la faisons à l'Epoque, étant indifférent pour les observations que nous employons dans cet examen, sur lequel de ces deux élémens tombe cette correction.

L'Epoque & la premiere inégalité ainsi établie, nous avons examiné d'autres observations faites dans les autres parties de l'orbe de la Planete, & principalement celles qui ont été faites proche de l'Apogée & du Périgée pour déterminer leur situation. Nous avons une observation célebre de la conjonction précise de Saturne avec une étoile fixe proche du Périgée de Saturne, que M. Kirchius fit par le moyen d'une Lunette de 10 pieds, & qui arriva l'an 1679 le 17 de Janvier à 5 heures du matin. L'étoile qui fut cachée par Saturne est la moyenne de la corne méridionale du Taureau, & qui, suivant nos observations réduites en ce temps-là, se trouvoit en 7° 59′ des Gemeaux avec une latitude australe de deux degrés & 20 minutes, ce qui est aussi la longitude & la latitude qu'avoit alors Saturne.

Voyez-en l'observation, Miscel. Berol. vol. 1. p. 205.

Pour représenter cette observation, en supposant les corrections déja faites, & en employant le mouvement du Soleil, des Tables de M. Cassini, nous avons trouvé qu'il faut avancer de 52 minutes le lieu de l'Aphélie de Saturne déterminé par Kepler, & l'établir en 28° 28′ du Sagittaire, comme le donnent les Tables de M. Bouillaud. Cette détermination est aussi confirmée par les observations que nous avons faites proche l'Aphélie de Saturne, l'an 1694, & quoique parmi ces observations il y en ait de celles qui demandent le lieu de l'Aphélie avancé d'environ

un demi-degré plus que ne demanderoit l'obſervation de l'année 1679, ayant eu égard au mouvement fait depuis ce temps-là, nous nous ſommes arrêtés à la détermination qui réſultoit d'un plus grand nombre d'obſervations, la différence qui s'y trouve pouvant être cauſée de quelque petite erreur à laquelle on eſt expoſé dans la détermination des lieux des Planetes.

Ayant ainſi déterminé l'Epoque, la plus grande équation & le lieu de l'Aphélie, nous avons calculé pluſieurs oppoſitions de Saturne avec le Soleil, obſervées en différentes parties de l'orbe de la Planete; & en employant l'équation calculée dans la forme elliptique, nous repréſentons par ces hypotheſes 27 oppoſitions obſervées depuis l'an 1672, parmi leſquelles il n'y a que celles des années 1698 & 1699, qui s'éloignent de 4 minutes de l'obſervation, la différence des autres étant plus petite ou nulle, ce qui confirme ces trois élémens établis auparavant.

Après ces comparaiſons, nous avons cherché la proportion de la diſtance de Saturne au Soleil, dans les parties de l'orbe annuel, laquelle eſt un des élémens néceſſaires pour calculer la ſeconde équation qui convient à la Planete hors de ſes oppoſitions & conjonctions avec le Soleil. Nous l'avons cherchée en déterminant par les obſervations le lieu véritable de Saturne dans ſes quadratures avec le Soleil, & en le comparant à la ſituation de Saturne vue du Soleil, qu'on calcule par les hypotheſes comptées ſur les obſervations de l'oppoſition la plus prochaine. Par cette méthode & par un grand nombre d'obſervations faites en différens endroits de l'anomalie de Saturne, dans les conjonctures les plus favorables, nous n'avons pas trouvé cette moyenne diſtance préciſément la même : mais ayant pris un milieu entre la plus grande & la plus petite, nous l'avons déterminée 955000 parties, dont la moyenne diſtance du Soleil à la terre eſt 100000.

Nous avons cherché le nœud de Saturne par des obſervations faites au méridien, lorſque cette Planete n'avoit

point de latitude, ce qui arriva au mois de Mai de l'année 1696, cette Planete étant en 26° 36′ du Capricorne, qui étoit le lieu du nœud vû de la terre : mais l'ayant réduit au Soleil à l'aide des hypotheses, on trouve le lieu véritable du nœud austral de Saturne en 22° 10′ du Capricorne. Il faut remarquer que comme la variation de la latitude de Saturne n'est pas sensible en 15 jours, on peut se tromper du moins d'un demi-degré dans cette détermination. D'où vient que par les observations faites la même année dans l'opposition avec le Soleil, nous trouvons le lieu du nœud moins avancé dans le Zodiaque, que par les observations précédentes d'environ 25 minutes.

Les occasions les plus favorables qu'il y ait eu depuis long-temps de trouver l'inclinaison de l'orbite de Saturne à l'Ecliptique, sont celles qui se sont présentées les années 1688 & 1703. Par les observations de l'année 1688 faites fort près des limites des plus grandes latitudes de Saturne, & dans l'opposition de cette Planete avec le Soleil, qui arriva en 21° 46′ de Libra, on trouve la latitude Septentrionale de Saturne de 2° 48′ 0″. Par le moyen de cette latitude & des rapports des distances du Soleil à Saturne & du Soleil à la terre, on trouve la parallaxe de latitude de 17′ 15″, qui étant ôtée de la latitude trouvée, donne la véritable inclinaison de Saturne à l'Ecliptique de 2° 30′ 45″. Par les observations de l'année 1703. on trouve la latitude méridionale de Saturne de 2° 48′ 50″, qui étant réduite comme la précédente, donne la même inclinaison de 2° 31′ 0″, qui ne differe de la précédente que de 15 secondes, & ayant pris un milieu entre les deux, on établira cette inclinaison de 2° 30′ 50″, qui est comme moyenne entre celle qui a été déterminée par Kepler & par M. Bouillaud.

Nous avons dit que pour bien représenter les observations de Saturne faites depuis 30 ans, il falloit ôter 16 minutes à l'Epoque du moyen mouvement établie par Kepler. On peut aussi représenter ces observations en corrigeant le moyen mouvement qui convient au temps échu

depuis les obſervations de Tycho juſqu'aux nôtres, & il eſt indifférent laquelle de ces deux corrections on emploie pour repréſenter nos obſervations. Il n'en eſt pas de même à l'égard des obſervations de Tycho : car ſi on fait cette correction à l'Epoque, les Tables ne peuvent repréſenter ces mêmes obſervations de Tycho, qu'environ à un tiers ou un quart de degré près ; au lieu que ſi on diſtribue cette correction au moyen mouvement, on pourra mieux repréſenter les obſervations de Tycho avec les nôtres : & c'eſt le parti que nous avons cru d'abord qu'il falloit prendre. Mais en diminuant dans la même proportion le moyen mouvement de près de 20 ſiecles, pour calculer la plus ancienne obſervation que nous ayons de cette Planete, qui eſt celle qui a été faite par les Aſſiriens 229 ans avant l'Epoque de J. C. le calcul fondé ſur cette hypotheſe s'éloigne de pluſieurs degrés de l'obſervation. Cette différence nous a paru trop grande pour pouvoir être tolérée dans une obſervation ſemblable, de la conjonction de Saturne avec une étoile fixe, & qui, ſuivant le témoignage de Ptolomée, eſt exacte, & ſur laquelle il ne faut pas avoir aucun doute. C'eſt pourquoi nous n'avons pas trouvé à propos de faire cette correction au moyen mouvement ; il reſte donc toujours les mêmes difficultés de repréſenter les obſervations de Tycho avec les nôtres.

Pour les réſoudre, nous avons tenté diverſes voies. Nous avons cherché en premier lieu ſi les oppoſitions de Saturne calculées ſur les obſervations de Tycho étoient bien déterminées, & s'il ne s'étoit pas gliſſé quelques erreurs, auxquelles on eſt expoſé dans les longs calculs qu'il faut faire pour les trouver. Nous avons donc fait tout de nouveau les calculs de ces oppoſitions, dans leſquels nous avons employé les diſtances des Planetes avec les étoiles fixes telles qu'elles ont été obſervées par Tycho. Pour les diſtances des étoiles fixes entr'elles, nous les avons ſuppoſées telles qu'elles réſultent de nos obſervations, auſſi-bien que la longitude & la latitude de ces étoiles, & réduites au

temps des obſervations de Tycho. Par ces nouveaux calculs, on a trouvé à la vérité dans pluſieurs oppoſitions quelques minutes de différence : mais comme elle eſt quelquefois favorable, quelquefois contraire à la correction de l'Epoque, nous n'avons pû tirer de ce travail beaucoup d'éclairciſſement.

Nous avons enſuite cherché d'accorder ces obſervations de Tycho avec les nôtres, en ſuppoſant dans l'Apogée un mouvement plus vîte que par les Tables ordinaires. Par ce moyen on repréſenteroit un bon nombre des obſervations de Tycho : mais il n'y auroit pas moyen d'accorder les obſervations faites près des moyennes diſtances, outre d'autres inconvéniens qui en réſultent dans les obſervations anciennes.

Après ces recherches nous nous ſommes enfin déterminés à chercher le moyen mouvement par la comparaiſon des obſervations éloignées entr'elles, du plus grand intervalle de temps qu'il eſt poſſible, parce que l'erreur qu'on auroit pû faire dans ces obſervations, partagée dans un plus grand nombre d'années, reſte moins ſenſible en chacune, au lieu que ſi on vouloit conclurre le moyen mouvement de 20 ſiecles par les obſervations éloignées ſeulement de cent ans, comme ſont celles de Tycho à l'égard des nôtres, l'erreur que l'on peut faire dans les obſervations qu'on compare, ſe multiplie dans la raiſon du petit intervalle au grand.

D'ailleurs nous avons reconnu, autant qu'on le peut faire par les obſervations de 32 années, que le moyen mouvement de Saturne dû à cet intervalle, ne demande pas la correction proportionnée à celle qu'il faudroit faire au moyen mouvement pour repréſenter également les obſervations de Tycho & les nôtres. Ce qui eſt auſſi confirmé par pluſieurs obſervations faites depuis 50 ans par le P. Riccioli & par Muti, qui s'accordent aſſez bien au moyen mouvement que nous avons tiré de la comparaiſon de nos obſervations avec celle qui fut faite 229 ans avant J. C. par laquelle comparaiſon le moyen mouvement de Saturne

turne pour cent ans, résulte de 4 23° 26′ 24″.

Pour les différences qui restent entre les hypotheses que nous établissons, & les observations de Tycho, de Longomontanus, de Kepler & d'autres Astronomes plus anciens, dont il y en a qui montent à un tiers de degré; ceux qui cherchent à accorder entierement les hypotheses aux observations, pourroient examiner si ces différences ne viennent point de quelques-unes de ces équations séculaires, dont Kepler nous avoit promis un Traité, & qu'il dit qu'il faut faire aux Planetes.

A l'égard du mouvement de l'Apogée, nous n'en avons point de détermination exacte faite par les Anciens, & le moyen qui nous reste pour le trouver, est de représenter le mieux qu'il est possible, les observations anciennes faites en divers temps, comme est celle qui fut faite 229 ans avant J. C. Par la comparaison du lieu de l'Apogée qui résulte de cette observation avec la situation où nous le trouvons présentement par nos observations, le mouvement de l'Apogée se trouve fort peu différent de celui qui a été déterminé par M. Bouillaud; c'est pourquoi on peut s'en servir tel qu'il est dans ses Tables.

Nous avons cherché le mouvement des nœuds par la comparaison de nos observations avec celles que Tycho fit l'an 1592, lorsque Saturne étant en 23°$\frac{1}{4}$ de Cancer, avoit une latitude Septentrionale de 8 minutes. Par cette observation, toutes réductions étant faites, nous trouvons le nœud Septentrional de Saturne en 21 degrés de Cancer. Nous l'avons trouvé l'an 1696 par les observations faites la même année en 22° 10′ du même signe; donc en 104 années il auroit eu un mouvement de 1° 8′ selon la suite des signes. Mais ces observations sont trop peu éloignées l'une de l'autre pour pouvoir conclurre avec quelque exactitude le mouvement des nœuds par un espace plus grand que cent ans.

Ptolomée observa de son temps que la plus grande latitude de Saturne étoit au commencement de Libra, &

par les obſervations récentes on trouve cette plus grande latitude en 22 du même ſigne ; donc en 1550 ans environ les limites de la plus grande latitude de Saturne, & par conſéquent ſes nœuds, ſe feroient avancés de 22 degrés ſelon la ſuite des ſignes ; ce qui feroit en raiſon d'environ 1° 28′ en cent ans.

OBSERVATION

D'une petite Tache dans le Soleil en Novembre 1704. à l'Obſervatoire.

PAR M. MARALDI.

1704. 29. Novembre.

LE 25 à midi, j'obſervai une petite Tache ſur le diſque du Soleil. Elle paſſa par le méridien après le premier bord du Soleil 2′ 2″, ou 18″ avant le dernier bord du Soleil ; car tout le diametre du Soleil paſſoit en 2′ 20″.

La hauteur méridienne apparente de cette Tache étoit de 20° 14′ 10″, & celle du bord ſupérieur du Soleil étoit de 20° 37′ 10″; donc 23 de différence.

Je n'ai pû voir le Soleil qu'aujourd'hui 29 au matin au travers de quelques petits nuages : mais avec une Lunette de 6 pieds je n'ai pû rien remarquer de la Tache qui auroit dû paroître plus grande que le 25, puiſqu'elle auroit dû être vers le milieu du Soleil ; ce qui me fait croire qu'elle s'eſt diſſipée.



SUR LA PLUS GRANDE PERFECTION POSSIBLE DES MACHINES.

Etant donnée une Machine qui ait pour puissance motrice quelque corps fluide que ce soit, comme, par exemple, l'eau, le vent, la flamme, &c. & qui doive servir à élever des poids solides ou liquides, comme des pierres, de la mine, des eaux, &c. on se propose de trouver la charge qu'il faut donner à cette Machine, & la proportion que ses différentes parties doivent avoir, afin qu'elle produise le plus grand effet possible, c'est-à-dire, qu'elle éleve une plus grande quantité de poids dans un même temps, qu'avec toute autre charge, & toute autre proportion possible; & dans cet état de déterminer la vitesse de chacune de ses parties, & la quantité de ce plus grand effet. De plus une Machine étant construite au hasard, & étant mue comme la précédente, on détermine la vitesse de ses parties, l'effet qu'elle produira, & en même temps son degré de perfection.

PAR M. PARENT.

ART. I. DEpuis le temps qu'on s'est avisé d'employer des Machines pour élever des poids, toute la perfection que les plus habiles Machinistes ont pû atteindre, s'est bornée à les mettre d'abord en équilibre avec la charge qu'il s'agissoit de faire monter, & à diminuer ensuite au hasard cette charge; ou à augmenter le rayon de quelqu'une des roues, ou accourcir celui de quelqu'une des lanternes, ou à faire enfin quelque chose d'équivalent, afin que la puissance motrice l'emportant sur sa charge, elle mît la Machine en mouvement; encore le

1704. 29. Novembre.

nombre de ces ſavans Machiniſtes eſt-il très-petit. A l'égard des autres qui ne ſont qu'en trop grand nombre pour le malheur du Public, on peut dire qu'ils font tout au haſard, & que les plus habiles d'entr'eux ne réuſſiſſent dans leurs entrepriſes, que parce qu'ils emploient ſouvent autant de force pour une ſeule Machine, qu'il en faudroit pour en mouvoir pluſieurs ſemblables. C'eſt de-là que ſont venues tant de réformations de Machines qu'on voit tous les jours, ſoit par les Auteurs mêmes de ces Machines, ſoit par d'autres, qui le plus ſouvent n'ont pas plus de connoiſſance qu'eux, ce qui ne peut manquer de cauſer un grand préjudice aux propriétaires, aux Machiniſtes mêmes, & à ceux qui s'aſſocient avec eux.

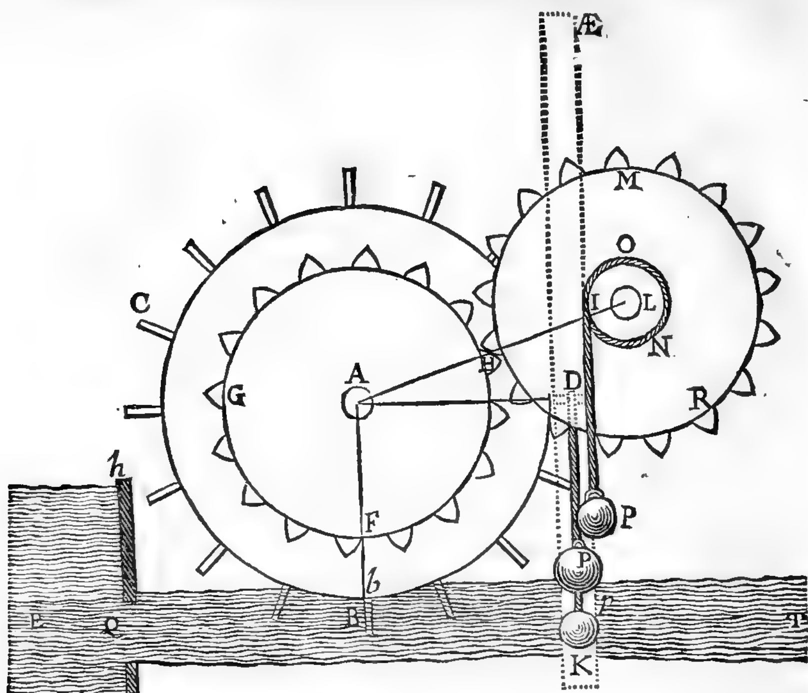
Mais quoiqu'on ſoit ſûr du mouvement d'une Machine, lorſqu'après l'avoir miſe en équilibre, on a diminué le poids dont elle eſt chargée, de quelque choſe(en faiſant abſtraction des frottemens) ou changé quelques-uns de ſes leviers, il s'en faut cependant beaucoup encore qu'elle ne ſoit dans ſon état de perfection : car à meſure que l'on diminue ſa charge, on augmente à la vérité ſa viteſſe, ce qui pourroit augmenter l'effet; mais cela même pourroit auſſi fort bien le diminuer. De même, en augmentant le rayon d'une des roues, ou diminuant celui d'une des lanternes ou pignons, on peut augmenter à la vérité la charge : mais auſſi on diminue d'autant ſa viteſſe, ce qui peut auſſi-tôt diminuer l'effet que l'augmenter; de ſorte qu'il eſt très-important de trouver la proportion qui donne le plus grand effet.

Ce fut en viſitant & en calculant les différentes Machines hydrauliques de Paris & des environs, que j'eus occaſion de faire la premiere fois ces ſortes de réflexions : mais quoique je ſuſſe donner l'équilibre à une machine, j'étois encore bien éloigné de ſavoir lui donner les proportions les plus parfaites. Il falloit pour cela des principes pour le calcul des Machines dans l'état du mouvement, lorſqu'elles ſont mues par toutes ſortes de puiſſances; & nous n'en avions encore que pour les calculer dans l'état du

repos, ou tout au plus dans l'état du mouvement lorſqu'elles ſont mues par des puiſſances animées, ce qui n'eſt qu'un cas très-particulier. M'étant donc appliqué à la recherche de ces principes, je les expliquai en 1700 dans mes Elémens, où je déterminai les viteſſes d'un corps mu par un fluide, comme l'eau, le vent, &c. dans un autre fluide, comme, par exemple, dans une riviere, dans un étang, &c. & j'allai même juſqu'à indiquer les voies pour donner à une telle Machine les proportions néceſſaires, afin de lui faire produire le plus grand effet dont la force motrice eſt capable.

Enfin après un travail de quatre années (interrompu à la verité par quantité d'autres occupations) je ſuis heureuſement parvenu à applanir toutes les difficultés qui m'avoient d'abord rebuté, & à les réduire à la portée de toutes les perſonnes qui ont les premieres teintures des Mathématiques; & j'ai trouvé des regles qui, toutes générales qu'elles ſont, ne laiſſent pas de pouvoir être pratiquées par ceux qui ne ſavent que l'arithmétique commune. J'ai ajouté à cette premiere découverte celle des proportions les plus avantageuſes des Machines mues par des animaux; & enfin à cette derniere, celle des Machines quelconques mues par des fluides, & au moyen deſquelles il s'agit d'élever des poids ſolides ou liquides, comme des marbres, de l'eau, &c. Ces trois découvertes compoſent trois Mémoires différens: voici la derniere.

ART. II. Mais auparavant de venir au fait, j'ai jugé qu'il ſeroit à propos d'expliquer quelques termes dont je me ſers, & les principes que je ſuppoſe. 1°. A l'égard des termes, ſi *EB* eſt un fluide quelconque, comme l'eau, le vent, &c. qui vienne dans le ſens de la droite *EB* choquer les ailes ou paletes *B*, *D* du moulin *CBD* dont *A* eſt le centre, & *AB*, *AD* des rayons tirés du centre *A* aux centres d'impreſſion *B* & *D* de ſes ailes; & ſi le rayon *AD* étant ſuppoſé dans une ſituation horiſontale, on ſuſpend au centre de l'aile *D* un poids P ſuffiſant pour arrêter l'effort du fluide *EB*, & tenir le moulin en repos, j'appelle



ce poids P en général *poids d'équilibre*, & en particulier *la force* ou *l'effort absolu* du fluide *E B*, qu'on suppose ici connu par les regles ordinaires des hydrauliques.

2°. L'effet produit par le fluide *E B* après un certain temps, étant plus ou moins grand, non seulement à mesure que les poids solides qu'il éleve, sont plus ou moins grands, mais encore à proportion que ces mêmes poids montent plus ou moins vîte, j'appelle l'*effet général* d'un fluide, le produit de la multiplication du poids solide qu'il éleve par la vitesse du même poids : mais j'appelle en particulier le produit du poids P par la vitesse même du fluide *E B*, l'*effet naturel* du fluide, parce que c'est le même effet que si P étant mis dans une gondole sur l'eau *E B*, flottoit au gré de l'eau avec toute la vitesse du fluide.

A l'égard des poids liquides, comme des colomnes d'eau élevées par des hydrauliques, l'effet dépend uniquement de la grosseur de ces colomnes & de leur vitesse : c'est-pourquoi l'exposant de l'effet est alors le produit de la base de la colomne par sa vitesse.

3°. Si *GHF* est une lanterne fixe autour de l'arbre *A* du moulin *CDB*, laquelle engraine dans les dents de la roue *HMR* dont *L* est le centre ou l'arbre ; en sorte que *H* soit le point d'attouchement de deux dents de la lanterne & de cette roue, & *AH*, *LH* deux rayons menés de leurs centres au point *H*; & qu'enfin *ION* soit un tambour fixe autour de l'arbre *L* de la roue *HMR*, lequel tambour porte un poids *P* capable d'arrêter l'effort du fluide *EB*, j'appellerai aussi le poids *P poids d'équilibre* : mais si l'on ôte quelque partie de ce poids *P*, afin que le fluide *EB* puisse mettre la Machine en mouvement, j'appelle le poids restant *p*, *poids diminué* en général, ou *poids de mouvement*; & si ce poids *p* a la grandeur requise pour la perfection de la Machine, je l'appelle alors *poids naturel* de la Machine.

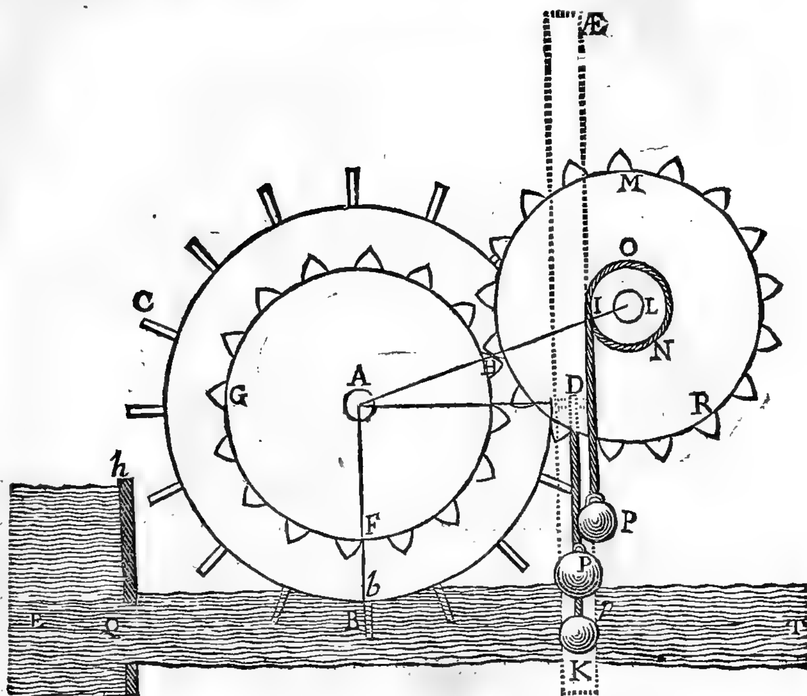
4°. Si au lieu de diminuer le poids *P*, on augmente un des rayons *AB*, *LH* des roues; ou si l'on diminue un des rayons *AH*, *LI* des lanternes & des tambours, j'appellerai ces rayons *rayons augmentés* ou *diminués* en général, ou *rayons de mouvement*; & si en même temps ces rayons ont la proportion nécessaire pour faire produire à cette Machine son plus grand effet, je les appelle alors *rayons naturels*. Au reste, s'il s'agissoit de Machines où les rayons ou leviers ne se manifestassent pas, comme dans les plans inclinés, dans les vis, &c. on pourroit prendre pour le levier de la force motrice la ligne qui marque son chemin, & de même pour le poids, ces chemins étant faits en même temps, ce qui est connu de tout le monde.

A l'égard des principes méchaniques sur lesquels je me fonde, je suppose 1°. qu'on est prevenu que l'effort d'un fluide *EB* contre une surface *B* est marqué par le produit de la multiplication de sa masse ou pesanteur spécifique du

fluide par le quarré de sa viteſſe & par *B*; & que pour avoir l'effort ou moment du même fluide à l'encontre du poids *P*, il faut encore multiplier ce dernier produit par le produit des rayons des roues *AB*, *LH*.

2°. Que l'effort ou moment du poids *P* à l'encontre du fluide *EB* eſt ſimplement le produit de *P* par le produit des rayons *LI*, *AH* des tambours & des lanternes, ſans avoir aucun égard à la viteſſe avec laquelle le poids *P* monte ou deſcend, dont la raiſon eſt que, ſuivant le principe de Galilée de l'accélération des corps qui tombent, un poids qui tombe devroit accélérer ſa viteſſe indéfiniment, ſans la réſiſtance de l'air. Or telle que ſoit la cauſe qui le faſſe ainſi accélérer, la viteſſe naturelle de cette cauſe doit encore ſurpaſſer la plus grande viteſſe de ce corps (puiſqu'il eſt impoſſible de faire impreſſion ſur un corps qui ſe meut, ſans ſe mouvoir plus vite que lui.) Donc, ſelon Galilée, la viteſſe de cette cauſe eſt indéfiniment grande; d'où il ſuit évidemment que quand on éleve un corps avec une viteſſe finie, on ne ſouffre pas plus de réſiſtance de la cauſe de ſa peſanteur, que ſi on le ſoutenoit ſimplement en repos; & quand on deſcend un corps de même avec une viteſſe finie, on ne ſouffre pas moins de charge de la cauſe de cette peſanteur, que ſi on le ſoutenoit immobile, puiſqu'une viteſſe indéfiniment grande augmentée ou diminuée d'une viteſſe finie, n'augmente ſon effort en rien. Ainſi toute la différence qu'on pourroit appercevoir dans ces différentes actions, ne procede que du mouvement de notre corps, de ſes parties, & de leurs différentes ſituations; de ſorte que ſi une perſonne étant aſſiſe dans une chaiſe ſoutenoit un poids en ſa main, tandis qu'on la feroit monter & deſcendre ſans aucune ſecouſſe, au moyen d'une corde tirée pardeſſus une poulie, ou d'une baſcule, cette perſonne ne ſe ſentiroit pas plus chargée en montant, ni moins en deſcendant, que quand on la ſoutiendroit ſimplement en repos, ce qui eſt conforme à l'expérience journaliere.

3°. Que ſi le fluide *EB* choquant l'aile *B* d'une certaine viteſſe



vitesse soutient le poids *P* en équilibre, & que venant ensuite la choquer avec une autre vitesse plus grande ou plus petite que la premiere, il soutienne en équilibre un autre poids *p*, on aura l'Analogie: comme le premier effort du fluide est à son second effort; ainsi le premier poids soutenu *P*, est au second poids soutenu *p*.

4°. Que si la Machine ayant été mise en équilibre, on réduit le poids d'équilibre *P* à *p*, afin que le fluide *EB* la fasse mouvoir, ce fluide ne choquera jamais l'aile *B* en mouvement qu'avec l'excès de sa vitesse sur celle de *B*, & ce seul excès de vitesse devra être regardé à l'égard de *p* élevé, comme la vitesse entiere du fluide à l'égard de *P*, quand il soutient *P* en repos, la vitesse de *p* étant toujours très-modérée, & cette vitesse ne rendant pas *p* plus pesant

que s'il étoit en repos, suivant le second principe ci-dessus.

5°. Enfin que la vitesse de *B* est toujours à celle de *P* en raison composée du rayon *AB* au rayon *AH*, & du rayon *LH* au rayon *LI*; c'est-à-dire, que la vitesse de *B* est à celle de *P*, comme le produit des rayons des roues *AB*, *LH*, au produit des rayons des lanternes & tambours *AH*, *LI*, ce qui est connu de tout le monde.

ART. III. Toutes ces choses étant proposées, je nomme *V* la vitesse du fluide *EB*, & *x* la vitesse inconnue que prendra le point *B*. J'appelle *AB*, *B*; *AH*, *b*; *LH*, *C* & *LI*, *c*; & je prens *P* pour marquer l'effort du fluide contre l'aile *B* à l'encontre du poids d'équilibre *P*, ce qui donne dans l'état d'équilibre l'égalité ($P \times AB \times LH = P \times LI \times AH$), ou ($P \times B \times C = P \times c \times b$) d'où l'on tire la valeur de $\left(P = \frac{P \times B \times C}{b \times c}\right)$. Supposant maintenant qu'on réduise *P* à *p*; alors la Machine commencera de se mouvoir d'une vitesse qui accélerera peu à peu jusqu'à un certain point, ou étant arrivée elle y demeurera ensuite continuellement, (& cela en faisant toujours abstraction des frottemens.) C'est cette vitesse *x* que j'appelle *vitesse uniforme*. Au reste cette réduction de vitesse à l'uniformité, vient de ce que l'effort du fluide contre l'aile *B* diminue à mesure que la vitesse de *B* augmente; de sorte que la vitesse de *B* ne peut jamais atteindre celle du fluide, puisque si ces deux vitesses étoient égales, le fluide ne feroit plus aucun effort sur *B*, ainsi *p* descendroit au lieu de monter. Or lorsque le point *B* aura atteint sa vitesse uniforme *x*, celle du fluide à l'égard de *B* ne sera plus que $V-x$, & son quarré $\overline{V-x}^2$ par le quatrieme principe; au lieu que *B* étoit choqué avec la vitesse totale *V* du fluide, quand le fluide étoit en équilibre avec *P*. Mais comme dans ce premier & second choc c'est toujours le même fluide qui choque & la même base *B* qui est choquée, il est évident que ni la pesanteur naturelle du fluide, ni la base *B* ne doivent point entrer dans la comparaison de ces deux efforts. On aura donc simplement selon le troisieme & quatrieme

principe, l'Analogie ($V^2 | \overline{V-x}^2 || P | p$), d'où l'on tire l'égalité ($V^2 p = \overline{V-x}^2 \times P$); & tirant les racines quarrées de part & d'autre, on a ($V\sqrt{p} = \overline{V-x} \times \sqrt{P}$), d'où l'on déduit $\left(x = \frac{\sqrt{P} - \sqrt{p} \times V}{\sqrt{P}}\right)$. Mais (par le principe 5.) x est à la vitesse de $p = u$, comme $AB \times LH$ est à $AH \times LI$, ou comme BC à bc; ce qui donne pour la vitesse u desirée de p $\left(\frac{\sqrt{P} - \sqrt{p}}{\sqrt{P}} \times \frac{Vbc}{BC}\right)$ $\left(\frac{bcx}{BC}\right)$, ou substituant la valeur de P ci-dessus, on a $\left(u = \frac{Vbc}{BC} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{pbc}{PBC}}}\right)$ pour la même vitesse uniforme de p, de quelque grandeur que soit p au-dessous de P. On voit de plus à l'œil quelle seroit cette vitesse uniforme de p, quelque composée que fût la Machine.

ART. IV. Si l'on multiplie maintenant cette vitesse de p par p, on aura $\left(\frac{\sqrt{P} - \sqrt{p}}{\sqrt{P}} \times \frac{bcpV}{BC}\right)$ pour l'exposant de l'effet de la Machine (par la seconde définition), lequel effet changera à mesure que p ou B, C, b, c, varieront, comme il est aisé de le voir.

ART. V. Si l'on suppose donc maintenant B, C, b, c, constans, & que l'on diminue, ou que l'on augmente p autant qu'il est possible; c'est-à-dire, qu'on le fasse passer par tous les changemens de grandeur dont il est susceptible, afin de trouver sa valeur qui fasse produire à la Machine son plus grand effet, on aura p variable dans la valeur générale de l'effet de l'article précédent, & prenant la différentielle de cette valeur, savoir, $\left(\overline{\sqrt{P} - \frac{3}{2}\sqrt{p}} \times \frac{Vbcdp}{BC\sqrt{P}}\right)$ afin de l'égaler à zero (selon la méthode des Infiniment petits) il en résulte l'égalité ($\sqrt{P} = \frac{3}{2}\sqrt{p}$), d'où l'on tire ($\frac{2}{3}\sqrt{P} = \sqrt{p}$), & enfin ($\frac{4}{9}P = p$) desirée $\left(= \frac{4}{9}\frac{PBC}{bc}\right)$. Ce qui nous apprend que si l'on réduit le poids d'équilibre P aux ($\frac{4}{9}$), ce poids aura la proportion propre à faire produire à la Machine son plus grand effet, & cette proportion est comme on le voit aussi simple que générale.

ART. VI. Pour trouver à présent l'exposant de ce plus grand effet, il est manifeste qu'il ne faut pas substituer cette valeur de ($p=\frac{4}{9}P$) dans celle de l'effet général $\left(\frac{\sqrt{P}-\sqrt{p}}{\sqrt{P}}\times\frac{bc\times pV}{BC}\right)$, & il en résultera $\left(\frac{4}{27}VP\right)$ pour la valeur du plus grand effet ; ce qui nous apprend que le plus grand effet qu'une telle Machine puisse produire, ne passe jamais les $\left(\frac{4}{27}\right)$ du produit de P par la vitesse du fluïde, que nous avons appellé *l'effet naturel* dans la seconde définition ; ce qui servira à déterminer aisément le degré de perfection de ces sortes de Machines lorsqu'elles seront faites au hasard : car il ne faudra pour cela que diviser l'effet général ci-dessus par l'effet parfait $\left(\frac{4}{27}VP=\frac{4}{27}\frac{VPbc}{BC}\right)$, ce qui donnera le rapport $\left(\frac{27p\times\sqrt{P}-\sqrt{P}}{4PVp}=\frac{27bc\times\sqrt{PBC}-\sqrt{pbc}}{4PBC\sqrt{PBC}}\right)$, qui marquera le degré de la Machine. Enfin divisant l'effet parfait $\left(\frac{4}{27}VP\right)$ par la valeur de $p=\frac{4}{9}P$, il vient $\left(\frac{VP}{3P}\right)$ pour la vitesse uniforme du poids p dans l'état de perfection $\left(=\frac{V}{3}\times\frac{bc}{BC}\right)$ & $\left(x=\frac{V}{3}\right)$. L'on peut remarquer que comme les rayons des roues, lanternes & tambours de la Machine n'entrent point dans la valeur du plus grand effet $\left(\frac{4}{27}VP\right)$, il s'ensuit que quelques changemens qu'on fasse à ces rayons (pourvu qu'on ait mis la Machine dans son état de perfection, comme on a fait ci-dessus) le plus grand effet de la Machine sera toujours le même.

ART. VII. Supposons maintenant que le poids p à élever soit donné & constant, ensorte qu'il soit permis seulement de faire quelques changemens aux rayons, AB, AH; LH, LI, je dis que pour faire produire à la Machine son plus grand effet, il ne faut que disposer d'abord tellement ces rayons, que p soit en équilibre avec l'effort du fluide EB, ou avec P, & ensuite augmenter un ou plusieurs des

rayons AB, HL de la force motrice, ou diminuer un ou plusieurs rayons AH, Ll de la charge p, ou faire l'un & l'autre en même-temps, & cela en telle proportion que le fluide n'ait que les $\frac{4}{9}$ de sa charge d'équilibre p à soutenir, & alors la Machine sera dans son état de perfection.

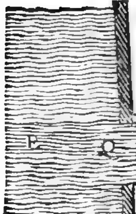
La raison en est aisée à voir, en ce que p dans cet état de mouvement peut toujours être regardé comme les $\frac{4}{9}$ d'un autre poids P, qui étant appliqué à cette Machine après y avoir fait le changement marqué dans le rapport de 4 à 9, seroit en équilibre avec P ou avec l'effort du fluide EB, puisqu'après ce changement ainsi fait, le fluide n'a plus que les $\frac{4}{9}$ de sa charge à soutenir; ainsi ce cas retombe dans le premier.

Il faut donc conclurre aussi que le plus grand effet sera encore $\frac{4}{27}VP$, & la vitesse de p encore $\left(\frac{V}{3}\times\frac{bc}{BC}\right)$, comme dans le premier cas.

Voici donc deux paradoxes très-remarquables; savoir le premier qu'une puissance n'ayant que les $\frac{4}{9}$ de sa charge, produise après un certain temps un plus grand effet, que si elle portoit beaucoup davantage.

Le second, que quelque changement qu'on fasse à une Machine, son produit n'excedera jamais $\left(\frac{4}{27}\right)$ de son effet naturel, c'est-à-dire, de ce que la force motrice produiroit sans Machine.

ART. VIII. Pour faire maintenant application de ces principes à quelque chose d'usage, je supposerai que EB soit le jet horisontal d'une vanne dont l'ouverture soit Q, que Qh soit la distance du centre de cette ouverture à la surface de l'eau, & qu'il faille connoître la quantité d'eau que cette vanne est capable d'élever à une hauteur donnée $KÆ$ avec la Machine la plus parfaite de toutes. Pour y parvenir, je considere que la force du jet sera alors $(Q\times Qh = P)$ ce qui donnera en prenant $KÆ$ pour l'unité $\left(P=\frac{Qh\times Q}{KÆ}\right)$; & cette valeur de P étant substituée dans celle du plus grand effet $\left(=\frac{4}{27}VP\right)$, il en résulte



$\left(\frac{4}{27} \times \frac{Qh \times V \times Q}{K Æ}\right)$ pour la quantité d'eau produite en *Æ* dans l'état de perfection ; d'où l'on tire l'Analogie générale pour toutes ces ſortes d'hydrauliques.

Comme 27 fois la hauteur propoſée *K Æ* eſt à 4 fois la hauteur de la chute de l'eau Qh, ainſi la dépenſe *D* de la vanne $Q = VQ$ à ſa dépenſe en *Æ* avec la Machine la plus parfaite.

ART. IX. Enfin ſi l'on ſuppoſe que le fluide *EB* vient choquer l'aile *B* avec différentes viteſſes qui ſoient entr'elles comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. Et ſi l'on ſubſtitue 1 *V*, 2 *V*, 3 *V*, 4 *V*, 5 *V*, &c. au lieu de *V*, & 1 *P*, 4 *P*, 9 *P*, 16 *P*, 25 *P*, &c. au lieu de *P* dans la valeur générale du plus grand effet $\left(\frac{4}{27} VP\right)$, il en réſultera

les plus grands effets $\frac{4}{27} VP$, $\frac{32}{27} VP$, $\frac{108}{27} VP$, $\frac{256}{27} VP$, $\frac{500}{27} VP$, qui répondent aux forces $4 P$, $9 P$, 16, P 25 P.

Or les nombres 132, 108, 256, 500, &c. ſont quadruples des nombres 1, 8, 27, 64, 125, &c. & ceux-ci ſont les cubes des viteſſes 1, 2, 3, 4, 5, &c. Donc ces plus grands effets ſont entr'eux comme les cubes des racines quarrées des différentes forces du fluide, ou des cauſes qui les produiſent.

Ou ſi l'on veut comparer ces mêmes effets parfaits aux différens efforts du fluide contre l'aube B, on ôtera de la viteſſe V du fluide celle de B dans l'état parfait $= \frac{V}{3}$, ce qui donnera pour la viteſſe relative du fluide à l'égard de B $\frac{2}{3} V$, dont le quarré $\frac{4}{9} V^2$ marquera en même-temps ſon effort. Donc lorſque les viteſſes abſolues du fluide ſeront $1 V$, $2 V$, $3 V$, $4 V$, $5 V$, &c. ſes viteſſes relatives contre A ſeront $\frac{2}{3} V$, $\frac{4}{3} V$, $\frac{6}{3} V$, $\frac{8}{3} V$, $\frac{10}{3} V$, &c. dont les quarrés qui marqueront les différens efforts du fluide, ſont comme les nombres 4, 16, 36, 64, 100, &c. ou comme les quarrés naturels 1, 4, 9, 16, 27, &c. Donc ces différens efforts ſont entr'eux comme les différentes forces du fluide; c'eſt-à-dire, encore comme les quarrés des racines cubiques des différens effets qu'ils produiſent. Donc même dans l'état parfait du mouvement, *les effets ne ſont proportionnels ni aux forces ou cauſes, ni aux efforts qui les produiſent*, comme on l'avoit cru juſqu'ici; ce qui peut paſſer encore pour un troiſieme paradoxe.

ART. X. Il ne nous reſte maintenant pour épuiſer cette matiere entierement, que de réſoudre les cinq problemes qu'on peut faire ſur la grandeur du poids à élever, ſur celle des aubes, ſur les leviers de la force motrice, ſur ceux du poids, & enfin ſur ſa viteſſe, c'eſt-à-dire, quatre de ces cinq différentes choſes étant données à ſouhait de trouver la cinquieme.

Pour y parvenir je ſuppoſe une eau dont la viteſſe v ſoit connue, comme de 26 piés par 2[e] qui eſt celle qu'elle

acquiert en tombant par 13 piés dans une pareille 2e. ſelon les expériences les plus exactes du P. Sebaſtien & de M. Mariotte, avec le poids π qu'elle eſt capable de ſoutenir (à même diſtance de l'appui) en choquant contre une ſurface plate α d'un pié en quarré, lequel poids ſeroit ici de 910 liv. (ce qui s'accorde auſſi à très-peu de choſe près avec les expériences du même M. Mariotte faites en différens endroits de la Seine, en déduiſant quelque petite choſe pour le frottement de ſon moulin) ce qui donnera l'Analogie en nommant A l'aube B: ($V^2 A \mid P \| v^2 \alpha \mid \pi$) d'où l'on tire $\left(P = \frac{V^2 A \pi}{v^2 \alpha}\right)$ & $\left(P = \frac{V^2 A \pi BC}{v^2 \alpha bc}\right)$. Mettant donc dans l'équation de l'art. 3. ($V^2 p = \overline{V - x}^2 P$) les valeurs de P de $\left(x = \frac{u\,B\,C}{b\,c}\right)$, on la change en cette autre $\left(V^2 p = \overline{bcV - BCu}^2 \times \frac{V^2 A\,B\,C\pi}{v^2 \alpha b^3 c^3}\right)$, d'où l'on tire ($p v^2 \alpha b^3 c^3 = V^2 A\,B\,C \pi b^2 c^2 + u^2 A\,B^3 C^3 \pi - 2 V u\,B^2 C^2 A b c \pi$).

Si l'on demande donc le poids p, tout le reſte étant donné, on aura $\left(p = \frac{\overline{Vbc - uBC}^2}{v^2 \alpha b^3 c^3} \times A\,B\,C\pi\right)$.

Si l'on demande l'aube A, tout le reſte étant connu, on aura $\left(A = \frac{p v^2 \alpha b^3 c^3}{\overline{Vbc - uBC}^2 \times BC\pi}\right)$.

Si l'on veut avoir la viteſſe u du poids p qu'on a trouvée dans l'art. 3. $\left(= \frac{Vbc}{BC} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{pbc}{PBC}}}\right)$, il ne faudra qu'y ſubſtituer la valeur de P ci-deſſus, & il viendra . . . . . $\left(u = \frac{bc}{BC} \times \overline{V - v\sqrt{\frac{pbc\alpha}{\pi BCA}}}\right)$.

Pour trouver un des rayons de la force motrice comme B, on tirera de l'égalité ci-deſſus $\left(B^3 - B^2 \times \frac{2Vbc}{uC} + B \times \frac{V^2 b^2 c^2}{u^2 c^2} - \frac{p v^2 \alpha b^3 c^3}{\pi u^2 A C^3} = o\right)$, laquelle en ſuppoſant $\left(B = z + \frac{2\,Vbc}{3\,uC}\right)$ ſe transforme en cette autre $\left(z^3 - z \times \frac{V^2 b^2 c^2}{3 u^2 C^2} + \frac{2V^3}{27u} - \frac{pv^2\alpha}{A\pi} \times \frac{b^3 c^3}{u^2\, C^2} = o\right)$ qui contient deux cas tous deux

irréductibles;

irréductibles, le quarré de la moitié de l'absolu étant toujours moindre que le cube du tiers du coëfficient, à cause que up est toujours moindre que $\frac{4}{27} V\mathrm{P}$; c'est pourquoi on les résoudra par les Tables du cercle fort aisément, comme on le dira ci-après.

Enfin pour trouver un des rayons du poids comme b, on en prendra un à plaisir comme e, avec lequel on cherchera comme ci-dessus le rayon B de la force motrice : on cherchera aussi avec e le rayon β du fluide EB qui feroit un équilibre entre p & le fluide, faisant $(pec = \mathrm{P} C\beta)$ ou $\left(pec = \frac{V^2 A\pi C\beta}{b^2 \alpha}\right)$ & $\left(\frac{pecv^2\alpha}{V^2 AC\pi} = \beta\right)$ en distribuant la valeur de P ci-dessus, & on fera cette Analogie comme B est à β; ainsi e a un quatrieme terme qui sera la valeur de l'inconnue b.

Pour résoudre la derniere équation ci-dessus, supposant premierement que l'absolu ait le signe $+$, ou ce qui est le même que $\left(\frac{4}{27} V\mathrm{P}\right)$ soit plus grand que $(2up)$, on prendra la racine quarrée du tiers du coëfficient, savoir $\left(\frac{Vbc}{3uC}\right)$, & l'on divisera l'absolu par les $\frac{2}{3}$ du même coëfficient pour avoir $\left(\frac{2V^3 A\pi - 27upv^2\alpha}{6V^2 uCA\pi} \times bc\right)$. On fera ensuite cette Analogie : $\frac{Vbc}{3uC} \Big| \frac{2V^3 A\pi - 27upv^2\alpha}{6V^2 uCA\pi} \times bc \,\Big\|\, 1 \,\Big|\, 1 - \frac{27upv^2\alpha}{2V_3 A\pi} \Big\|$. $\left(1 \,|\, 1 - \frac{2up}{\frac{4}{27} V\mathrm{P}}\right)$; ainsi le sinus total des Tables du cercle a un quatrieme terme qui sera un sinus dont on prendra l'arc, & le tiers de cet arc & le double sinus de ce tiers. On fera ensuite cette seconde Analogie : comme le sinus total est au double sinus trouvé, ainsi $\left(\frac{Vbc}{3uC}\right)$ a un quatrieme terme, qui sera une des valeurs de z, savoir la moindre des 2 vraies.

Et pour avoir l'autre valeur, on prendra 5 fois le tiers d'arc trouvé, & le double sinus de ces $\frac{5}{3}$; après quoi on fera cette derniere Analogie : comme le sinus total est au

double ſinus dernier, ainſi $\left(\frac{Vbc}{3uC}\right)$ a un quatrieme terme, qui ſera la plus grande valeur vraie de z.

Enfin ſi l'abſolu a le ſigne —, ou ſi $\left(\frac{4}{27}VP\right)$ eſt moindre que $(2up)$, il n'y aura qu'une valeur vraie de z, qui ſera égale à la ſomme des 2 qu'on vient de trouver.

Ayant z & y joignant $\left(\frac{2Vbc}{3uC}\right)$, on aura auſſi-tôt la valeur deſirée de *B*. Ce qui reſtoit.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS

FAITES A LA MARTINIQUE

Par le P. Feuillée en 1703 & 1704.

Comparées aux obſervations qui avoient été déja faites en cette Iſle par Mrs des Hayes & du Glos.

Et à celles qui ont été faites en même-temps à l'Obſervatoire Royal.

PAR M. CASSINI le fils.

1704. 6. Decembre.

LE P. Feuillée qui, dans ſon voyage du Levant & des Iſles de l'Archipel, a déja fait pluſieurs obſervations Aſtronomiques dont j'ai fait le rapport à l'Académie, a entrepris depuis ſon retour à Marſeille un autre voyage dans le deſſein d'y faire de nouvelles obſervations. Il a commencé par la Martinique où il a demeuré plus d'un an, comme il paroît par le Journal de ſes obſervations qu'il a envoyées depuis peu à M. le Comte de Pontchartrain. Elles ont été ſouvent interrompues par de longues maladies qui lui ſont ſurvenues, & par des pluies très-abondantes qu'il y a fait depuis le mois de Juin de l'année 1703, juſqu'au mois de Mars de cette année 1704. Il n'a pas laiſſé d'y faire un nombre conſidérable d'obſervations d'Eclipſes de Satellite de Jupiter, dont il y en a deux du

premier qui ont été faites en même-temps à l'Obſervatoire, & qui ſervent à déterminer avec exactitude la longitude de la Martinique. Il y en a pluſieurs autres dont nous n'avons pas pû obſerver ici les correſpondantes, tant à cauſe du temps qui n'eſt pas toujours favorable, que parce qu'elles ſont arrivées de jour à Paris, ou bien lorſque Jupiter n'étoit plus ſur l'horiſon. Nous ne laiſſerons pas de les comparer avec celles qui réſultent à Paris par le calcul corrigé par les obſervations plus prochaines, & nous préfererons les obſervations qui précedent ou ſuivent immédiatement celles qui ont été faites à Paris, comme étant les moins ſujettes à erreur.

Obſervations des Satellites de Jupiter faites à la Martinique. 1703.

Le 19 Juillet à $2^h 41' 15''$ du matin à la Martinique, Immerſion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.
6 53 57 à Paris par le calcul corrigé.
4 12 42 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique, dont Paris eſt plus à l'Orient. Cette Immerſion n'a pas pû être obſervée immédiatement à Paris, y étant arrivée pendant le jour. Elle a été tirée de l'Immerſion ſuivante, qui fut obſervée le 21. Juillet à $1^h 22' 22''$ du matin.

Le 26. Juillet à $4^h 35' 20''$ du matin à la Martinique, Immerſion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.
8 47 43 à Paris par le calcul corrigé.
4 12 23 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique. Cette obſervation eſt auſſi arrivée de jour à Paris.

Le 7 Decembre à $7^h 10' 31''$ du ſoir à la Martinique, Emerſion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 7 Decembre à 11^h 23′ 1″ à Paris par le calcul corrigé.
4 12 30 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 12 Decembre à 10^h 4′ 54″ du soir à la Martinique, Emersion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 20 Decembre à 0^h 41′ 10″ du matin à la Martinique, Emersion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter. Je n'ai point comparé ces deux observations du second Satellite avec celles qui résultent à Paris du calcul corrigé, n'en ayant pas observé vers ce temps-là.

Le 14 Decembre à 9^h 1′ 44″ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter au travers de foibles nuages.
13 15 0 Emersion du 1 Satellite observée à Paris.
4 13 16 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 29 Decembre à 0^h 44′ 51″ du matin à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
4 58 4 à Paris par le calcul corrigé.
4 13 13 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique. Cette Emersion n'a pas pu être observée à Paris, Jupiter étant alors sous l'horison.

Le 30 Decembre à 7^h 12′ 59″ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
11 26 40 Emersion du 1 Satellite observée à Paris.
4 13 41 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

1704.

Le 14 Février à $7^h\ 30'\ 40''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
11 43 19 à Paris par le calcul corrigé.
4 12 39 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 21 Février à $9^h\ 26'\ 28''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
13 39 31 à Paris par le calcul corrigé.
4 13 3 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 8. Mars à $7^h\ 49'\ 6''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
0 2 27 à Paris par le calcul corrigé.
4 13 21 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

En prenant un milieu entre les deux obſervations du 14 & du 30 Decembre faites en même-temps à Paris & à la Martinique, l'on a la différence des Méridiens entre ces lieux de $4^h\ 13'\ 28''$. Cette différence excede celle qui réſulte de la comparaiſon des autres obſervations, & eſt plus petite que celle qui fut déterminée en 1682 de $4^h\ 14'\ 45''$, par une obſervation de Mrs des Hayes & du Glos, qui eſt rapportée dans le Livre des voyages de l'Académie, dont la correſpondante ne fut pas obſervée en même-temps à Paris : c'eſt pourquoi je crois qu'il eſt plus à propos de préférer la différence qui réſulte des deux obſervations du P. Feuillée comparées aux nôtres immédiates, & de déterminer la différence des Méridiens entre Paris & la Martinique de $4^h\ 13'\ 28''$ ou $6^d\ 22'\ 0''$.

Observations pour la latitude de la Martinique.

Le P. Feuillée s'est servi pour déterminer la hauteur du Pole de la Martinique d'un anneau Astronomique de 18 pouces de diametre, avec lequel il a fait un grand nombre d'observations de hauteurs Méridiennes du Soleil. Quoique cet instrument ne puisse pas donner les hauteurs avec autant de précision que les grands quarts de cercle dont nous nous servons ordinairement, l'on ne laisse pas de reconnoître la bonté de celui dont s'est servi le P. Feuillée, & en même-temps son exactitude à observer, puisque ces observations, qui sont au nombre de plus de 60, donnent la hauteur du Pole de cette Isle entre $14^d\ 42'\ 23''$, & $14^d\ 43'\ 55''$; de-sorte qu'entre les extremes il n'y a qu'une minute & demie de différence.

Dans le Livre des voyages de l'Académie la hauteur du Pole de cette Isle fut déterminée en 1682 de $14^d\ 44'\ 0''$, & cette détermination fut confirmée par le dernier voyage que M. des Hayes fit à la Martinique, où il la trouva de même qu'elle est marquée dans le Livre des voyages; ainsi il n'y a pas lieu de rien changer à cette détermination, qui d'ailleurs ne s'écarte pas d'une minute de celle qui résulte des observations du P. Feuillée.

Observations pour la variation de l'Aimant.

Le P. Feuillée s'étoit servi dans son voyage du Levant d'une Boussole dont la boîte étoit de cuivre : mais ayant remarqué que dans le même endroit l'aiguille varioit quelquefois diversement, & ayant attribué cette variation au cuivre, il fit avant son départ de Marseille une boîte de bois d'un pied de diametre, dans laquelle il plaça une aiguille de 9 pouces 7 lignes de très-fin acier, dans le dessein d'observer la variation de l'Aimant avec le plus d'exactitude qu'il lui seroit possible.

Ayant placé cette Boussole sur une pierre de niveau où

il avoit tracé avec beaucoup de soin une ligne Méridienne, il trouva le 9 Février 1704 à la Martinique la variation de l'Aimant de 6d 5' 0" Nord-Est, & le 20 du même mois de 6d 10' 0".

La variation de l'Aimant avoit été observée à la Martinique au mois de Novembre de l'année 1682 par Mrs des Hayes & du Glos de 4d & 10' ou environ Nord-Est, comme il est rapporté dans le Livre des voyages de l'Académie. Il y a donc eu dans cet intervalle de temps, qui est de 21 années & quelques mois, une augmentation de la variation de l'Aimant d'environ deux degrés du Nord vers l'Est, au lieu que celle que l'on a observée à Paris a augmenté depuis ce temps-là du Nord vers l'Ouest : car en 1682 au mois de May, elle fut observée à Paris de $3^d\frac{1}{2}$, au lieu qu'elle fut trouvée en 1703 au mois d'Octobre, de 9 degrés du Nord vers l'Ouest, comme il est rapporté dans la Connoissance des Temps de cette année; desorte qu'à peu près dans le même intervalle de temps que celui qui s'est écoulé entre les observations de la Martinique, il y a eu à l'Observatoire $5^d\frac{1}{2}$ d'augmentation du Nord vers l'Ouest; ce qui est en raison de 15 à 16 minutes par année.

La différente direction de l'aiguille aimantée, qui dans l'Europe est du Nord vers l'Ouest, & dans l'Amérique Méridionale du Nord vers l'Est, est apparemment ce qui a donné lieu à l'hypothese de M. Halley, qui trace dans les mers qui se trouvent entre ces deux continens, une ligne courbe où il n'y a point de variation de l'Aimant, & qui est le terme des variations Orientales & Occidentales. Il a, selon les apparences, fondé son hypothese sur diverses observations qu'il a faites lui-même, & qu'il a tirées des voyageurs. En effet, il y a dans ces mers, suivant les dernieres observations que M. des Hayes a faites en Amérique en 1699 & 1700, plusieurs endroits où il n'y a point de variation. Mais dans la traversée de Gorée à la Cayenne, le lieu où cesse la variation, selon M. des Hayes, est éloigné de celui par où passe la ligne de M. Halley, M.

Halley faiſant paſſer cette ligne beaucoup plus proche du Cap-Verd & de la Gorée que de Cayenne, au lieu que l'endroit où M. des Hayes n'a point trouvé de variation eſt plus proche de Cayenne que de Gorée. Car il rapporte que dans la plus grande partie de la traverſée de Gorée à Cayenne, la variation a toujours été Nord-Oueſt, comme en France & en Canada, mais pas ſi grande ; que 6 ou 7 jours avant l'atterage de Cayenne elle étoit nulle; qu'elle paſſoit enſuite au Nord-Eſt d'abord de peu, & qu'à Cayenne elle eſt de $5^d \frac{1}{2}$. Ainſi, ſuivant cette obſervation, cette ligne devroit être dans la traverſée de Gorée à Cayenne beaucoup à l'Occident de l'endroit où elle eſt marquée dans la Carte de M. Halley.

Pour ce qui eſt de la déclinaiſon de l'aiguille à Cayenne que M. des Hayes marque être de $5^d \frac{1}{2}$ du Nord vers l'Eſt, elle s'accorde aſſez bien à celle de M. Halley, où elle paroît être de 6 degrés.

Celle de la Martinique differe un peu plus, ayant été obſervée par le P. Feuillée de $6^d\ 10'$, au lieu qu'elle eſt marquée dans la Carte de M. Halley de $5'\ 20'$: mais il ne faut pas s'étonner de cette différence, puiſque celle de Paris n'y eſt marquée que de 7 degrés, quoique dans le temps que M. Halley a imprimé ſa Carte, elle y ait été obſervée de 8 degrés ou environ; auſſi il n'y a pas d'apparence qu'il ait prétendu repréſenter les variations de l'Aiman dans la derniere préciſion.

M. des Hayes remarque auſſi que dans une partie de la traverſée pour le retour des Iſles en France, la variation eſt encore Nord-Eſt juſqu'à la latitude de 30 à 31 degrés, & qu'après elle repaſſe au Nord-Oueſt, & y reſte juſqu'en France. En ceci il paroît s'accorder à ce qui eſt repréſenté dans la carte de M. Halley. Mais quand même toutes les obſervations que l'on pourroit faire en ce temps-ci s'accorderoient aux variations qui ſont marquées dans la Carte de M. Halley, il faudroit toujours une nouvelle hypotheſe pour exprimer les variations qui arriveroient dans la ſuite. Car en 1682 la variation de l'Aiman ayant

été

été observée à Paris de $3^{d}\frac{1}{2}$ du Nord vers l'Ouest, & à la Martinique de 4^{d} 10′ du Nord vers l'Est, il y avoit alors 7^{d} 40′ de différence de variation qui répondoient à l'intervalle qui est entre ces lieux. Présentement la variation est à Paris de 9^{d} vers l'Ouest, & à la Martinique de 6^{d} 10′ vers l'Ouest; de sorte que dans le même intervalle il y a à présent 15^{d} 10′ de différence de variation, ce qui est environ le double de celle qui a été observée il y a 21. ans. Si ces différences de variation, l'une du Nord vers l'Ouest, & l'autre du Nord vers l'Est, continuent à augmenter comme il y a quelque apparence, l'hypothese de M. Halley aura dans la suite besoin de corrections qui demanderoient un grand nombre d'observations faites dans une longue suite d'années.

DESCRIPTION

De deux especes de Chamærhododendros *observées sur les côtes de la Mer Noire.*

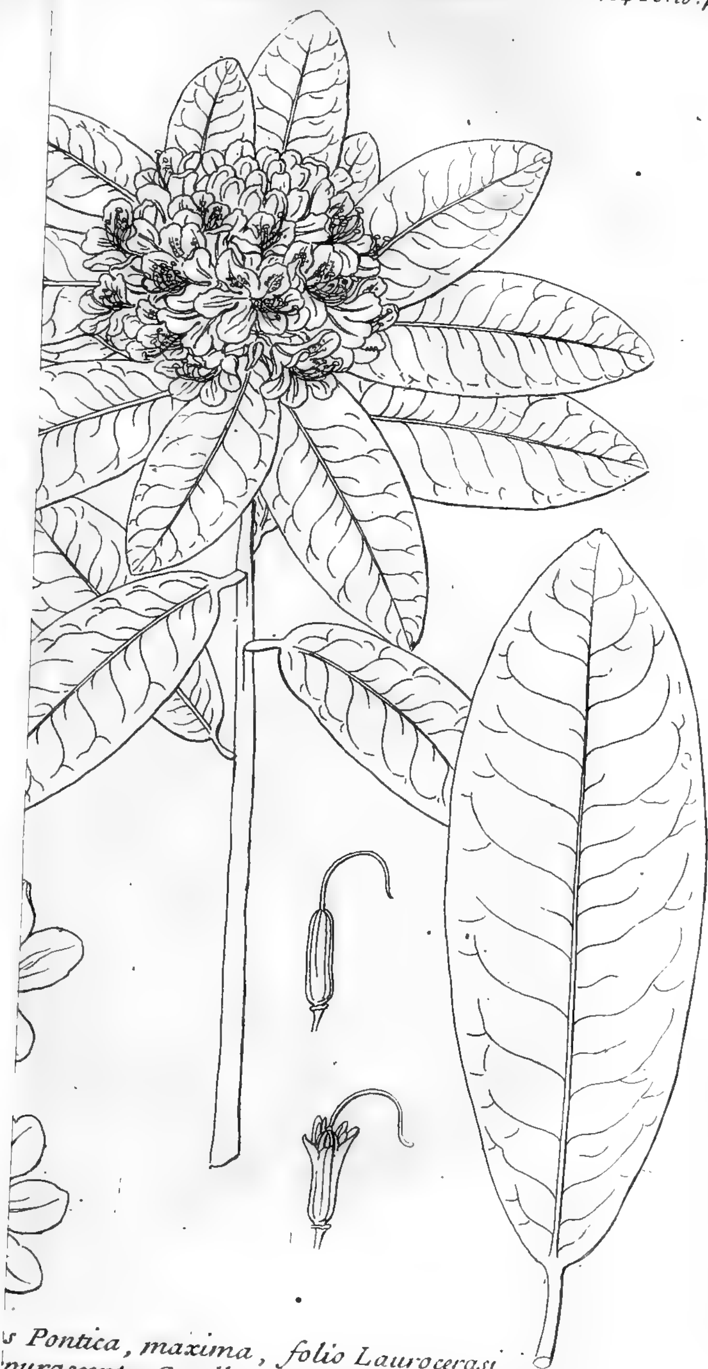
PAR M. TOURNEFORT.

Chamærhododendros Pontica, maxima, folio Laurocerasi, flore è cæruleo purpurascente. Coroll. hist. rei herb. 42.

CEt arbrisseau s'éleve ordinairement à la hauteur d'un homme. On en trouve quelquefois de plus grands, dont le principal tronc est presque aussi gros que la jambe. Sa racine trace jusqu'à cinq ou six pieds de long, partagée d'abord en quelques autres racines grosses comme le bras, distribuées en subdivisions qui ne sont guere plus épaisses que le pouce. Celles-ci diminuent insensiblement, & sont accompagnées de beaucoup de chevelu. Elles sont dures, ligneuses, couvertes d'une écorce brune, & produisent plusieurs tiges de différentes grandeurs qui environnent le tronc. Le bois en est blanc, cassant, revêtu d'une écor-

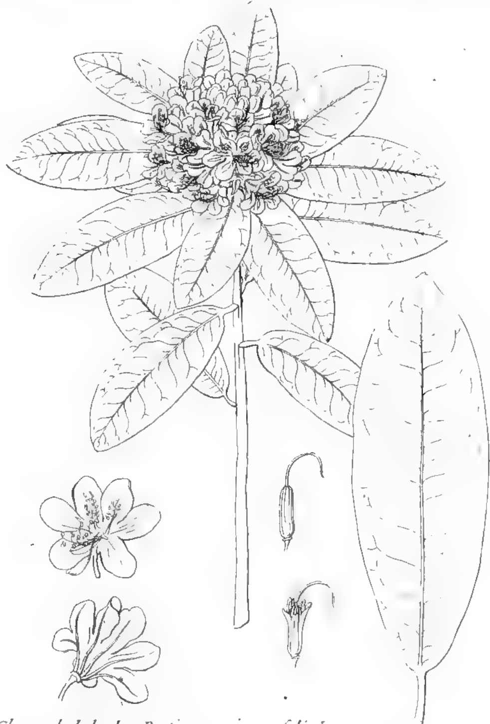
1704. 10. Decembre.

ce grisatre, qui tire en quelques endroits sur le brun. Les branches sont assez touffues, & naissent souvent dès le bas: mais elles sont mal formées, inégales & garnies de feuilles seulement vers les extrémités. Ces feuilles quoique rangées sans ordre sont d'une grande beauté, & ressemblent tout à fait à celles du Laurier-cerise. Les plus grandes ont sept ou huit pouces de long sur environ deux ou trois pouces de large vers le milieu: car elles se terminent en pointe par les deux bouts. Leur couleur est verd gai, leur surface lisse & presque luisante, leur consistance ferme & solide. Le dos en est relevé d'une grosse côte arrondie; ce n'est qu'un allongement de la queue, laquelle a près de deux pouces de long sur une ligne de large. Cette côte, qui est sillonnée en devant, distribue des vaisseaux de part & d'autre, qui se répandent & se subdivisent sur ces côtes dans un ordre comme alterne. Les feuilles deviennent moindres à mesure qu'elles approchent des sommités: cependant on y en apperçoit assez souvent qui sont encore plus grandes que leurs inférieures. Depuis la fin d'Avril jusqu'à celle de Juin, ces sommités sont chargées de bouquets de quatre ou cinq pouces de diametre, composés chacun de vingt ou trente fleurs qui naissent chacune des aisselles d'une feuille longue d'un pouce & demi, membraneuse, blanchâtre, large de quatre ou cinq lignes, pointue, creusée en goutiere & posée en écaille avec ses voisines. Le pédicule des fleurs a depuis un pouce jusqu'à quinze lignes de long: mais il n'est épais que d'environ demi-ligne. Chaque fleur est d'une seule piece, longue d'un pouce & demi ou deux, rétrécie dans le fond, évasée & découpée en cinq ou six quartiers. Celui d'en-haut, qui est quelquefois le plus grand, est large d'environ sept ou huit lignes, arrondi par le bout ainsi que les autres, légerement frisé, orné vers le milieu de quelques points jaunes, ramassés en maniere d'une grosse tache. Les quartiers d'embas sont un peu plus petits, & découpés plus profondément que les autres. A l'égard de leur couleur, le plus souvent elle est violette tirant sur le gris



s Pontica, maxima, folio Laurocerasi
rpurascente Coroll. Inst. rei Herb. 42

Berey fecit



Chamærhododendros Pontica, maxima, folio Laurocerasi flore e cæruleo purpurascente Coroll. Inst. rei Herb. 42

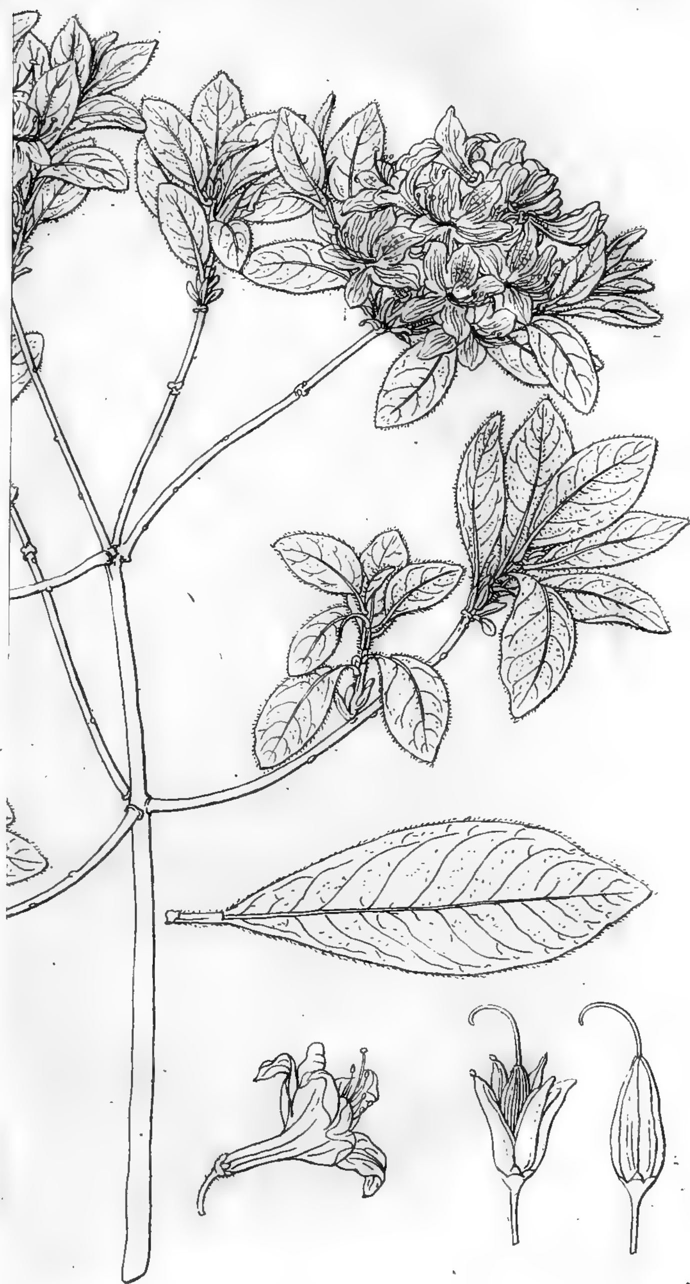
de lin. On trouve des pieds de cette plante à fleurs blanches, & d'autres à fleurs purpurines, plus ou moins foncées. Toutes ces fleurs ſont marquées de points jaunes dont on vient de parler, & leurs étamines qui naiſſent en touffe, ſont plus ou moins colorées de purpurin, mais blanches & cotonneuſes à leur naiſſance. Ces étamines ſont inégales, crochues & entourent le piſtile : leurs ſommets ſont poſés en travers, longs de deux lignes ſur une ligne de large, diviſés en deux bourſes pleines d'une pouſſiere jaunâtre. Le calice des fleurs n'a qu'environ une ligne & demie de largeur, légerement cannelé en ſix ou ſept pointes purpurines. Le piſtile eſt une eſpece de cone de deux lignes de long, relevé à ſa baſe d'un ourlet verdâtre & comme friſé. Un filet purpurin, courbe & long de 15 ou 18 lignes termine ce piſtile, & finit par un bouton verd-pâle. Les bouquets des fleurs ſont très-gluans avant qu'elles s'épanouiſſent : lorſqu'elles ſont paſſées, le piſtile devient un fruit cylindrique, long d'un pouce à quinze lignes, épais d'environ quatre lignes, cannelé, arrondi par les deux bouts. Il s'ouvre vers le haut en cinq ou ſix parties, & laiſſe voir autant de loges qui le partagent en ſa longueur, & qui ſont ſéparées les unes des autres par les ailes d'un pivot qui en occupe le milieu. C'eſt ce pivot qui eſt terminé par le filet du piſtile ; & bien loin de ſe deſſécher il devient plus long tandis que le fruit eſt verd & ne tombe point. Les graines ſont très-menues, brun clair, longues de près d'une ligne.

Les feuilles de cette plante ſont ſtiptiques ſans autre ſaveur. Les fleurs ont une odeur agréable, mais qui ſe paſſe facilement.

Cette plante aime la terre graſſe & humide. Elle vient ſur les côtes de la Mer noire le long des ruiſſeaux, depuis la riviere d'Ava qui n'eſt qu'à trente lieues de la ſortie du Boſphore de Thrace juſqu'à Trébiſonde.

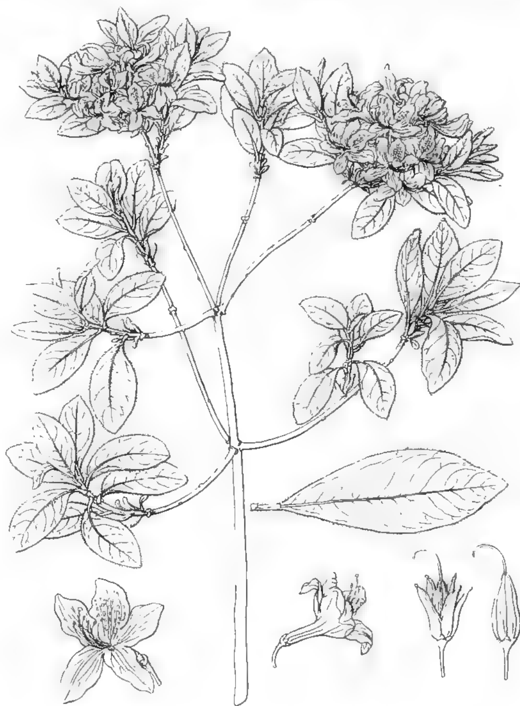
Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, flore luteo. Coroll. hist. rei herb. 42.

Cette espece s'éleve quelquefois plus haut que la précédente, & produit un tronc de même grosseur, accompagné de plusieurs tiges plus menues, divisées en branches inégales, foibles, cassantes, blanches en dedans, couvertes d'une écorce grisâtre & lisse, si ce n'est aux extrémités où elles sont velues & garnies de bouquets de feuilles assez semblables à celles du Néflier des bois. Ces feuilles sont longues de quatre pouces sur un pouce & demi de largeur vers le milieu, pointues par les deux bouts, & surtout par celui d'embas, verd gai, légerement velues, excepté sur les bords où les poils forment comme une espece de sourcil. Leur côte est assez forte, & se distribue en nervure sur toute la surface. Cette côte n'est que la suite de la queue des feuilles, qui le plus souvent n'a que trois ou quatre lignes de longueur sur une ligne d'épaisseur. Les fleurs naissent dix-huit ou vingt ensemble, ramassées en bouquets à l'extrémité des branches, soutenues par des pédicules d'un pouce de long, velus & qui naissent des aisselles de petites feuilles membraneuses, blanchâtres, longues de sept ou huit lignes sur trois lignes de large. Chaque fleur est un tuyau de deux lignes & demie de diametre, légerement cannelé, velu, jaune tirant sur le verdâtre. Il s'évase au-delà d'un pouce d'étendue, & se divise en cinq quartiers, dont celui du milieu a plus d'un pouce de long sur presque autant de largeur, réfléchi en arriere ainsi que les autres, & terminé en arcade gothique, jaune pâle, quoique doré vers le milieu. Les autres quartiers sont un peu plus étroits & plus courts, jaune pâle aussi. Cette fleur est percée en derriere, & s'articule avec le pistile qui est pyramidal, cannelé, long de deux lignes, verd blanchâtre, légerement velu, terminé par un filet courbe long de deux pouces, lequel finit par un bouton verd pâle. Des environs du trou de la fleur sortent cinq étamines plus courtes que le pistile, inégales, courbes, chargées de



…dendros Pontica, maxima, Mespili folio, …oll. Inst. rei Herbar. 42.

Berey fecit



Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, flore luteo Coroll. Inst. rei Herbar. 42

Berey fe.

fommets longs d'une ligne & demie, remplis de pouſſiere jaunâtre. Les étamines ſont de même couleur, velues de leur naiſſance juſques vers le milieu, & toutes les fleurs ainſi que celles de l'eſpece précédente ſont penchées ſur les côtés de même que celles de la Fraxinelle. Le piſtile devient dans la ſuite un fruit d'environ quinze lignes de long, du diametre de ſix ou ſept lignes, relevé de cinq côtes, dur, brun & pointu. Il s'ouvre de la pointe à la baſe en ſept ou huit parties, creuſées en goutiere, leſquelles aſſemblées avec le pivot cannelé qui en occupe le milieu, forment autant de loges. Je n'en ai pas vû la graine mûre.

Les feuilles de cette plante ſont ſtiptiques. L'odeur des fleurs approche de celle de la Chevrefeuille, mais elle eſt plus forte & porte à la tête.

Cette fleur me parut ſi belle que j'en fis un bouquet pour préſenter à Numan Coprogli Pacha de Candie préſentement, & Pacha d'Erzeron dans le temps que j'eus l'honneur de l'accompagner ſur la Mer noire : mais je fus averti par ſon Chaia que cette fleur excitoit des vapeurs & cauſoit des vertiges. La raillerie me parut aſſez plaiſante : car le Pacha ſe plaignoit de ces ſortes d'incommodités : cependant le Chaia ne railloit pas, & venoit d'apprendre par les gens du pays que cette fleur étoit nuiſible au cerveau. Ces bonnes gens par une tradition fort ancienne, fondée apparemment ſur pluſieurs obſervations, aſſurent auſſi que le miel que les abeilles font de ce qu'elles ſuccent ſur cette fleur, étourdit ceux qui en mangent & leur donne des nauſées.

Dioſcoride a parlé de ce miel à peu près dans les mêmes termes : Autour d'Heraclée du Pont, dit-il, en certains « temps de l'année, le miel rend inſenſés ceux qui en man- « gent, & c'eſt ſans doute par la vertu des fleurs d'où il eſt « tiré. Ils ſuent très-copieuſement : mais on les ſoulage en « leur donnant de la Rue, des ſalines & de l'hydromel à « meſure qu'ils vomiſſent. Ce miel, ajoute le même Auteur, « eſt acre & fait éternuer. Il efface les rouſſeurs du viſage ſi «

Lib. 2. c. 103. & Eupor. lib. 2. c. 38.

„ on le broye avec du Coſtus, mêlé avec du ſel ou de l'Aloës:
„ il diſſipe les noirceurs que laiſſent les meurtriſſures. Si les
„ chiens ou les cochons avalent les excrémens des perſon-
„ nes qui ont mangé de ce miel, ils ſouffrent les mêmes
„ accidens.

Les deux Plantes dont on vient de parler, ſe trouvent autour d'Héraclée du Pont, que l'on appelle aujoud'hui Penderachi ou Elegri, & naiſſent en abondance tout le long des côtes & dans les bois juſqu'au delà de Trébiſonde. La premiere eſpece paſſe auſſi pour malfaiſante. Les beſtiaux n'en mangent que lorſqu'ils ne trouvent pas de meilleure nourriture.

Ariſt. de Mirab. Auſcult.

Pline a mieux débrouillé l'hiſtoire de ces arbriſſeaux que Dioſcoride ni qu'Ariſtote, qui a cru que les abeilles amaſſoient ce miel ſur le Bouis; qu'il rendoit inſenſés ceux qui en mangeoient & qui ſe portoient bien auparavant; qu'au contraire il guériſſoit les inſenſés. Pline s'en explique de la ſorte: Il eſt des années, dit-il, où le miel eſt très-

Lib. 21. cap. 12.

Α'ἰγῶν ὄλεθρος Caprarum pernicies.

„ dangereux autour d'Héraclée du Pont. Les Auteurs n'ont
„ pas connu de quelles fleurs les abeilles le tiroient. Voici
„ ce que nous en ſavons. Il y a une Plante dans ces quar-
„ tiers; appellée *Ægolethron*, dont les fleurs dans les Prin-
„ temps humides acquierent une qualité très-dangereuſe
„ lorſqu'elles ſe flétriſſent. Le miel que les abeilles en font
„ eſt plus liquide que l'ordinaire, plus peſant & plus rouge.
„ Il a une odeur étrangere, & provoque à éternuer. Ceux
„ qui en ont mangé, ſuent horriblement, ſe couchent à ter-
„ re, & ne demandent que des rafraîchiſſemens. Il ajoute
„ enſuite les mêmes choſes que Dioſcoride, dont il ſemble qu'il ait traduit les paroles: mais outre le nom d'*Ægolethron* qui ne ſe trouve pas dans cet Auteur, voici une excellente remarque qui appartient uniquement à Pline.

„ On trouve, continue-t'il, ſur les mêmes côtes du Pont
„ une autre ſorte de miel qui eſt nommé *Mænomenon*; parce
„ qu'il rend inſenſés ceux qui en mangent. On croit que les
„ abeilles l'amaſſent ſur la fleur du *Rhododendros* qui s'y trou-
„ ve communément parmi les forêts; & les peuples de ce

quartier-là quoiqu'ils payent aux Romains une partie de " leur tribut en cire, se gardent bien de leur donner de " leur miel. "

Il semble que sur ces paroles de Pline l'on peut déterminer les noms de nos deux especes de *Chamærhododendros*. La seconde suivant les apparences est l'*Ægolethron* de cet Auteur : car la premiere qui fait des fleurs purpurines approche beaucoup plus du *Rhododendros*, & l'on peut la nommer *Rhododendros Pontica Plinii* pour la distinguer du *Rhododendros* ordinaire, qui est notre Laurier-rose connu par Pline sous le nom de *Rhododaphne & Nerium*. Il est certain que le Laurier-rose ne croît point sur les côtes du Pont Euxin, cette Plante aime les pays chauds. On n'en voit guere passé les Dardanelles : mais elle est fort commune le long des ruisseaux dans les Isles de l'Archipel, ainsi le *Rhododendros* du Pont ne sauroit être nôtre Laurier-rose : mais il est très-vrai-semblable que le *Chamærhododendros* à fleur purpurine est le *Rhododendros* de Pline.

Lib. 24. cap. XI.

Quand l'Armée des dix mille approcha de Trébisonde, il lui arriva un accident fort étrange, & qui causa une grande consternation, ainsi que le rapporte Xenophon qui étoit un des principaux Chefs de ces troupes. Comme il y avoit plusieurs ruches d'abeilles, dit cet Auteur, les soldats n'en épargnerent pas le miel. Il leur prit un dévoiement par haut & par bas, suivi de rêveries ; de sorte que les moins malades ressembloient à des ivrognes, & les autres à des personnes furieuses ou moribondes. On voyoit la terre jonchée de corps comme après une bataille. Personne néantmoins n'en mourut, & le mal cessa le lendemain environ l'heure qu'il avoit pris ; de sorte que les soldats se leverent le troisieme & le quatrieme jour, mais en l'état qu'on est après avoir pris une forte medecine.

Xenophon lib. 4. Retraite des dix mille.

Diodore de Sicile rapporte le même fait dans les mêmes circonstances. Il y a toute apparence que ce miel avoit été tiré de quelqu'une de nos especes de *Chamærho-*

Lib. 14.

dodendros. Tous les environs de Trebisonde en sont pleins ; & le Pere Lamberti, Missionnaire Theatin, convient que le miel que les abeilles succent sur un certain arbrisseau de la Colchide ou Mengrelie, est dangereux & fait vomir. Il appelle cet arbrisseau *Oleandro giallo*, c'est-à-dire, Laurier rose jaune, qui sans contredit est notre *Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, luteo.* La fleur, dit-il, tient le milieu entre l'odeur du musc & celle de la cire jaune. Elle nous paroît assez semblable à celle de la *Chevre-feuille*, mais incomparablement plus forte.

Relation de la Colchide imprimée à Naples 1652. in quarto.

OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 11. Décembre 1704. au matin à l'Observatoire.

PAR M^rs. DE LA HIRE.

1704. 13. Decembre.

LE ciel ayant toujours été couvert pendant les 10 jours qui ont précédé celui de cette Eclipse, il sembloit qu'il n'y avoit aucune espérance d'en pouvoir rien observer. Cependant le soir précédent le ciel commença à s'éclaircir : mais le vent qui regnoit toujours vers le Sud, ne promettoit pas une grande sérénité. Aussi vers les 4 heures du matin le ciel étoit fort brouillé, & la Lune étoit couverte de nuages cotonneux qui empêchoient de voir bien distinctement les taches de la Lune. Il faisoit alors peu de vent : mais vers les 6 heures le vent s'étant un peu augmenté, le ciel devenoit quelquefois assez serein pour laisser voir clairement la Lune : mais l'ombre de la terre sur le corps de la Lune n'a point été bien terminée dans tout ce que nous avons pû observer.

Sur les $5^h \frac{1}{2}$ on croyoit voir tantôt une pénombre, & tontôt elle paroissoit se dissiper entierement. Enfin à $5^h\ 51'$ la pénombre paroissoit distinctement & assez forte entre les taches Grimaldi & Tycho.

A $5^h\ 51'$

A 5^h 51′ le bord de la Lune paroiſſoit fort ſombre, & la pénombre ſembloit occuper 2 ½ doigts.

A 6^h 8′ la Lune paroiſſoit éclipſée d'un doigt à la ſeule eſtime, & l'on ne remarquoit pas de pénombre ſenſible, & l'ombre étoit fort douteuſe.

A 6^h 11′ 30″ L'ombre touchoit le bord de *Mare humorum.*
14 30 Commencement de Grimaldi.
16 0 La Lune éclipſée de 2 doigts 12′.
17 30 Fin de Grimaldi.
21 0 Commencement de Tycho.
27 0 L'ombre n'étoit point diſtincte.
32 0 La Lune éclipſée de 3 doigts 51′.
34 0 Kepler peu diſtinctement.
36 0 Copernic douteux.
46 0 La Lune éclipſée de 5 doigts 22′.
56 0 La Lune éclipſée de 5 doigts 49′.
à 7 0 0 La Lune éclipſée de 6 doigts 3′.
11 0 La Lune éclipſée de 6 doigts 33′.

Après ce temps-là la Lune entra dans des nuages fort épais, & on ne la vit plus. La partie de la Lune qu'on voyoit un peu dans le fort de l'ombre paroiſſoit de couleur griſâtre.

Quelque temps avant l'Eclipſe nous obſervâmes avec le Micrometre que le diametre de la Lune étoit de 30′ 46″ à la hauteur de 25 degrés.

Il ſera facile de faire une figure exacte de la Lune avec ſes Taches par les diſtances de quelques-unes que nous avons obſervées un peu avant l'Eclipſe.

Diſtances des Taches au bord le plus proche de la Lune.

du bord de la Lune.	Au milieu de Platon.	3′	11″
	Au milieu de Grimaldi.	0	46
	Au milieu de Tycho.	4	26
	Au bord le plus proche de *Mare Criſium.*	1	34
	Au *Promontorium acutum.*	8	14
	A Ariſtarque.	2	45

Diſtances des Taches entr'elles.

Entre	Platon & Grimaldi.	18′	18″
	Grimaldi & Tycho.	14	20
	Promontorium acutum & Tycho.	14	39
	Promontorium acutum & Platon.	15	17

On remarquera que nous n'avons pas pris pour le *Promontorium acutum* une petite avance claire & pointue qui eſt entre les deux Taches, mais une petite Tache claire qui en eſt proche & vers le milieu de la Lune.

Nous nous ſommes ſervis de Lunettes de 7 pieds pour faire ces obſervations, & nous avions appliqué le Micrometre à l'une de ces Lunettes.

Les Ephémérides de Mezzavacca marquent que cette Eclipſe ne ſera pas viſible à Bologne, à cauſe qu'elle arrivera à $8^h\ 9'$, ce qui doit s'entendre du milieu. Cependant ſi elle a duré $2^h\ 40'$, le commencement aura été à $6^h\ 49'$, ce qui eſt près de trois quarts d'heures plutôt que le lever du Soleil, & par conſéquent on en aura pû voir le commencement. Ce milieu réduit à Paris eſt $7^h\ 31'$.

Les Ephémérides de M. de Beaulieu marquent le milieu à Paris à $7^h\ 28'$, le commencement à $6^h\ 5'$, & la fin à $8^h\ 51$; donc la durée $2^h\ 46'$, & la grandeur de 7 doigts 29′.

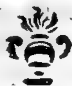
Les Ephémérides de l'Académie donnent le milieu de cette Eclipſe à $7^h\ 27'\ 53''$, le commencement à $6^h\ 6'\ 56''$, la fin à $8^h\ 48'\ 50''$, la durée $2^h\ 41'\ 54''$, & la quantité 6 doigts 21′.

Le milieu de cette Eclipſe dans ces trois Ephémérides eſt peu différent, & les deux dernieres ſont dans la même minute : il n'y a que la quantité qui eſt fort différente : car celles de M. de Beaulieu la font plus grande que les nôtres de 1 doigt 8′, ce qui eſt difficile à accorder avec ſa durée : mais ce pourroit être une faute d'impreſſion : car on auroit pû mettre $7^d\ 29'$ au lieu de 6 doigts 29′, ce qui ſemble devoir être.

Les différences conſidérables qu'on remarque à l'ombre

de la terre ſur le corps de la Lune, ne peuvent venir que de la denſité & de la figure de l'Atmoſphere plus ou moins élevée au-deſſus de la terre dans les endroits qui font l'ombre, & où le Soleil ſe leve alors pour la Lune: car les rayons qui traverſent l'Atmoſphere où ils ſe rompent, portent ſur la partie de la Lune entierement éclipſée, cette fauſſe lueur qui paroît de différentes couleurs dans différentes Eclipſes, & quelquefois dans la même. Mais comme l'ombre de la terre paroît quelquefois aſſez terminée, & quelquefois fort confuſe & inégale, il faut néceſſairement en rechercher la cauſe dans l'inégalité de l'extrémité de l'Atmoſphere qui donnera une ombre inégale; & l'Atmoſphere étant tantôt plus rare & tantôt plus denſe, détournera un peu plus ou un peu moins les derniers rayons qui la rencontrent vers cette extrémité inégale, & fera que la figure de l'ombre ne ſera point terminée, comme ſi l'Atmoſphere étoit un corps fort différent de l'Ether. Ce ſont auſſi ces rayons qui traverſant cette Atmoſphere inégale dans ſa ſuperficie, peuvent cauſer ces différentes couleurs qu'on voit dans le milieu de l'ombre.

Mais il y a encore une autre cauſe de la confuſion de l'ombre de la terre dans les Eclipſes, laquelle eſt par rapport à la partie du Soleil qui fait l'ombre, & c'eſt ce que nous appellons proprement *pénombre*, & qui devient plus denſe à proportion qu'il y a moins de parties du Soleil qui éclairent le corps, comme nous le remarquons dans les ombres de tous les corps ſur la terre, & cette pénombre ſera toujours la même par rapport à la figure du corps qui fait l'ombre. Mais cette pénombre ſe mêlant avec l'ombre inégale & confuſe de l'extrémité de l'Atmoſphere, cauſera toutes les variétés qu'on y remarque dans les Eclipſes.



OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 10 Decembre 1704.

PAR Mrs CASSINI ET MARALDI.

1704. 13. Decembre.

LE soir du 10. Decembre le ciel s'étant découvert, on mesura le passage de la Lune par le cercle horaire quatre fois depuis 6 heures & demie jusqu'à 7 heures. Il se trouva de 2 minutes 17 secondes d'heure.

La Lune ce jour là & le jour suivant retourna au méridien en 24 heures 51′, qui donnent 360^d; donc 2′ 17″ d'heure font 33′ 5″ de degrés du parallele de la Lune, qui étant réduit à un grand cercle par la déclinaison de la Lune qui étoit alors 12 degrés 16 minutes, donnent 30′ 38″ diametre de la Lune.

A 7 heures 8′ par le Micrometre, on mesura le diametre apparent de la Lune de 30′ 43″, la Lune étant élevée sur l'horison, de 30 degrés.

On observa la disposition des Taches de la Lune, & l'on trouva que le milieu de Grimaldi & la pointe de *Promontorium acutum* étoient précisément dans le diametre de la Lune qui concouroit avec la ligne de son mouvement composé à l'Occident, & que son centre apparent étoit au bord Occidental de *Sinus medius*, comme dans la Figure insérée dans le Livre de la Connoissance des Temps de cette année 1704. La disposition des autres Taches principales fut déterminée par le passage de ces Taches par le fil perpendiculaire à la trace de Lune, & par le fil incliné de 45 degrés, suivant la méthode pratiquée dans notre grande Figure de la Lune, & dans celle qui a été inférée jusqu'à présent dans la Connoissance des Temps.

On ne put pas observer le passage de la Lune par le méridien la même nuit, parce que le ciel étoit couvert. Il se

découvrit un quart-d'heure après, & pendant le reste de la nuit la Lune tantôt paroissoit, tantôt se cachoit.

Le matin suivant on voyoit la Lune dans un air trouble. Le diametre de la Lune mesuré par le Micrometre fut trouvé de $30' 21''$, moindre de 22 secondes que le soir précédent, presque à la même hauteur de la Lune sur l'horison; ce qui doit être attribué au mouvement de la Lune vers son Apogée.

A 6 heures, on voyoit la pénombre sur la Lune du côté de la Tache de Schicardus. On commença de douter du commencement de l'Eclipse à $6^h 3' 30''$.

Il fut plus évident à $6^h 4' 40''$ par une Lunette de 3 pieds.

Commencement à $6^h 5' 10''$ par une Lunette de 8 pieds.

Aux momens plus favorables, on mesura les doigts de l'Eclipse par le Micrometre.

A $6^h 10'$		Partie de la Lune éclipsée..... $0^{doigts.} 38^{min.}$
12	0	L'ombre au bord de *Mare humorum*.
14	30	Un doigt de la Lune éclipsée.
15	0	Tout *Mare humorum* couvert.
18		L'ombre à Grimaldi. On ne voit plus Tycho.
20	40	Deux doigts éclipsés.
26	0	Deux doigts & demi d'éclipsés.
30		Deux doigts 44'.
34	40	Trois doigts & demi.
39		Trois doigts 55'.
39	40	Quatre doigts.
49	20	Quatre doigts 55'.
50	20	Cinq doigts.
56	0	Cinq doigts 23'.
59	20	Cinq doigts 49'.
à $7^h 2'$	$0''$	Six doigts.
10	0	Six doigts 6'.

Dans ces quatre dernieres observations on voyoit assez distinctement le terme de l'ombre. La Lune se cacha ensuite & ne parut plus.

REMARQUES

Sur les nombres Quarrés, Cubiques, Quarrés-Quarrés, Quarrés-Cubiques, & des autres degrés à l'infini.

PAR M. DE LA HIRE.

PROPOSITION PREMIERE.

TOut nombre Quarré joint à sa racine fait un nombre pair ou binaire.

Le quarré est pair ou impaire; s'il est pair, sa racine est aussi paire, & par conséquent la somme du pair du quarré & du pair de la racine sera aussi un nombre pair ou binaire: mais s'il est impair, sa racine sera impaire; donc l'impair du quarré joint à l'impair de sa racine fait un nombre pair ou binaire. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION II.

Tout nombre Cubique est plus grand que son prochain Cubique inférieur, ou dont la racine est moindre que la sienne d'une unité, d'un nombre senaire & divisible par 6, & de plus d'une unité.

On sait que tout nombre Cubique, dont la racine est plus grande que celle de son prochain inférieur, de l'unité, est plus grand que l'inférieur, de trois fois le quarré de la racine de l'inférieur plus trois fois la racine du même, & de plus d'une unité. Mais par la Proposition I. un nombre quarré plus sa racine est un nombre binaire, dont le triple de cette somme sera un nombre senaire ou divisible par 6; car il doit être binaire & ternaire, & il n'y a point de nombre plus petit que 6 qui soit l'un & l'autre, & de plus il y a l'unité.

Par exemple, le Cube 125 a pour sa racine le nombre 5, & le Cube immédiatement inférieur 64 a le nombre 4 pour sa racine: la différence de ces deux Cubes doit être

trois fois le quarré de 4 qui eſt 16, plus trois fois ſa racine 4, ce qui ſera 60, plus l'unité, ce qui eſt 61 : mais 60 eſt un nombre diviſible par 6. Donc 61 eſt diviſible par 6, & il reſte l'unité.

PROPOSITION III.

Maintenant ſi au lieu de prendre deux Cubes dont les racines ſoient ſeulement différentes d'une unité, qu'on en prenne deux dont les racines different de pluſieurs unités, comme les Cubes de 4 & de 7.

Je dis que la différence des deux Cubes ſera encore diviſible par 6, & qu'il reſtera 3 unités après la diviſion, c'eſt-à-dire autant d'unités qu'il y en a dans la différence des racines.

Car par la Propoſition II. la différence du Cube de 4 au Cube de 5 ſon prochain ſupérieur, ſera diviſible par 6, & il reſtera une unité. De même la différence du Cube de 5 au Cube de 6 ſon prochain ſupérieur, ſera auſſi diviſible par 6, & il reſtera une unité; & enfin la différence du Cube de 6 au Cube de 7 ſera diviſible par 6, & il reſtera une unité; donc les trois différences ſont diviſibles par 6, & il reſtera trois unités qui ſont les trois reſtes.

Comme le Cube de 4 eſt 64, le Cube de 7 eſt 343 : la différence des deux Cubes eſt 279, qui eſt diviſible par 6, & il reſte 3.

Ce ſera la même choſe pour tous les autres Cubes.

PROPOSITION IV.

On voit par la Propoſition précédente, que ſi les racines des Cubes ſont différentes entr'elles de 6 unités, alors leur différence ſera diviſible par 6 exactement.

Car il devroit y avoir 6 unités reſtantes, qui ſont le nombre diviſeur 6.

PROPOSITION V.

Tout nombre Cubique étant donc propoſé, ſi l'on en ôte un nombre Cubique tel qu'on voudra, & que le reſte ſoit diviſé par 6, les unités reſtantes étant jointes à la racine du Cube ôté, donneront la racine du Cube propoſé, ſi elle eſt moindre que la ſomme de 6 plus la racine du Cube ôté, ou

bien en y ajoûtant 6 ou un multiple de 6, si elle est plus grande.

Cette Proposition est évidente par les précédentes.

PROPOSITION VI.

Il s'ensuit donc de la Proposition précédente, que si d'un nombre Cubique on en ôte o consideré ici comme premier Cube ôté, le reste qui sera le nombre Cubique proposé étant divisé par 6, il restera après la division un nombre qui sera la racine du Cube proposé, si la racine de ce Cube est moindre que 6; mais si elle est plus grande il faudra ajouter 6 ou un multiple de 6 à ce reste.

Cette Proposition ne differe point de la précédente: car o qui a aussi o pour sa racine, est pris pour le Cube ôté.

PROPOSITION VII.

On peut par la même méthode trouver la même chose pour tout autre nombre que pour le Cubique. Comme pour le Quarré-quarré on trouvera qu'il ne faut le diviser que par 2: pour le quarré Cubique qu'il faut le diviser par 10: pour le Quarré-quarré Cubique qu'il faut le diviser par 14, & ainsi des autres nombres des puissances supérieures.

On aura toujours dans quelque puissance que ce soit le moindre diviseur du nombre ajouté à cette puissance pour faire la supérieure, laquelle ait sa racine plus grande d'une unité par la regle suivante.

REGLE.

Toutes les puissances proposées dont l'exposant est pair, auront toutes pour leur diviseur le binaire ou le nombre 2, comme le Quarré, le Quarré-quarré, le Cube-cube, &c. Mais celles dont l'exposant est pair de la progression double, comme 2, 4, 8, 16, 32, &c. & au-dessus de 4, auront pour diviseur le nombre 4.

Mais toutes les puissances dont l'exposant est nombre premier au-dessus de 2, auront toujours pour leur diviseur le double de l'exposant de la puissance: comme pour le Cube qui a 3 pour exposant de sa puissance, on aura 6 pour diviseur: pour le Quarré-cube qui a 5 pour son exposant,

posant, on aura 10 pour son diviseur : pour le Quarré-quarré-cube qui a 7 pour son exposant, on aura 14 pour son diviseur, & ainsi des autres.

Toutes les autres puissances dont l'exposant est impair, n'auront que 2 pour diviseur, à moins qu'elles ne soient nombres quarrés ; car alors elles se réduisent au nombre de leur racine, comme la 25e puissance a le même diviseur que la 5e, la 9e que la 3e, &c.

LEMME I.

Toutes les puissances d'une même racine numérique multipliées par différens nombres, contiennent chacune autant de fois le nombre multipliant, qu'il y a d'unités dans la puissance.

Cela est évident.

LEMME II.

Le plus grand diviseur commun de différentes puissances d'une même racine multipliées par différens nombres, sera le plus grand diviseur commun des nombres multiplians.

Car puisque la commune mesure sera dans les multiplians par le Lemme précédent, la commune mesure se trouvera aussi dans les produits des puissances par les nombres multiplians, & elle les mesurera exactement.

LEMME III.

Si l'on joint ensemble deux puissances différentes de la même racine, lesquelles soient multipliées par un même nombre ; le nombre sera aussi autant de fois dans la somme des puissances qu'il y aura d'unités dans cette somme.

Ce qui est évident.

DE'MONSTRATION.

Soit proposé la puissance de *6* dimensions ou dont l'exposant est *6* ; & que la racine soit appellée r, & la racine de la même puissance plus l'unité soit $r + 1$, la différence de ses deux puissances sera

$$6r^5 + 15r^4 + 20r^3 + 15rr + 6r + 1.$$

Ayant retranché l'unité de cette différence, on trouvera les termes $6r^5$, $6r$, & $15r^4$, $15rr$, qui sont affectés

des mêmes nombres 6 & 15, il restera encore $20 r$: il faut donc par les Lemmes précédens chercher le plus grand diviseur commun des trois nombres 6, 15, 20, mais on trouve qu'il n'y a que l'unité. Donc si la racine est paire, l'unité est le commun diviseur qui sera un binaire.

Mais si la racine est impaire, la somme des deux impairs $6 r^5$ & $6 r$ sera un nombre pair, & de même la somme des deux autres $15 r^4$ & $15 rr$; mais les r^3 étant un nombre impair, si on divise en 2 les $20 r^3$, on aura $10 r^3$ qui seront aussi un pair : mais les trois nombres 6, 15, 10 n'ont point non plus de commune mesure que l'unité, & par conséquent cette unité est paire, & le nombre diviseur cherché ne peut être que le nombre 2 ou le binaire.

Si l'on propose une puissance de 7 dimensions, on aura pour la différence

$$7 r^6 + 21 r^5 + 35 r^4 + 35 r^3 + 21 rr + 7 r + 1.$$

Et en ayant ôté l'unité, on trouvera que la commune mesure des nombres qui multiplient les puissances de la racine, sera le nombre 7; & par les raisons rapportées ci-devant, soit que la racine soit paire ou impaire, le nombre sera toujours pair, & par conséquent il faudra doubler 7 qui fera 14 pour le diviseur cherché.

Voici un exemple de la 17[e] puissance, dans laquelle il ne faut avoir égard qu'aux nombres qui multiplient les différens degrés de r, & qui seront 17, 136, 680, 2380, 6188, 12376, 19448, 24310, & les autres qui sont les mêmes répétés en descendant jusqu'à l'unité, & tous ces nombres sont divisibles par 17, dont le double est 34, qui sera le diviseur de cette puissance, suivant ce qui a été expliqué ci-devant.

Il est toujours très-facile de trouver tous ces nombres multiplians dans l'ordre de toutes les puissances de suite : car ils seront chacun égaux à la somme du supérieur immédiatement, & de celui qui le précede.

MEMOIRE SUR LES COMBINAISONS.

PAR LE R. P. SEBASTIEN TRUCHET.

DAns le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orleans par ordre de ſon Alteſſe Royale, je trouvai dans un Château nommé la Motte S. Lyé à 4 lieues en-deçà d'Orleans, pluſieurs Carreaux de fayence quarrés & mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étoient deſtinés à carreler une Chapelle & pluſieurs autres appartemens. Pour pouvoir former des deſſeins & des figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manieres deux de ces Carreaux pourroient ſe joindre enſemble, en les diſpoſant toujours en échiquier.

Je trouvai qu'il y avoit 64 manieres différentes de ranger deux de ces carreaux, qui font 64 combinaiſons, ce qui paroît ſurprenant : car deux lettres ou deux chiffres ne ſe combinent ordinairement que deux fois, parce qu'ils ne changent de ſituation que pour être mis l'un après l'autre dans une ligne, la baſe demeurant toujours la même : mais dans l'arrangement de deux Carreaux, l'un des deux peut prendre quatre ſituations différentes, dans chacune deſquelles l'autre Carreau peut changer 16 fois, ce qui donne les 64 combinaiſons que nous avons figurées & cottées dans la premiere Table ſuivante, dont l'explication eſt à côté. *Voyez la 1. Table.*

Nous avons trouvé enſuite qu'il y avoit des figures ſemblables dans ces 64 combinaiſons, & que l'on pouvoit les réduire à 32 figures différentes, parce que chaque figure eſt répétée deux fois dans la même ſituation, & que les deux figures ne ſont différentes l'une de l'autre que par la tranſpoſition du Carreau le plus ombré, comme on le peut voir dans la ſeconde Table, où elles ſont toutes figurées deux à deux, & cottées des mêmes chiffres qu'elles ont dans la premiere Table. *Voyez la 2. Planche.*

Nous avons encore trouvé que ces 32 figures différentes ſe peuvent réduire à 10 ſemblables, ſi l'on n'a pas d'égard à leur ſituation & au même point de vûe, & que les figures ſemblables ne different que par leur poſition différente ſur leurs quatre côtés; comme on le peut voir dans la troiſieme Table de la ſeconde Planche, où elles ſont figurées & cottées de ſuite des mêmes chiffres qu'elles ont dans la premiere & ſeconde Table.

2. *Planche.*

Après avoir examiné les combinaiſons de deux Carreaux, on pourroit mettre ici les combinaiſons que l'on pourroit faire avec 3, 4, 5, &c. & pluſieurs Carreaux: mais comme ce détail ſera long, & que nous ne ſommes pas encore content de ce que nous avons fait là-deſſus, nous remettrons cet article à un autre Mémoire.

Nous avons conſulté les Livres de l'Architecture civile, & ceux qui traitent des combinaiſons, pour nous aſſurer ſi quelqu'un avoit déja fait les mêmes remarques que nous: mais nous n'y avons rien trouvé qui en approchât.

Nous avons cherché enſuite à former des deſſeins & des compartimens avec ces figures jointes enſemble, & toujours en échiquier; & nous en avons trouvé une trop grande quantité, pour les rapporter tous: nous en avons choiſi ſeulement un cent que nous avons mis au net, afin que chacun puiſſe juger par ſes yeux de la vérité de ce que nous avons dit, & de la fécondité de ces combinaiſons dont l'origine eſt pourtant ſimple.

On n'a gravé dans ces Mémoires que 30 de ces deſſeins, pour ne point trop groſſir le volume. L'explication de chaque deſſein eſt à côté, avec la maniere de les conſtruire par la premiere Table, qui ſert comme d'un Dictionnaire pour trouver les combinaiſons dont on s'eſt ſervi pour les former. Ils ſont tous conſtruits par l'arrangement de deux Carreaux pris enſemble, & placés dans l'ordre que nous avons marqué à côté de chaque Planche.



TABLE.I.

ns de deux Carreaux mipartis de deux couleu

D
A C
B

A
B D
C

B
C A
D

17 20
B
18 19

33 36
C
34 35

49 52
D
50 51

21 24
B
22 23

37 40
C
38 39

53 56
D
54 55

25 28
B
26 27

41 44
C
42 43

57 60
D
58 59

29 32
B
30 31

45 48
C
46 47

61 64
D
62 63

Lud. Simonneau 1704

TABLE. I.

Des 64. combinaisons de deux Carreaux mipartis de deux couleurs.

C D B A — D A C B — A B D C — B C A D

1 4 A 2 3 — 17 20 B 18 19 — 33 36 C 34 35 — 49 52 D 50 51

5 8 A 6 7 — 21 24 B 22 23 — 37 40 C 38 39 — 53 56 D 54 55

9 12 A 10 11 — 25 28 B 26 27 — 41 44 C 42 43 — 57 60 D 58 59

13 16 A 14 15 — 29 32 B 30 31 — 45 48 C 46 47 — 61 64 D 62 63

EXPLICATION DE LA I. TABLE.

Des 64 combinaiſons de deux Carreaux mipartis de deux couleurs.

ON a figuré dans cette Planche les 64 combinaiſons que l'on peut faire avec deux Carreaux mipartis en couleur par leur diagonale.

Cette Planche eſt diviſée en 4 colonnes de haut en bas: chaque colonne eſt partagée en cinq quarrés. Dans le premier quarré de chaque colonne on a figuré en grand un ſeul Carreau, qui eſt différemment ſitué dans chacune, comme on le peut voir par les 4 lettres *ABCD*, qui marquent toujours les mêmes côtés de chaque Carreau; ſavoir, *AD* les deux côtés colorés, & *BC* les deux côtés blancs, enſorte que dans tous les quarrés de la premiere colonne le Carreau le plus ombré eſt toujours comme appuyé horizontalement ſur le côté *A*.

Dans la ſeconde colonne il eſt ſur le côté *B*, ſur le côté *C* dans la troiſieme, & ſur le côté *D* dans la quatrieme colonne.

Dans les quatre quarrés qui achevent la premiere colonne, & qui ont la lettre *A* au centre, on a figuré les 16 combinaiſons qui ſe peuvent faire avec 2 Carreaux, l'un deſquels, qui eſt le plus ombré, demeure toujours horiſontal ſur le côté *A*: on l'a coloré d'une teinte plus forte pour le diſtinguer de celui qui change de ſituation.

On a ſuivi le même ordre dans les trois autres colonnes: les quarrés de chacune ſont marqués d'une même lettre, comme de *B* dans la ſeconde, de *C* dans la troiſieme, & de *D* dans la quatrieme colonne.

Dans chaque colonne on a ſéparé les combinaiſons de quatre en quatre, pour éviter la confuſion.

EXPLICATION DE LA II. TABLE.

De la réduction des 64 combinaisons à 32 figures.

CEtte Table a été faite pour faire voir la réduction des 64 combinaisons de la premiere Table à 32 figures, qui paroissent semblables & dans la même situation.

Elle est partagée d'abord en deux grandes colonnes de 16 lignes chacune.

Chaque colonne est subdivisée en 4 autres, dont la premiere marque le nombre des réductions : la seconde marque les mêmes chiffres que les figures semblables ont dans la premiere Table : la troisieme & quatrieme colonne marquent les deux mêmes figures, qui ne sont différentes que par la transposition du Carreau le plus ombré.

La seconde grande colonne n'est différente de la premiere, que parce que l'on a mis à la derniere colonne les nombres qui marquent les réductions.

EXPLICATION DE LA III. TABLE.

CEtte troisieme Table montre que l'on peut encore réduire les 32 figures de la seconde Table à 10 figures qui sont semblables, mais qui sont situées de 4 manieres différentes, comme on le peut voir dans chaque ligne qui contient d'abord le chiffre de la réduction, ensuite les chiffres des combinaisons semblables, & enfin les figures de ces mêmes combinaisons situées & contournées comme elles le sont dans la premiere Table.



TABLE II.

binaisons a 32. figures qui paroissent semblables.

e	1	3	la 21.e et la 47.me	21	47	17
e	2	4	la 22.e et la 48.me	22	48	18
e	5	31	la 23.e et la 45.me	23	45	19
ne	6	32	la 24.e et la 46.me	24	46	20
ne	7	29	la 25.e et la 59.me	25	59	21
ne	8	30	la 26.e et la 60.me	26	60	22
ne	9	43	la 27.e et la 57.me	27	57	23
ne	10	44	la 28.e et la 58.me	28	58	24
ne	11	41	la 33.e et la 35.me	33	35	25
ne	12	42	la 34.e et la 36.me	34	36	26
ne	13	55	la 37.e et la 63.me	37	63	27
ne	14	56	la 38.e et la 64.me	38	64	28
ne	15	53	la 39.e et la 61.me	39	61	29
ne	16	54	la 40.e et la 62.me	40	62	30
e	17	19	la 49.e et la 51.me	49	51	31
ne	18	20	la 50.e et la 52.me	50	52	32

TABLE III.

fig. a 10 seulement, mais differament situées.

3 · 35	50 · 52	1 3 18 20 33 35 50 52
4 · 36	49 · 51	2 4 17 19 34 36 49 51
9 · 61	24 · 46	5 31 16 54 39 61 24 46
0 · 62	21 · 47	6 32 13 55 40 62 21 47
7 · 63	22 · 48	7 29 14 56 37 63 22 48
8 · 64	23 · 45	8 30 15 53 38 64 23 45
		9 43 28 58
		10 44 25 59
		11 41 26 60
		12 42 27 57

Mem. de l'Acad. 1704. p. 366 Pl. 13

TABLE II.

Reduction des 64. combinaisons a 32. figures qui paroissent semblables.

1	la 1.re et la 3.me	1 3	la 21.e et la 47.me	21 47	17
2	la 2.e et la 4.me	2 4	la 22.e et la 48.me	22 48	18
3	la 5.e et la 31.me	5 31	la 23.e et la 45.me	23 45	19
4	la 6.e et la 32.me	6 32	la 24.e et la 46.me	24 46	20
5	la 7.e et la 29.me	7 29	la 25.e et la 59.me	25 59	21
6	la 8.e et la 30.me	8 30	la 26.e et la 60.me	26 60	22
7	la 9.e et la 43.me	9 43	la 27.e et la 57.me	27 57	23
8	la 10.e et la 44.me	10 44	la 28.e et la 58.me	28 58	24
9	la 11.e et la 41.me	11 41	la 33.e et la 35.me	33 35	25
10	la 12.e et la 42.me	12 42	la 34.e et la 36.me	34 36	26
11	la 13.e et la 55.me	13 55	la 37.e et la 63.me	37 63	27
12	la 14.e et la 56.me	14 56	la 38.e et la 64.me	38 64	28
13	la 15.e et la 53.me	15 53	la 39.e et la 61.me	39 61	29
14	la 16.e et la 54.me	16 54	la 40.e et la 62.me	40 62	30
15	la 17.e et la 19.me	17 19	la 49.e et la 51.me	49 51	31
16	la 18.e et la 20.me	18 20	la 50.e et la 52.me	50 52	32

TABLE III.

Reduction des 32. fig. a 10 seulement, mais differament situées

1	1 3	18 20	33 35	50. 52	1 3 18 20 33 35 50 52
2	2 4	17 19	34 36	49. 51	2 4 17 19 34 36 49 51
3	5 31	16. 54	39 61	24. 46	5 31 16 54 39 61 24 46
4	6 32	13 55	40 62	21 47	6 32 13 55 40 62 21 47
5	7 29	14 56	37 63	22 48	7 29 14 56 37 63 22 48
6	8 30	15 53	38 64	23. 45	8 30 15 53 38 64 23 45
7	9 43	28 58			9 43 28 58
8	10 44	25 59			10 44 25 59
9	11 41	26. 60			11 41 26 60
10	12. 42	27. 57			12 42 27 57

CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS de la premiere Planche.

AVIS GENERAL.

Pour construire tous les Desseins qu'on a figurés dans cette Planche & dans les suivantes, il faut avoir recours à la premiere Table des 64 combinaisons, dans laquelle toutes les combinaisons dont on s'est servi sont cottées par des chiffres, & prendre celles qu'on a marquées pour former chaque rang des Desseins, & les mettre de suite de gauche à droit comme on met les lettres dans chaque ligne d'écriture ordinaire.

Le premier Dessein marqué *A*

Est construit avec la seconde combinaison répétée de suite, & recommencée à chaque rang.

Le second Dessein marqué *B*

Est formé en faisant une premiere rangée entiere avec la seconde combinaison, puis une seconde rangée avec la 34e. Ces deux rangées répétées font tout le Dessein.

Le troisieme Dessein marqué *C*

Se fera en formant alternativement une 1re rangée avec la 12e combinaison, & une seconde avec la 10^e^

Le quatrieme Dessein marqué *D*

Se forme alternativement d'une 1re rangée de la 6e combinaison répétée de suite, & d'une seconde rangée de la 40e répétée de même.

Le cinquieme Dessein marqué *E*

Se construit ainsi. On fait un 1^r^ rang avec les 2 combinaisons 24 & 14 mises alternativement; un second rang avec la 22 & la 16e aussi alternées; un 3e rang avec les 2 combinaisons du premier, mais en mettant la 14 avant la 24; & enfin le 4e rang, comme le second, en renversant l'ordre, & en mettant la 16e avant la 22e.

Le sixieme Dessein marqué *F*

Se fait en mettant alternativement au 1^r^ rang la 24e combinaison répétée de suite, & au second rang la 16e répétée de même.

CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS de la seconde Planche.

LE premier Deſſein marqué *G*

Se fait avec la 42me combinaiſon répétée de ſuite dans le premier rang, & avec la 10me répétée de même dans le ſecond : Le 3me rang ſe fait comme le ſecond ; le 4me & le 5me rang, comme le premier.

Le ſecond Deſſein marqué *H*

Eſt fait avec les trois combinaiſons 28, 26 & 50 miſes de ſuite dans le premier rang ; puis avec les 26, 50 & 28 miſes de même dans le ſecond ; & enfin avec les 50, 28 & 26 de ſuite dans le troiſieme rang.

Le troiſieme Deſſein marqué *I*

Se conſtruit avec les 2 combinaiſons 10 & 12 miſes de ſuite dans le premier rang, & avec les 12 & 10 miſes auſſi de ſuite dans le ſecond & troiſieme rang.

Le quatrieme Deſſein marqué *L*

Se forme avec la 14me combinaiſon répétée de ſuite dans le premier rang, & avec les 2 combinaiſons 40e & 8e miſes de ſuite dans le ſecond ; puis avec les 38e & 6e miſes auſſi de ſuite dans le troiſieme ; & enfin avec la 22e répétée de ſuite dans le quatrieme rang.

Le cinquieme Deſſein marqué *M*

Eſt fait avec la combinaiſon 24e répétée de ſuite dans le premier rang, & avec la 22e répétée de même dans le ſecond.

Le ſixieme Deſſein marqué *N*

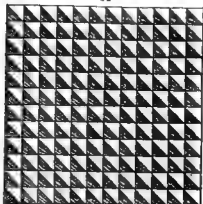
Se fait avec les combinaiſons 6e & 38e miſes enſemble & de ſuite dans le premier rang, avec la 40e & la 8e miſes de même dans le ſecond, avec la 38e & la 6e rangées de même dans le troiſieme, & enfin avec la 8e & la 40e dans le quatrieme rang.

CONSTRUCTION

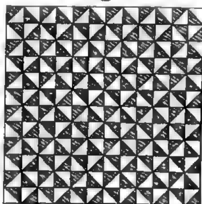
Pl. 14

Premiere planche des desseins.

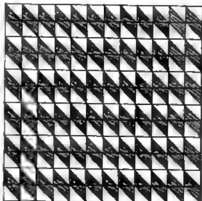
A



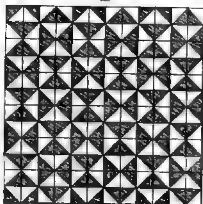
D



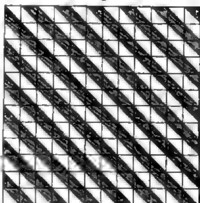
B



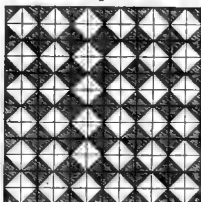
E



C

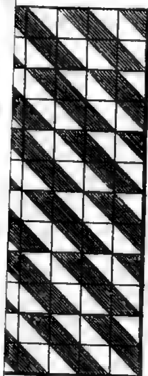


F

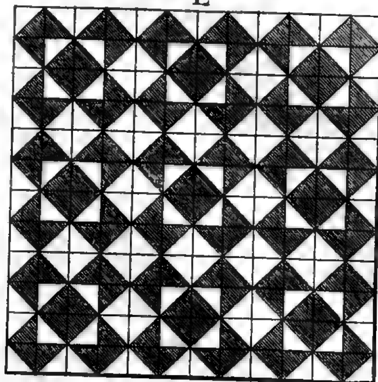


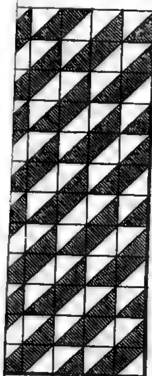
Lud. Simonneau 1714

nde Planche des desseins

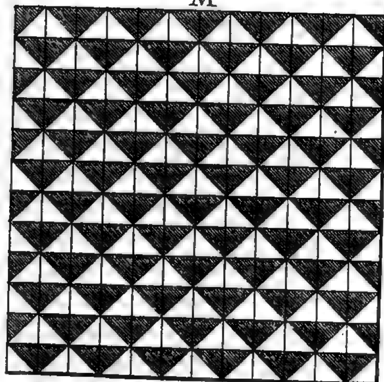


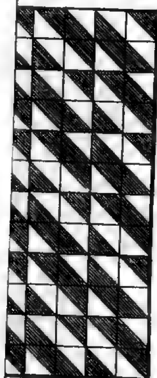
L



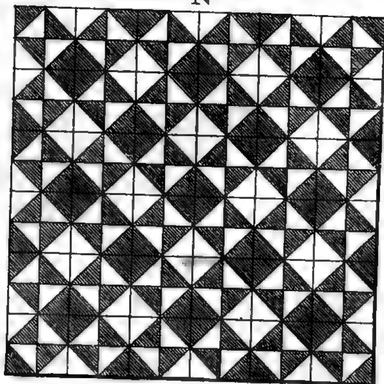


M



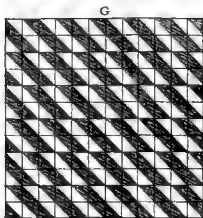


N

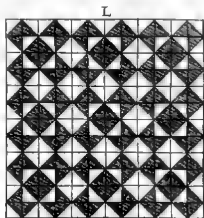


Seconde Planche des desseins

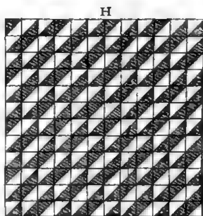
G



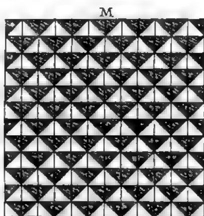
L



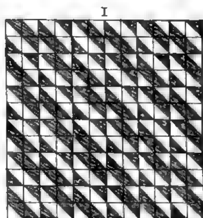
H



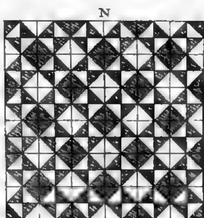
M



I



N



CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS de la troisieme Planche.

LE premier Dessein marqué *O*
se fait avec les deux combinaisons 14e & 24e mises ensemble & répetées de suite dans le premier rang, & avec les mêmes dans un ordre renversé dans le second, c'est-à-dire, en commençant par la 24e.

Le second Dessein marqué *P*
est fait avec la 24e combinaison répetée de suite dans le premier rang, & avec la 14e répetée de même dans le second.

Le troisieme Dessein marqué *Q*
se forme avec la 50e & la 2e mises ensemble & répetées de suite dans le premier rang, & avec la 18e & la 34e mises de même dans le second.

Le quatrieme Dessein marqué *R*
se fait avec la 14e combinaison répetée de suite en chaque rang.

Le cinquieme Dessein marqué *S*
se fait avec la 14e & la 24e mises ensemble & répetées de suite dans chaque rang.

Le sixieme Dessein marqué *T*
se fait avec la 28e & la 12e mises ensemble & répetées de suite : tous les rangs se font de la même maniere.



CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS de la quatrieme Planche.

LE premier Deſſein marqué *V*
eſt composé avec les combinaiſons 10, 14, 10 & 6ᵉ miſes & répétées de ſuite au 1ʳ rang, puis avec les 16, 12, 8 & 12ᵉ répétées de même au ſecond, enſuite avec les 14, 10, 6, 10ᵉ, rangées de même au 3ᵉ; avec les 12, 8, 12 & 16ᵉ dans le 4ᵉ; avec les 10, 6, 10 & 14ᵉ dans le 5ᵉ; avec les 8, 12, 16 & 8ᵉ dans le 6ᵉ; avec les 6, 10, 14 & 10ᵉ dans le 7ᵉ; & enfin avec les 12, 16, 12 & 8 pour le 8ᵉ rang.

Le ſecond Deſſein marqué *U*
ſe forme en faiſant un 1ʳ rang avec les deux combinaiſons 28 & 12ᵉ miſes de ſuite, un ſecond avec la 14ᵉ & la 22ᵉ auſſi de ſuite, un 3ᵉ avec la 12ᵉ & 28ᵉ, & un 4ᵉ enfin avec la 22ᵉ & la 14ᵉ.

Le troiſieme Deſſein marqué *X*
ſe fait avec les combinaiſons 10, 14 & 12ᵉ répétées de ſuite dans le 1ʳ rang; avec les 22, 34 & 2ᵉ de ſuite dans le ſecond; avec les 14, 12 & 10ᵉ dans le 3ᵉ; avec les 34, 2 & 22ᵉ dans le 4ᵉ; avec les 12, 10 & 14ᵉ pour le 5ᵉ; & enfin avec les 2, 22 & 34ᵉ pour le 6ᵉ rang.

Le quatrieme Deſſein marqué *Y*
eſt fait avec les 2 combinaiſons 28 & 12ᵉ miſes & répétées de ſuite dans le 1ʳ rang; avec les 26 & 10ᵉ de même dans le ſecond; avec les 10 & 26ᵉ dans le 3ᵉ; & enfin avec les 12 & 28ᵉ miſes & répétées de même dans le 4ᵉ rang.

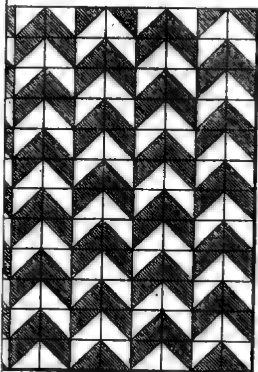
Le cinquieme Deſſein marqué *Z*
ſe fait avec les 2 combinaiſons 24 & 16ᵉ miſes enſemble & répétées de ſuite dans le 1ʳ rang, puis avec les 26 & 10ᵉ miſes de même dans le ſecond rang.

Le ſixieme Deſſein marqué *&*
ſe forme avec les 2 combinaiſons 28 & 10ᵉ miſes enſemble & répétées ainſi dans le 1ʳ rang; avec les 26 & 12ᵉ dans le ſecond; avec les 12 & 26ᵉ dans le 3ᵉ; & enfin avec les 10 & 28ᵉ rangées de même dans le 4ᵉ rang.

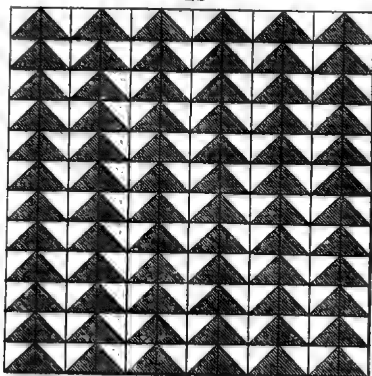
Mem. de l'Acad. 1704. p. 369. Pl. 16

Troisiéme Planche

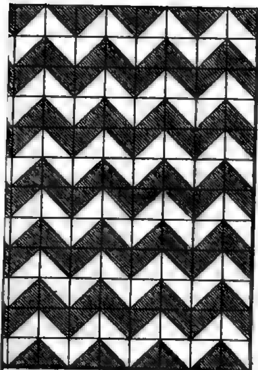
O



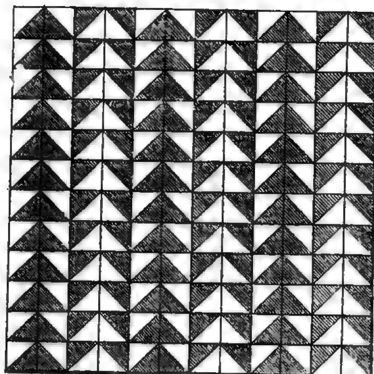
R



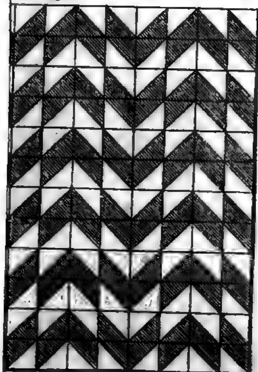
P



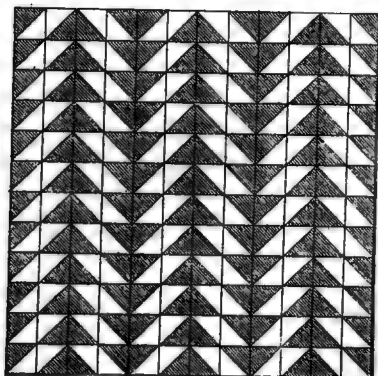
S



Q



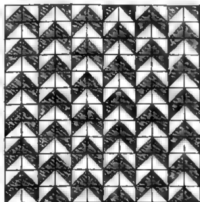
T



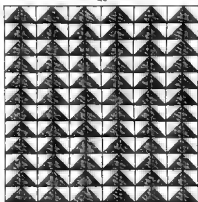
Lud. Simonneau

Troisième Planche

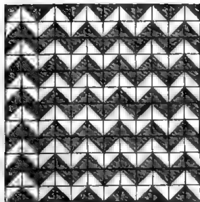
O



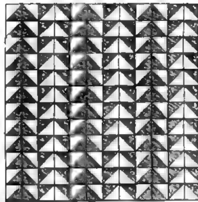
R



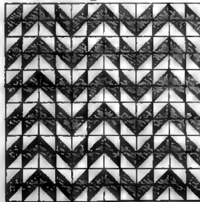
P



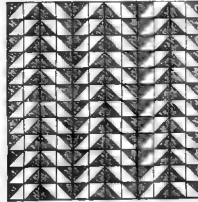
S



Q



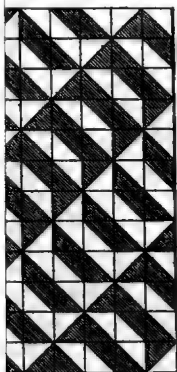
T



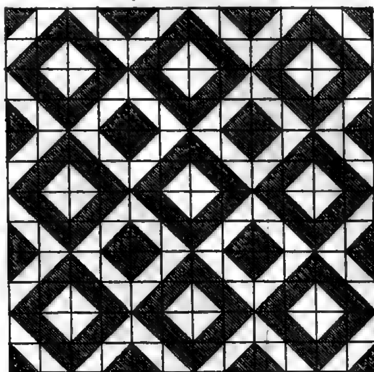
Lud. Simonneau

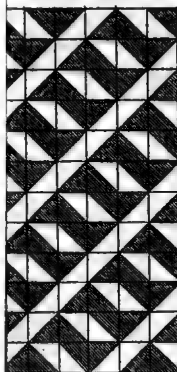
Mem. de l'Acad. 1704. p. 370. Pl. 17

Quatrieme Planche

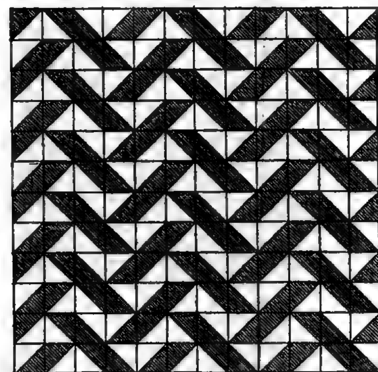


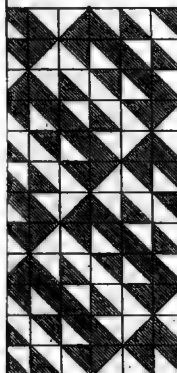
Y



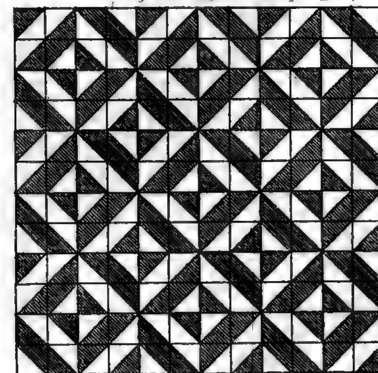


Z



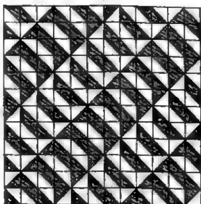


&

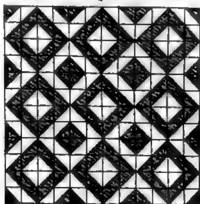


Quatrieme Planche

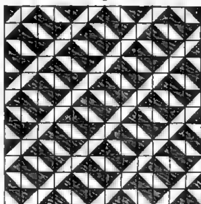
V



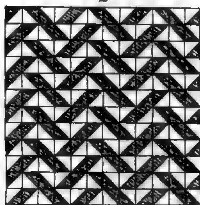
Y



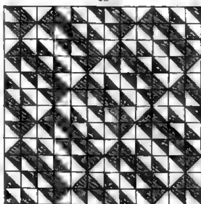
U



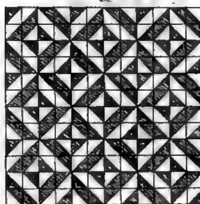
Z



X



&



Lud Simonneau

CONSTRUCTION DES DEUX DESSEINS de la cinquieme Planche.

LE premier Deſſein marqué 1 eſt conſtruit de cette maniere. On forme le premier rang avec la 12e combinaiſon répétée deux fois de ſuite & avec la 28 répétée de même, & ainſi en continuant alternativement pour le 1r rang : le ſecond ſe fait avec les deux combinaiſons 28 & 12 répétées chacune deux fois de ſuite en continuant alternativement : le 3e ſe fait avec la 26 & la 10e répétées chacune deux fois de ſuite: le 4e ſe fait comme le ſecond rang : le 5e eſt formé comme le 3e : le ſixieme avec la 10 & 26e répétées deux fois chacune, comme nous avons dit : le 7e avec la 12 & la 28 répétées chacune deux fois de ſuite : le 8e ſe forme de la même maniere que le 6e rang,

Le ſecond Deſſein marqué 2 ſe forme en mettant au premier rang une fois la 14e combinaiſon, & une fois la 22e, puis 2 fois de ſuite la 14e ; & ainſi de ſuite : le ſecond rang ſe fait avec les 3 combinaiſons 12, 16 & 28 miſes de ſuite & répétées dans le même ordre : le 3e rang ſe fait avec les 3 combinaiſons 10, 24 & 26e miſes & répétées de même : le 4e rang avec les trois combinaiſons 26, 16 & 10e de ſuite & répétées comme aux autres rangs : le 5e avec les 3 combinaiſons 28, 24, & 12e miſes de même : le 6e rang ſe fait en mettant d'abord la 22 & la 14e chacune une fois, puis deux fois de ſuite la 22e, & en continuant de la même maniere on acheve tout le Deſſein.



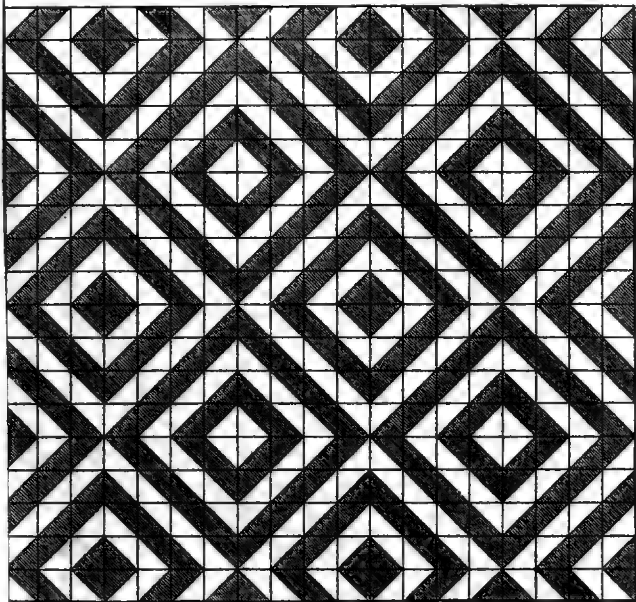
CONSTRUCTION DES DEUX DESSEINS de la sixieme Planche.

LE premier Deſſein marqué 3 ſe forme en mettant dans le premier rang la 24e combinaiſon deux fois de ſuite, puis la 12e, la 14e & la 28e chacune une fois de ſuite : le ſecond rang avec la 14e miſe deux fois; puis la 10e, la 22e & la 26e chacune une fois : le 3e rang eſt fait en mettant deux fois la 24e, puis la 12, la 16 & la 28^e une fois chacune : le 4e rang en mettant la 8, la 40, la 28, la 24 & la 12e chacune une fois : le 5e ſe forme avec la 6, la 38, la 12, la 16 & la 28e miſes de ſuite chacune une fois : le 6e ſe fait avec la 16e miſe deux fois, la 28, la 24 & la 12e chacune une fois : le 7e rang avec la 22e répétée deux fois, puis la 26, la 14 & la 10e chacune une fois : le 8e ſe fait avec la 16e miſe deux fois, puis la 28, la 22 & la 12e chacune une fois : le 9e en mettant la 22e deux fois, & la 14e 3 fois de ſuite : enfin le 10e rang ſe forme avec la 14e miſe deux fois, & avec la 22e miſe trois fois de ſuite.

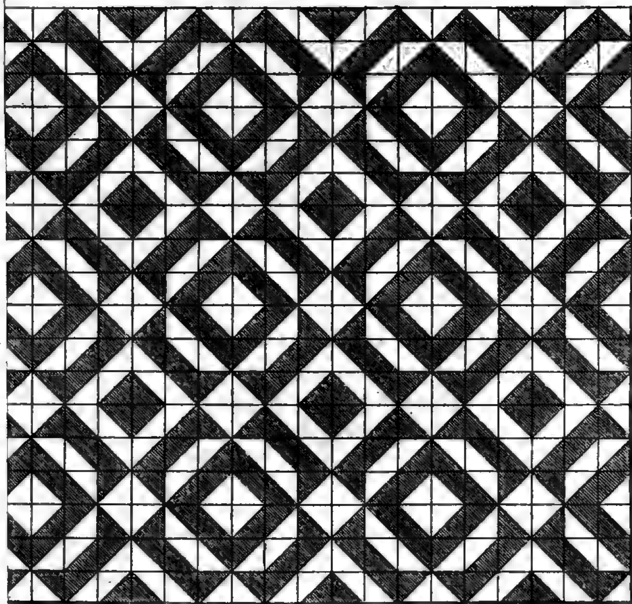
Le ſecond Deſſein marqué 4 ſe range ainſi. Mettez une fois la 28e combinaiſon, puis 2 fois la 12e, une fois la 22e, & enfin une fois la 28e, & ainſi de ſuite pour le premier rang : le ſecond ſe fait avec la 26e une fois, la 10e deux fois, la 22e & la 26e chacune une fois : le 3e rang, avec la 18, la 34, la 12, la 16 & la 28^e chacune une fois : le 4^e, avec la 28, la 12, la 10, la 22 & la 26^e chacune une fois : le 5^e, avec la 12, la 28, la 26, la 14 & la 10^e une fois chacune : le 6^e, avec la 2, la 50, la 28, la 24 & la 12^e miſes une fois chacune : le 7^e, avec la 10^e une fois, la 26^e deux fois, la 14 & la 10e une fois chacune : le 8e, avec la 12e une fois, la 28e deux fois, la 14 & la 12e une fois chacune : le 9e, avec la 10, la 26, la 50, la 24 & la 2e une fois chacune : enfin le 10e rang ſe fait avec les 26, 10, 34, 16 & 18emes combinaiſons miſes chacune une fois.

Cinquième Planche

1



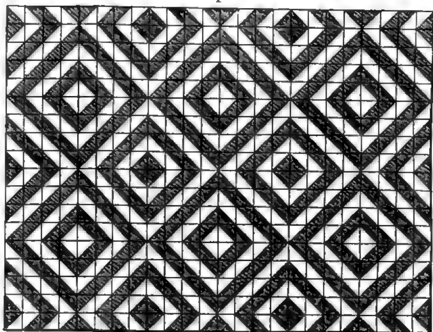
2



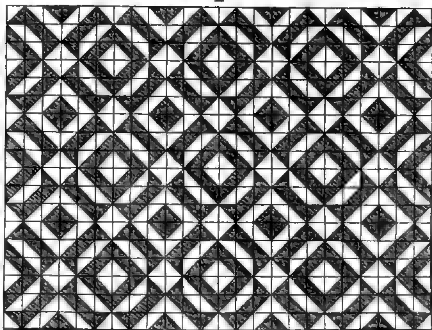
Lud. Simonneau

Cinquieme Planche

1



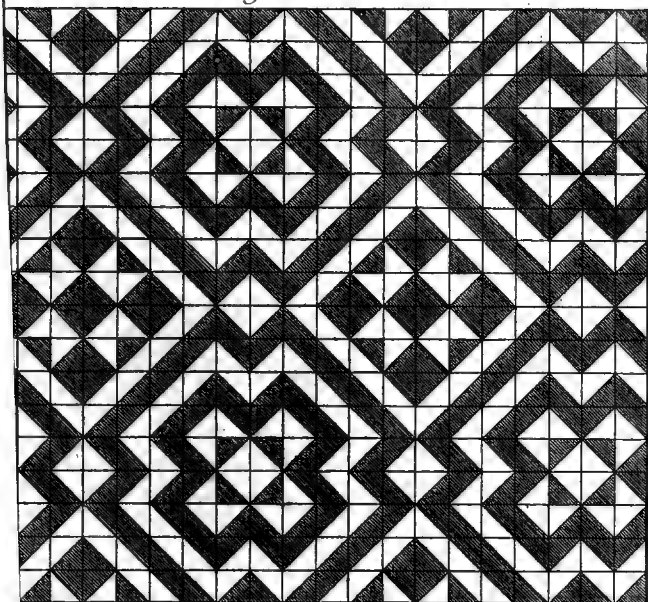
2



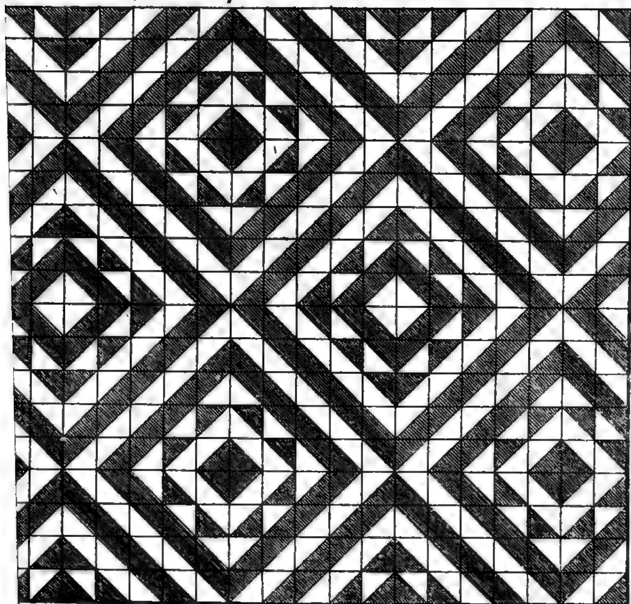
Lud. Simonneau

Sixiéme Planche

3



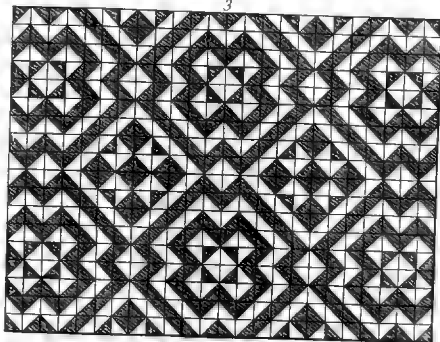
4



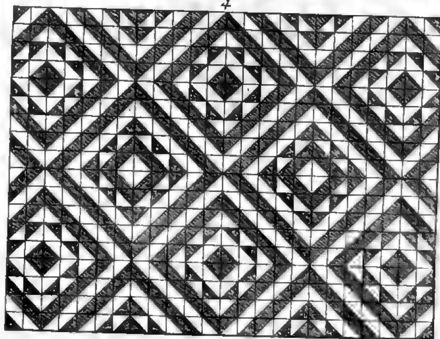
Lud. Simonneau

Sixieme Planche

3



4



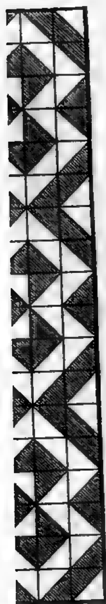
Lud. Simonneau

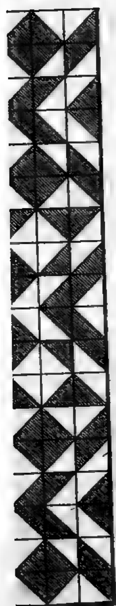
CONSTRUCTION DES DEUX DESSEINS *de la ſeptieme Planche.*

LE premier Deſſein marqué 5 eſt formé avec la 26e combinaiſon, la 22 & la 10e miſes de ſuite chacune une fois dans le premier rang; avec la 28, la 16 & la 12e miſes une fois chacune dans le ſecond; avec la 12, la 14 & la 28e miſes de même dans le 3e; enſuite avec la 28, la 22 & la 12e dans le 4e; avec la 12, la 24 & la 28e de ſuite dans le 5e; & enfin avec la 10, la 14 & la 26e auſſi de ſuite & chacune une fois dans le 6e rang.

Le ſecond Deſſein marqué 6 ſe fait avec le 16 & la 8e chacune une fois, puis la 22e deux fois, enſuite la 40e & la 16e chacune une fois pour le premier rang: le ſecond ſe forme avec la 34e, la 6e, la 50e, la 2e, la 38 & la 18e chacune une fois: le 3e ſe fait avec la 12, la 8, la 26, la 10, la 40 & la 28e miſes de ſuite une fois chacune: le 4^e, par la 28, la 6, la 10, la 26, la 38 & la 12^e une fois chacune: le 5^e eſt fait par la 50, la 8, la 34, la 18, la 40 & la 2^e miſes chacune une fois de ſuite: le 6^e rang, avec la 24 & la 32^e chacune une fois, puis la 14^e deux fois de ſuite, la 28 & la 24^e chacune une fois: le 7^e, avec la 22 & la 40^e chacune une fois, puis deux fois de ſuite la 16^e, & une fois chacune la 8 & la 22^e: le 8^e ſe fait par la 2, la 38, la 18, la 34, la 6 & la 50^e miſes une fois chacune: le 9^e, avec la 10, la 40, la 28, la 12, la 8 & la 26^e miſes de ſuite: le 10e, par la 26, la 38, la 12, la 28, la 6 & la 10 miſes auſſi de ſuite: le 11e, avec la 18, la 40, la 2, la 50, la 8 & la 34e chacune une fois de ſuite: enfin le douzieme rang eſt fait par la 14 & la 38e chacune une fois, la 24 deux fois de ſuite, la 6 & la 14e chacune une fois.

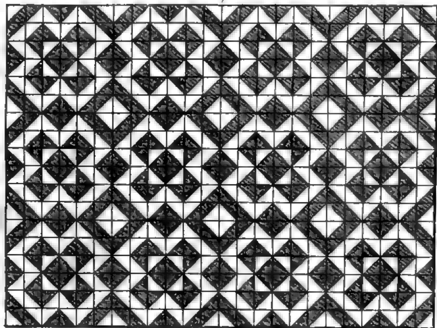
Fin des Mémoires.



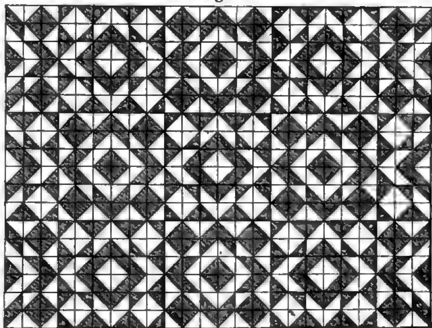


Septiême Planche

5



6



Lud. Simonneau